УДК 514.76

Ю. И. Шевченко

(Балтийский федеральный университет им. И. Канта, г. Калининград)

Соприкасающиеся пространства голономного главного расслоения и подвижной репер 2-го порядка

Показано, что каждое вертикальное подпространство касательного пространства к голономному главному расслоению есть прямая сумма одномерных пространств. Установлено строение соприкасающихся пространств главного расслоения. В частности, любое соприкасающееся пространство содержит введенное в работе прикасающееся подпространство, включающее соприкасающееся со слоем пространство.

Получены структурные уравнения продолженного расслоения — главного расслоения над той же базой, типовым слоем которого является группа Ли с двумя фактор-группами. Продолжение главного расслоения можно представлять как главное расслоение над данным расслоением, имеющее одно фактор-расслоение. С помощью полученных уравнений найдены деривационные формулы подвижного репера 2-го порядка для исходного расслоения.

Ключевые слова: главное расслоение, продолженное расслоение, репер 2-го порядка, соприкасающееся пространство.

Пусть $G_r(M_n)$ — главное расслоение, базой которого является n-мерное гладкое многообразие M_n, а типовым слоем служит r-членная группа Ли G_r. Структурные уравнения Лаптева расслоения $G_r(M_n)$ [1; 2] имеют вид

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j \ \ (i,... = \overline{1,n}); \quad (1)$$

$$D\omega^\alpha = C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \omega^i \wedge \omega^\alpha_i \ \ (\alpha,... = \overline{n+1,n+r}), \quad (2)$$

где D — внешний дифференциал, $C^\alpha_{\beta\gamma}$ — структурные постоянные группы Ли G_r, удовлетворяющие условиям антисимметрии $C^\alpha_{\beta\gamma} = -C^\alpha_{\gamma\beta}$ и тождествам Якоби

$$C^\alpha_{\beta\gamma}C^\beta_{\delta\varepsilon} + C^\alpha_{\beta\delta}C^\beta_{\varepsilon\gamma} + C^\alpha_{\beta\varepsilon}C^\beta_{\gamma\delta} = 0 .$$

Расслоение $G_r(M_n)$ есть специальное гладкое (n+r)-мерное многообразие, поэтому дифференциал dA точки $A \in G_r(M_n)$, описывающий ее смещение, определяется формулой [3—5]

$$dA = \omega^i e_i + \omega^\alpha e_\alpha , \quad (3)$$

где e_i, e_α — векторы подвижного репера 1-го порядка, на которые натянуто касательное пространство $T_{n+r} = [e_i, e_\alpha]$ к расслоению $G_r(M_n)$ в точке A. Из структурных уравнений (1) видно, что система уравнений $\omega^i = 0$ вполне интегрируема. Она фиксирует точку базы M_n, иначе говоря, слой расслоения $G_r(M_n)$, проходящий через точку A. Формула (3) упрощается:

$$\partial A = \overline{\omega}^\alpha e_\alpha \ \ (\partial = d\big|_{\omega^i=0}, \ \overline{\omega}^\alpha = \omega^\alpha\Big|_{\omega^i=0}). \quad (4)$$

Следовательно, касательное пространство T_{n+r} содержит вертикальное подпространство $T_r = [e_\alpha]$, касательное к слою в точке A. Если выполняется вполне интегрируемая система уравнений $\omega^i = 0, \ \omega^\alpha = 0$, то формула (4) упрощается:

$$\delta A = 0 \ \ (\delta = \partial\big|_{\omega^i=0} = d\big|_{\omega^i=0,\omega^\alpha=0}),$$

т. е. фиксируется точка A.

