$$A_{pi} = A_{p\alpha} = A_{i\alpha} = A_{ip} = A_{\alpha p} = A_{\alpha i} = 0 .$$

З а м е ч а н и я: 1) если гиперквадрика Q_n имеет касание второго порядка с кривыми, принадлежащими H-распределению, то она имеет касание второго порядка с любой кривой Λ-распределения, $M\Lambda$-распределения, M-распределения и Φ-распределения; 2) если гиперквадрика Q_n имеет касание второго порядка с кривыми, принадлежащими M-распределению, то она имеет касание второго порядка с любой кривой Λ-распределения и $M\Lambda$-распределения.

2. Если в уравнениях гиперквадрики Q_n положить

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(B_{ij} + B_{ji}), \tag{11}$$

то квадрика будет соприкасающейся только с кривыми, принадлежащими Λ-распределению, и с кривыми, принадлежащими Φ-распределению, где величины B_{ij} определены формулами (2).

3. Если в уравнениях гиперквадрики Q_n положить

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(B_{\alpha\beta} + B_{\beta\alpha}) \tag{12}$$

или

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(K_{\alpha\beta} + K_{\beta\alpha}), \tag{13}$$

то получим квадрику, имеющую касание второго порядка только с кривыми, принадлежащими Λ-распределению и $M\Lambda$-распределению. Величины $B_{\alpha\beta}$ и $K_{\alpha\beta}$ определены формулами (3) и (1) соответственно.

4. Если в уравнении квадрики Q_n положить одновременно (11) и (12) или (13), то квадрика имеет касание второго порядка только с кривыми, принадлежащими Λ-распределению.

5. Гиперквадрика Q_n имеет касание второго порядка только с кривыми, принадлежащими $M\Lambda$-распределению, если в ее уравнении положить (12) и

$$A_{pq} = \frac{1}{2}(\ell_p N_q + \ell_q N_p), \tag{14}$$

где величины ℓ_p и N_q определены формулами (4), (5).

6. Гиперквадрика Q_n имеет касание второго порядка только с кривыми, принадлежащими Φ-распределению, если в ее уравнении положить (11), (14).

Библиографический список

1. Г р е б е н ю к М.Ф. Поля геометрических объектов трехсоставного распределения аффинного пространства A_{n+1} // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1987. Вып.18. С.21-24.

2. С т о л я р о в А.В. Проективно-дифференциальная геометрия гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1975. Т.7. С.117-151.

3. Ю ш к е в и ч Т.Н. К геометрии аффинного трехсоставного распределения $H(M(\Lambda))$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1986. Вып.17. С.114-117.

УДК 513.75

О ТИПАХ ТОЧЕК ПОДМНОГООБРАЗИЙ МНОГООБРАЗИЯ ПОЧТИ КАСАТЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

Р.Ф.Д о м б р о в с к и й

(Черновицкий государственный университет)

Предлагается классификация подмногообразий многообразия почти касательной структуры по типу точек, инвариантному относительно допустимых преобразований локальных координат.

1. Вещественное дифференцируемое многообразие M_{2n} класса C^∞ называется многообразием почти касательной структуры, если на нем задано поле тензора Q типа (1,1), присоединенного к дифференциальной группе $\mathcal{D}^1_{2n}$ [1], [2] и удовлетворяющего соотношениям

$$Q^2 = 0, \tag{1}$$

$$\operatorname{rang} Q = n . \tag{2}$$

4 Зак. 2305

Если $T^*_x(M_{2n})$-сопряженное пространство для касательного пространства $T_x(M_{2n})$ и x^J-локальные координаты произвольной точки x многообразия M_{2n} почти касательной структуры, то $Q=Q^J_K(x)e_J\otimes e^K$, где $\{e_J\}$ - базис в $T_x(M_{2n})$, $\{e^K\}$ - базис, взаимный с $\{e_J\}$, в пространстве $T^*_x(M_{2n})$, $Q^J_K(x)=Q^J_K(x^1,\dots,x^{2n})$ - функции класса C^∞, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений

$$dQ^J_K - Q^J_L\omega^L_K + Q^L_K\omega^J_L = Q^J_{KL}\omega^L,\quad I,J,K,L,\dots=\overline{1,2n}. \tag{3}$$

Линейные дифференциальные формы $\tilde{\omega}^J_K=\omega^J_K\big|_{\omega^L=0}$ являются инвариантными формами группы Ли $\mathcal{D}^1_{2n}$, а геометрический объект $Q=\{Q^J_K\}$, присоединенный к группе $\mathcal{D}^1_{2n}$, называется структурным объектом многообразия почти касательной структуры [2], [3].