Рассмотрим голономный случай [4], когда дифференциал dA в формуле (3) полный, т. е.

$$D(dA) = \overline{0} . \quad (5)$$

Для продолжения дифференциального уравнения (3) дифференцируем его внешним образом с помощью структурных уравнений (1), (2), (5):

$$(de_i - \omega_i^j e_j - \omega_i^\alpha e_\alpha) \wedge \omega^i + (de_\alpha - C_{\alpha\gamma}^\beta \omega^\gamma e_\beta) \wedge \omega^\alpha = \overline{0}\ .$$

Квадратичные уравнения разрешим по лемме Картана:

$$de_i - \omega_i^j e_j - \omega_i^\alpha e_\alpha = \omega^j e_{ij} + \omega^\alpha e_{i\alpha}\,, \tag{6}$$

$$de_\alpha - C_{\alpha\gamma}^\beta \omega^\gamma e_\beta = \omega^i e_{\alpha i} + \omega^\beta e_{\alpha\beta}\,, \tag{7}$$

где новые векторы симметричны:

$$e_{ij} = e_{ji},\ e_{i\alpha} = e_{\alpha i},\ e_{\alpha\beta} = e_{\beta\alpha}\,. \tag{8}$$

Так появляются векторы 2-го порядка, которые вместе с векторами 1-го порядка определяют касательное пространство 2-го порядка

$$T_{\frac{1}{2}(n+r)(n+r+3)} = [e_i,\, e_\alpha,\, e_{ij}, e_{i\alpha},\, e_{\alpha\beta}],$$

которое (ср.: [5]) называется соприкасающимся с расслоением $G_r(M_n)$ в точке A.

Из деривационных формул (6), (7) следует

$$de_i \cong \omega_i^j e_j + \omega_i^\alpha e_\alpha,\ de_\alpha \cong \overline{0}\,, \tag{9}$$

где символ $\cong$ обозначает сравнение по модулю форм ω^i, ω^α. Сравнения (9_2) показывают инвариантность каждого вектора e_α, поэтому вертикальное пространство T_r есть линейная оболочка r одномерных пространств $T(\alpha)$, определенных соответствующими векторами e_α : $T_r = \bigoplus_\alpha T(\alpha)$.

Теорема 1. *Вертикальное подпространство T_r касательного пространства T_{n+r} к главному расслоению $G_r(M_n)$ в любой его точке есть сумма r одномерных подпространств.*

Уравнения (7) запишем в виде

$$de_\alpha = \omega^i e_{\alpha i} + \omega^\beta E_{\alpha\beta}, \tag{10}$$

$$E_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + C^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma . \tag{11}$$

Продолжим дифференциальные уравнения (10) с помощью структурных уравнений (1), (2) и запишем результат кратко:

$$de_{\alpha i} \cong \omega_i^j e_{\alpha j} + \omega_i^\beta E_{\alpha\beta},\ dE_{\alpha\beta} \cong \overline{0}. \tag{12}$$

Значит, каждый вектор $E_{\alpha\beta}$ инвариантен в любой точке A.

Симметрируем и альтернируем векторы $E_{\alpha\beta}$:

$$E_{(\alpha\beta)} = e_{\alpha\beta} \in T_{\frac{1}{2}(n+r)(n+r+3)} \setminus T_{n+r},\ E_{[\alpha\beta]} = C^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma \in T_r . \tag{13}$$

На совокупности этих векторов натянуты подпространства

$$T_{\frac{1}{2}r(r+1)} = [E_{(\alpha\beta)}],\ T = [E_{[\alpha\beta]}],$$

причем в общем случае согласно (13_2)

$$\dim T = \min\{\frac{1}{2}r(r-1), r\} = \begin{cases} r,\ r \geq 3; \\ 1,\ r = 2; \\ 0,\ r = 1. \end{cases}$$

Теорема 2. *Подпространство T, вообще говоря, вырождается:*

— при $r \geq 3$ совпадает с вертикальным подпространством T_r, в котором наряду с r направлениями $T(\alpha)$ есть еще $\frac{1}{2}r(r-1)$ направлений, заданных векторами $E_{[\alpha\beta]}$;

— при r = 2 является одномерным подпространством касательного к слою пространства T_2;

— при r = 1 превращается в нульмерное подпространство.

Эта теорема с учетом формул (4), (10) при $\omega^i = 0$ и выражения (13) позволяет утверждать, что подпространство $T_{\frac{1}{2}r(r+1)}$

дополняет касательное к слою подпространство T_r до соприкасающегося к слою пространства $T_{\frac{1}{2}r(r+3)}$.

Теорема 3. *Соприкасающееся пространство* $T_{\frac{1}{2}r(r+3)}$ *к слою главного расслоения $G_r(M_n)$ в произвольной точке слоя есть прямая сумма касательного к слою подпространства T_r и его дополнения $T_{\frac{1}{2}r(r+1)}$, которое натянуто на $\frac{1}{2}r(r+1)$ одномерных подпространств*

$$T_{\frac{1}{2}r(r+3)} = T_r \oplus T_{\frac{1}{2}r(r+1)}, \; T_{\frac{1}{2}r(r+1)} = \bigoplus_{\alpha\le\beta} T(\alpha,\beta),$$

где $T(\alpha,\beta)$ — подпространство, определенное вектором $e_{\alpha\beta}$.

Следствие (из теорем 2, 3). *В общем случае соприкасающееся пространство $T_{\frac{1}{2}r(r+3)}$ определяется следующей непрямой суммой одномерных подпространств:*

$$T_{\frac{1}{2}r(r+3)} = \sum_{\alpha,\beta} T\{\alpha,\beta\},$$

где $T\{\alpha,\beta\}$ — подпространство, заданное вектором $E_{\alpha\beta}$.

Дифференциальные сравнения (12) показывают существование подпространств $T_{n+r}(\alpha)=[e_{\alpha i}, E_{\alpha\beta}]$, сумма которых дает новое пространство

$$T_{\frac{1}{2}r(2n+r+3)} = \sum_{\alpha} T_{n+r}(\alpha).$$

Это пространство назовем [4] прикасающимся пространством главного расслоения $G_r(M_n)$. С одной стороны, прикасающееся пространство $T_{\frac{1}{2}r(2n+r+3)}$ содержит соприкасающееся подпространство $T_{\frac{1}{2}r(r+3)}$ к r-мерному слою, с другой — оно содержится в соприкасающемся с $(n+r)$-мерным расслоением пространстве $T_{\frac{1}{2}(n+r)(n+r+3)}$.

Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Соприкасающееся пространство* $T_{\frac{1}{2}(n+r)(n+r+3)}$ *к голономному главному расслоению* $G_r(M_n)$ *имеет следующую структуру:*

$$\begin{array}{ccccl} T_{n+r} & \supset & T_r \subset & T_{\frac{1}{2}r(r+3)} & = (\oplus_{\alpha} T(\alpha)) \oplus (\oplus_{\alpha\le\beta} T(\alpha,\beta)) \\ \cap & & & \cap & \\ T_{\frac{1}{2}(n+r)(n+r+3)} & & \supset & T_{\frac{1}{2}r(2n+r+3)} & \end{array}$$

Замечание. Для подпространств соприкасающегося пространства к неголономному главному расслоению, подчиняющихся более общей схеме, введена наглядная терминология [5]. В голономном случае можно предложить аналогичные названия, отражающие строение подпространств: T_{n+r} — касательный еж, T_r — свернутый касательный еж, $T_{\frac{1}{2}(n+r)(n+r+3)}$ — соприкасающийся еж, $T_{\frac{1}{2}r(2n+r+3)}$ — прикасающийся еж, $T_{\frac{1}{2}r(r+3)}$ — свернутый соприкасающийся еж.

Продолжение структурных уравнений (1), (2) [2; 4; 5] имеет вид

$$\begin{gathered} D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^k \wedge \omega_{jk}^i, \\ D\omega_i^\alpha = \omega_i^j \wedge \omega_j^\alpha + 2C_{\beta\gamma}^\alpha \omega_i^\beta \wedge \omega^\gamma + \omega^j \wedge \omega_{ij}^\alpha; \end{gathered} \tag{14}$$

$$\omega_{jk}^i \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0,\ \omega_{jk}^\alpha \wedge \omega^i \wedge \omega^j = 0.$$