Для определенности условие (2) представляем в виде

$$\det\|Q^k_{n+i}\|\neq 0,\quad i,j,k,\ell,\dots=\overline{1,n};\ n+i,n+j,n+k,\dots=\overline{n+1,2n}.$$

Тогда в каждой точке многообразия M_{2n} существует матрица $\tilde{Q}^{n+i}_j$ такая, что

$$\tilde{Q}^{n+i}_j Q^j_{n+\ell}=\delta^{n+i}_{n+\ell},\quad Q^i_{n+j}\tilde{Q}^{n+j}_\ell=\delta^i_\ell. \tag{4}$$

Из соотношений (1) и (4) находим, что

$$\begin{cases} Q^{n+j}_i = -\tilde{Q}^{n+j}_\ell Q^\ell_k Q^k_i = -Q^{n+j}_{n+k}Q^{n+k}_{n+\ell}\tilde{Q}^{n+\ell}_i,\\ Q^{n+j}_{n+i} = -\tilde{Q}^{n+j}_\ell Q^\ell_k Q^k_{n+i}. \end{cases} \tag{5}$$

Таким образом, с точностью до нумерации базисных векторов {e пространства $T_x(M_{2n})$ в произвольной точке x многообразия почти касательной структуры, матрица структурного объекта этого многообразия имеет строение:

$$\begin{pmatrix} Q^j_i & Q^j_{n+i}\\ -\tilde{Q}^{n+j}_\ell Q^\ell_k Q^k_i & -\tilde{Q}^{n+j}_\ell Q^\ell_k Q^k_{n+i}\end{pmatrix}.$$

Утверждение 1 [4]. Функции

$$P^{n+j}_i \overset{def}{=} -\tilde{Q}^{n+j}_\ell Q^\ell_i \tag{6}$$

бразуют геометрический объект, поле которого определяет на ногообразии почти касательной структуры распределение n-ерных линейных элементов.

Доказательство. Непосредственным дифференцированием (6) с использованием (3), (4) и (5) устанавливаем, что

$$P^{n+j}_i - P^{n+j}_\ell\omega^\ell_i + P^{n+\ell}_i\omega^{n+j}_{n+\ell} - P^{n+j}_k P^{n+\ell}_i\omega^k_{n+\ell} + \omega^{n+j}_i = P^{n+j}_{iL}\omega^L. \tag{7}$$

равнения (7) можно записать следующим образом:

$$dP^{n+j}_i - P^{n+j}_\ell\theta^\ell_i + P^{n+\ell}_i\omega^{n+j}_{n+\ell}+\omega^{n+j}_i = P^{n+j}_{iL}\omega^L,$$

де

$$\theta^\ell_i = \omega^\ell_i + P^{n+k}_i\omega^\ell_{n+k},$$
$$d\theta^\ell_i = \theta^j_i\wedge\theta^\ell_j + \omega^L\wedge\theta^\ell_{iL},$$
$$\theta^\ell_{iL} = \omega^\ell_{iL} + P^{n+k}_{iL}\omega^\ell_{n+k} + P^{n+k}_i\omega^\ell_{n+k,L}.$$