Теорема 5. *Продолжением главного расслоения $G_r(M_n)$ является главное расслоение $G_{r+n(n+r)}(M_n)$ со структурными уравнениями (1), (2), (14) над той же базой M_n, типовым слоем которого служит группа Ли $G_{r+n(n+r)}$, имеющая две фактор-группы: исходную группу G_r и линейную группу $GL(n)$, действующую в касательном пространстве к базе M_n.*

Уравнения (14_2) можно записать иначе:

$$D\omega_i^\alpha = \omega_i^j \wedge \omega_j^\alpha + \omega^j \wedge \omega_{ij}^\alpha + \omega^\beta \wedge 2C_{\beta\gamma}^\alpha \omega_i^\gamma . \tag{15}$$

Теорема 6. *Продолжение главного расслоения $G_r(M_n)$ можно представить как главное расслоение $G_{n(n+r)}(G_r(M_n))$ со структурными уравнениями (1), (2), (14_1), (15), базой которого является исходное расслоение $G_r(M_n)$, а типовым слоем — группа Ли $G_{n(n+r)}$, имеющая линейную фактор-группу $GL(n)$.*

Следствие (из теорем 5, 6). *При любом представлении $G_{r+n(n+r)}(M_n)$ или $G_{n(n+r)}(G_r(M_n))$ продолженное расслоение имеет фактор-расслоение линейных реперов $L_{n^2}(M_n)$ со структурными уравнениями (1), (14_1) над базой M_n, типовым слоем которого служит линейная группа $L_{n^2} = GL(n)$.*

Продолжим дифференциальные уравнения (6) с помощью структурных уравнений (1), (2), (10), (14):

$$de_{ij} \cong \omega_i^k e_{kj} + \omega_j^k e_{ik} + \omega_i^\alpha e_{\alpha j} + \omega_j^\alpha e_{i\alpha} + \omega_{ij}^k e_k + \omega_{ij}^\alpha e_\alpha , \tag{16}$$

$$de_{i\alpha} \cong \omega_i^j e_{j\alpha} + \omega_i^\beta E_{\beta\alpha} + 2C_{\alpha\beta}^\gamma \omega_i^\beta e_\gamma . \tag{17}$$

Пользуясь выражениями (11) векторов $E_{\alpha\beta}$, антисимметрией структурных постоянных $C_{\alpha\beta}^\gamma$ и симметрией (8_3) векторов $e_{\alpha\beta}$, преобразуем сравнения (17):

$$de_{i\alpha} \cong \omega_i^j e_{j\alpha} + \omega_i^\beta E_{\alpha\beta} . \tag{18}$$

Отметим, что формулы (12_1) и (18) соответствуют [5] симметрии (8_2).

Теорема 7. *Подвижной репер 2-го порядка на голономном главном расслоении $G_r(M_n)$ состоит из следующих элементов:*

$$A,\ e_i,\ e_\alpha,\ e_{ij},\ e_{i\alpha} = e_{\alpha i},\ E_{\alpha\beta},$$

с деривационными формулами (3), (6), (10), (16), $(12_1) = (18)$, (12_2).

Список литературы

1. *Лаптев Г.Ф.* Структурные уравнения главного расслоенного многообразия // Тр. геом. семин. /ВИНИТИ. М., 1969. Т. 2. С. 161—178.
2. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. С. 5—247.
3. *Акивис М.А.* Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, 1977.
4. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.
5. *Shevchenko Ju.* Non-symmetrical structure of adjoining spaces of a principal bundle // New Geometry of Nature. Kazan, 2003. Vol. 1. P. 187—190.

Yu. Shevchenko

Osculating spaces of holonomic principal fibre bundle and moving frame of the 2nd order

It is shown, that each vertical subspace to holonomic principal fibre bundle is the direct sum of one-dimensional subspaces. Structure of osculating spaces of the principal fibre bundle is established. In particular, any osculating space contains introduced in the paper adjoining space, including the osculating space to fibre.

We obtain structure of prolonged fibre bundle — principal fibre bundle over the same base, which typical fibre is Lie group with two factor groups. One can represent the prolonging the principal bundle as principal bundle over given bundle, having one factor bundle. By means of obtained equation derivation formulas of the 2nd order moving frame for the initial bundle are found.