ормы θ^ℓ_i имеют расслоенную структуру относительно базовых рм ω^J. В каждом касательном пространстве $T_x(M_{2n})$ многооб зия почти касательной структуры группа с инвариантными фор ми $\bar{\theta}^\ell_i=\theta^\ell_i\big|_{\omega^J=0}$ представлена как группа преобразований систе n линейно независимых векторов $P_i=e_i+P^{n+j}_ie_{n+j}$, т.к. $P_i=\bar{\theta}^\ell_iP_\ell$. Образы базисных векторов e_J в эндоморфизме Q еют разложения $Q(e_J)=Q^X_Je_X$. Но

$$Q(e_i)=Q^k_i(e_k+P^{n+j}_ke_{n+j}),$$
$$Q(e_{n+i})=Q^k_{n+i}(e_k+P^{n+j}_ke_{n+j}).$$

едовательно, $Q(e_i)=-P^{n+j}_ie_{n+j}$. Это означает, что под остранство $\{e_i+P^{n+j}_ie_{n+j}\}$ пространства $T_x(M_{2n})$ принадлежит ру эндоморфизма Q. Поле n-мерных подпространств $+P^{n+j}_ie_{n+j}\}$ в касательных пространствах многообразия почти ка тельной структуры и задает на M_{2n} распределение P n-рных линейных элементов.

Утверждение 2 [4]. На многообразии интегрируемой почти касательной структуры распределение P инволютивно.

Утверждение 3 [5]. Из инволютивности распределения P не следует интегрируемость почти касательной структуры.

Утверждения 2 и 3 следуют из подсчета компонент тензора неголономности распределения P и тензора Нейенхейса аффинора Q почти касательной структуры.

2. Пусть $\mathfrak{M}_m$ m-мерное подмногообразие многообразия M_{2n} почти касательной структуры, определенное уравнениями погружения

$$\omega^J = \Lambda^J_a v^a, \quad a,b,c,\ldots = \overline{1,m}; \quad \mathrm{rang}\,\Lambda^J_a = m. \qquad (8)$$

Линейные формы v^a линейно независимы на подмногообразии $\mathfrak{M}_m$ и являются базисными формами пространства параметров подмногообразия. Следовательно,

$$dv^a = v^b \wedge v^a_b, \qquad dv^a_b = v^c_b \wedge v^a_c + v^c \wedge v^a_{bc}.$$

Функции $\{\Lambda^J_a\}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$d\Lambda^J_a - \Lambda^J_b v^b_a + \Lambda^K_a \omega^J_K = \Lambda^J_{ab} v^b, \quad \Lambda^J_{ab} = \Lambda^J_{ba} \qquad (9)$$

и поэтому образуют линейный однородный геометрический объект (тензор) – фундаментальный объект первого порядка подмногообразия $\mathfrak{M}_m$ [3]. На $\mathfrak{M}_m$ ранг тензора $\{\Lambda^J_a\}$ постоянен и равен m. Поле тензора Q индуцирует на подмногообразии $\mathfrak{M}_m$ поле геометрического объекта $\{P^{n+j}_i\}$:

$$dP^{n+j}_i - P^{n+j}_\ell \omega^\ell_i + P^{n+\ell}_i \omega^{n+j}_{n+\ell} - P^{n+j}_k P^{n+\ell}_i \omega^k_{n+\ell} + \omega^{n+j}_i = P^{n+j}_{iL} \Lambda^L_a v^a \qquad (10)$$

а) Рассмотрим случай $0<m<n$ и введем индексы $\xi,\eta,\sigma,\ldots = \overline{m+1,n}$. Если Λ^b_a та часть компонент тензора $\{\Lambda^J_a\}$, для которой $\det \Lambda^b_a \neq 0$, то существует на $\mathfrak{M}_m$ функциональная матрица $\tilde\Lambda^b_a$, такая, что

$$\begin{cases} \tilde\Lambda^a_b \Lambda^b_c = \delta^a_c, \\ \Lambda^a_b \tilde\Lambda^b_c = \delta^a_c. \end{cases} \qquad (11)$$

Из уравнений (9) и (11) следует, что

$$d\tilde\Lambda^a_b - \tilde\Lambda^a_c \omega^c_b + \tilde\Lambda^c_b v^a_c - \tilde\Lambda^a_c \Lambda^\xi_f \tilde\Lambda^f_b \omega^c_\xi - \tilde\Lambda^a_c \Lambda^{n+i}_f \tilde\Lambda^f_b \omega^c_{n+i} = \tilde\Lambda^a_{bc} v^c,$$

$$d\Lambda^\xi_a - \Lambda^\xi_b v^b_a + \Lambda^\eta_a \omega^\xi_\eta + \Lambda^c_a \omega^\xi_c + \Lambda^{n+i}_a \omega^\xi_{n+i} = \Lambda^\xi_{ac} v^c, \qquad (12)$$

$$d\Lambda^{n+j}_a - \Lambda^{n+j}_b v^b_a + \Lambda^{n+i}_a \omega^{n+j}_{n+i} + \Lambda^c_a \omega^{n+j}_c + \Lambda^\xi_a \omega^{n+j}_\xi = \Lambda^{n+j}_{ac} v^c.$$

Из (10) находим

$$dP^{n+j}_a - P^{n+j}_b \omega^b_a + P^{n+\ell}_a \omega^{n+j}_{n+\ell} - P^{n+j}_\xi \omega^\xi_a - P^{n+j}_b P^{n+\ell}_a \omega^b_{n+\ell} - P^{n+j}_\xi P^{n+\ell}_a \omega^\xi_{n+\ell} + \omega^{n+j}_a = P^{n+j}_{aJ} \Lambda^J_b v^b,$$

$$dP^{n+j}_\xi - P^{n+j}_\eta \omega^\eta_\xi + P^{n+i}_\xi \omega^{n+j}_{n+i} - P^{n+j}_a \omega^a_\xi - P^{n+j}_a P^{n+i}_\xi \omega^a_{n+i} - P^{n+j}_\eta P^{n+i}_\xi \omega^\eta_{n+i} + \omega^{n+j}_\xi = P^{n+j}_{\xi J} \Lambda^J_b v^b \qquad (13)$$

Непосредственным дифференцированием с учетом (12) и (13) устанавливаем справедливость следующего утверждения.

Утверждение 4. Функции

$$K^{n+j}_a \overset{def}{=} P^{n+j}_a - (\Lambda^{n+j}_b - P^{n+j}_\xi \Lambda^\xi_b) \tilde\Lambda^b_a \qquad (14)$$

удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$dK^{n+j}_a - K^{n+j}_b \omega^b_a + K^{n+i}_a \omega^{n+j}_{n+i} - P^{n+j}_\xi K^{n+i}_a \omega^\xi_{n+i} - \Lambda^\xi_c \tilde\Lambda^c_a K^{n+j}_b \omega^b_\xi - (K^{n+i}_a P^{n+j}_b + K^{n+j}_b \Lambda^{n+i}_c \tilde\Lambda^c_a) \omega^b_{n+i} = K^{n+j}_{ac} v^c, \qquad (15)$$

следовательно, ранг матрицы K^{n+j}_a на подмногообразии $\mathfrak{M}_m$ инвариантен относительно допустимых преобразований локальных координат [1], [3].

Определение. Точка x подмногообразия $\mathfrak{M}_m$ многообразия почти касательной структуры называется точкой типа r, если r – ранг числовой матрицы значений функций K^{n+j}_a в этой точке.

Отметим, что функции (14) определены для m-мерных подмногообразий в $2n$-мерных многообразиях почти касательной структуры в случае, когда $0<m<n$. Следовательно, подмно-гообразия $\mathfrak{M}_m$ могут состоять из точек как одного и того же типа $0,1,\ldots,m$, так из точек различных, но этих же типов. Под-многообразие назовем однородным типа τ, если оно состоит из точек одного типа τ.

Совокупность компонент K_a^{n+j}, как видно из уравнений (15), не образует геометрического объекта. Однако, левые части дифференциальных уравнений (15) для этих компонент линейны и однородны относительно этих компонент и их дифференциалов. Поэтому ранг матрицы K_a^{n+j} имеет инвариантный смысл. Совокупность таких компонент Г.Ф.Лаптев назвал "усеченным объектом" [6].

Т е о р е м а. Усеченный объект K_a^{n+j} определяет в каждой точке подмногообразия $\mathfrak{M}_m$ $(0<m<n)$ многообразия почти касательной структуры M_{2n} пересечение элемента распределения P с касательным пространством подмногообразия.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы следует из рассмотрения системы конечных уравнений в локальных координатах для элементов распределения P и соответствующего касательного пространства подмногообразия:

$$x^{n+j}=P_a^{n+j}x^a+P_\xi^{n+j}x^\xi,\quad x^\xi=\Lambda_a^\xi\tilde{\Lambda}_b^a x^b,\quad x^{n+j}=\Lambda_a^{n+j}\tilde{\Lambda}_b^a x^b.$$

Решения этой системы зависят от решений подсистемы $K_a^{n+j}x^a=$ …, т.е. от ранга матрицы K_a^{n+j}. Если, например, ранг K_a^{n+j} максимальный в некоторой точке x подмногообразия $\mathfrak{M}_m$, то в этой точке (в точке типа m) элемент распределения P : … такой, что $P_x\cap T_x(\mathfrak{M}_m)=\{x\}$. Если же $K_a^{n+j}=0$ (в точке типа …), то $T_x(\mathfrak{M}_m)\subset P_x$. В точках типа 0 подмногообразия $\mathfrak{M}_m$ его касательные пространства принадлежат соответствующим ядрам эндоморфизма Q почти касательной структуры. В точках типа … $0<s<m$ подмногообразие $\mathfrak{M}_m$ будет касательно $(m-s)$-оснащенным [7].

б) Если $m=n$ и ранг матрицы

$$L_i^{n+j}\overset{def}{=}P_i^{n+j}-\Lambda_\ell^{n+j}\tilde{\Lambda}_i^\ell \qquad (1…$$

равен числу τ в точке x подмногообразия $\mathfrak{M}_n$ многообразия почти касательной структуры M_{2n}, то точка x относится к

типу τ, $0\le\tau\le n$. Дифференциальные уравнения для величин L_i^{n+j} (16) находим из (7) и (9):

$$dL_i^{n+j}-L_\ell^{n+j}\omega_i^\ell+L_i^{n+\ell}\omega_{n+\ell}^{n+j}+(L_s^{n+j}L_i^{n+\ell}+L_s^{n+j}\Lambda_k^{n+\ell}\tilde{\Lambda}_i^k+L_i^{n+\ell}\Lambda_k^{n+j}\tilde{\Lambda}_s^k)\omega_{n+\ell}^s=L_{ik}^{n+j}\vartheta^k \qquad (17)$$

Из (17) видно, что усеченный объект $\{L_i^{n+j}\}$ не линейный, но однородный.

Очевидно, что однородные типа n n-мерные подмногообразия многообразия почти касательной структуры являются нормально-оснащенными. Поле инвариантных нормалей есть распределение P на таких подмногообразиях. Однородные типа 0 n-мерные подмногообразия многообразия почти касательной структуры – это интегральные многообразия ограничения на подмногообразие распределения ядер структурного тензора почти касательной структуры.

в) При $n<m<2n$ рассмотрим функции

$$M_i^\alpha\overset{def}{=}P_i^\alpha-\Lambda_a^\alpha(\tilde{\Lambda}_i^a+\tilde{\Lambda}_u^a P_i^u), \qquad (18)$$

где

$$u,v,w,\ldots=\overline{n+1,m};\quad \alpha,\beta,\gamma,\ldots=\overline{m+1,}\ .$$

Функции M_i^α (18) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dM_i^\alpha-M_j^\alpha\omega_i^j+M_i^\beta\omega_\beta^\alpha-\Lambda_a^\alpha\tilde{\Lambda}_\ell^a M_i^\beta\omega_\beta^\ell-P_i^{n+j}M_k^\alpha\omega_{n+j}^k=M_{ia}^\alpha\vartheta^a$$

и, следовательно, образуют усеченный объект.

Точка x подмногообразия $\mathfrak{M}_m$ для $n<m<2n$ в многообразии почти касательной структуры M_{2n} называется точкой типа τ, если в этой точке ранг матрицы M_i^α (18) равен τ.

Ясно, что $0\le\tau\le 2n-m$. Таким образом, однородные типа 0 m-мерные подмногообразия при $n<m<2n$ многообразия почти касательной структуры M_{2n} являются касательно n-оснащенными. Касательно оснащающий объект однозначно и инвариантно определен почти касательной структурой объемлющего многообразия. $(2n-1)$-мерные подмногообразия многообразий почти касательной структуры могут состоять из точек двух типов: О и I.

Библиографический список

I. Л а п т е в Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т.I. С.133-190.

2. Е в т у ш и к Л.Е., Л у м и с т е Ю.Г., О с т и а н у Н.М., Ш и р о к о в А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т.9. С.5-246.

3. О с т и а н у Н.М., Р ы ж к о в В.В., Ш в е й к и н П.И. Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С.7-70.

4. Д о м б р о в с к и й Р.Ф. К геометрии многообразий почти касательной структуры // Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях и их приложения: Сб. материалов Всесоюз. геометр. школы / Черновцы, 1990. С.95-106.

5. Д о м б р о в с к и й Р.Ф., М о ч е р н ю к М.Н. К вопросу интегрируемости почти касательной структуры // Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях и их приложения: Сб. материалов Всесоюз. геометр. школы / Черновцы, 1990. С.107-113.

6. Л а п т е в Г.Ф. Распределения касательных элементов // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.29-48.

7. М а л а х о в с к и й В.С. К геометрии касательно оснащенных подмногообразий // Известия вузов. Математика. 1972. №9. С.54-65.

УДК 514.75

ОБ ОДНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ОСНАЩЕННЫХ МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Е.Т.И в л е в

(Томский политехнический институт)

В статье изучаются некоторые частные проективно-инвариантные классы m-поверхностей S_m в $(n+1)$-мерном проективном пространстве P_{n+1}, оснащенных полем нормалей P_I. Все результаты данной статьи носят локальный характер, а функции, рассматриваемые в данной статье, предполагаются аналитическими.

1. Рассматривается $(n+1)$-мерное проективное пространство P_{n+1}, отнесенное к проективному реперу $T=\{A_J\}$ $(J,\mathcal{J},K,L=\overline{0,n+1})$ с деривационными формулами и структурными уравнениями:

$$dA_J=\omega_J^K A_K,\quad \mathcal{D}\omega_J^K=\omega_J^L\wedge\omega_L^K,\quad \omega_J^J=0. \qquad (1)$$

В этом пространстве задается m-поверхность S_m, оснащенная полем нормалей P_I первого рода в смысле А.П.Нордена [1, 197]:

$$P_I\cap L_m=S,\quad P_I\cup L_m=P_{n+1},$$

где $S\in S_m$, L_m-касательная, m-плоскость к S_m в точке S. Репер T присоединяем к S_m так, чтобы

$$S=A_0,\quad L_m=(A_0A_1\dots A_m),\ P_I=(A_0A_{m+1}\dots A_{n+1}). \qquad (2)$$

Тогда в силу (1) будут иметь место следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases}\omega_0^{\hat\alpha}=0,\ \ \omega_\alpha^{\hat\alpha}=A_{\alpha\beta}^{\hat\alpha}\omega_0^\beta,\ \ \nabla A_{\alpha\beta}^{\hat\alpha}+A_{\alpha\beta}^{\hat\alpha}\omega_0^0=A_{\alpha\beta\gamma}^{\hat\alpha}\omega_0^\gamma,\\ \omega_{\hat\alpha}^{\alpha}=A_{\hat\alpha\beta}^{\alpha}\omega_0^\beta,\ \ \nabla A_{\hat\alpha\beta}^{\alpha}+A_{\hat\alpha\beta}^{\alpha}\omega_0^0-\delta_\beta^\alpha\omega_{\hat\alpha}^0=A_{\hat\alpha\beta\gamma}^{\alpha}\omega_0^\gamma,\end{cases} \qquad (3)$$