patibility tensor and following from them properties of Riemannian manifold are evident facts.

УДК 514.764.3

А.В. Столяров

(Чувашский государственный педагогический университет)

ПРОСТРАНСТВО АФФИННО-МЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ И РИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Показано, что с пространством аффинной связности $A_{n,n}$ ассоциируется пространство проективной связности $P_{n,n}$; если $P_{n,n}$ есть пространство проективно-метрической связности, то в данной работе $A_{n,n}$ называется пространством аффинно-метрической связности (пространство $M_{n,n}$). В статье изучаются некоторые вопросы внутренней геометрии пространства $M_{n,n}$.

На протяжении всего изложения индексы принимают следующие значения:

$$i, j, k = \overline{1, n};\ \ \bar{i}, \bar{j}, \bar{k} = \overline{0, n}.$$

1. Пусть задано пространство аффинной связности $A_{n,n}$, определяемое системой $n(n+1)$ форм Пфаффа $\{\theta^i, \theta^i_j\}$, подчиненных структурным уравнениям [3]

$$D\theta^i = \theta^k \wedge \theta^i_k + \frac{1}{2} r^i_{st}\theta^s \wedge \theta^t,\ D\theta^i_j = \theta^k_j \wedge \theta^i_k + \frac{1}{2} r^i_{jst}\theta^s \wedge \theta^t, \qquad (1)$$

где

$$r^i_{(st)} = 0,\ r^i_{j(st)} = 0,\ \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \cdots \wedge \theta^n \neq 0.$$

В уравнениях (1) каждая из систем функций $\{r^i_{st}\}, \{r^i_{jst}\}$ представляет собой тензор — соответственно тензор кручения и тензор кривизны пространства $A_{n,n}$.

Возьмем систему из $(n+1)^2$ пфаффовых форм $\{\omega^{\bar{i}}_{\bar{j}}\}$,

где

$$\omega^i_0 = \theta^i,\ \omega^0_0 = -\frac{1}{n+1}\theta^k_k,\ \omega^i_j = \theta^i_j - \frac{1}{n+1}\delta^i_j\theta^k_k,\ \omega^0_j = 0; \qquad (2)$$

формы этой системы в силу (1) удовлетворяют структурным уравнениям пространства проективной связности $P_{n,n}$ [8]:

$$D\omega^{\bar{i}}_{\bar{j}} = \omega^{\bar{k}}_{\bar{j}} \wedge \omega^{\bar{i}}_{\bar{k}} + \frac{1}{2}R^{\bar{i}}_{\bar{j}st}\omega^s_0 \wedge \omega^t_0,\ \omega^{\bar{k}}_{\bar{k}} = 0,\ R^{\bar{i}}_{\bar{j}(st)} = 0, \qquad (3)$$

где тензор кривизны-кручения пространства $P_{n,n}$ имеет строение:

$$R^i_{0st} = r^i_{st},\ R^0_{0st} = -\frac{1}{n+1}r^k_{kst},\ R^0_{jst} = 0,\ R^i_{jst} = r^i_{jst} - \frac{1}{n+1}\delta^i_j r^k_{kst}. \qquad (4)$$

Доказана

Теорема 1. *С пространством аффинной связности* $A_{n,n}$ *ассоциируется пространство проективной связности* $P_{n,n}$, *определяемое системой пфаффовых форм* $\{\omega^{\bar{i}}_{\bar{j}}\}$ *(см. (2)); тензор кривизны-кручения пространства* $P_{n,n}$ *имеет строение (4).*

Следствие 1. *Тензоры кручения* r^i_{st} *и* R^i_{0st} *прост- ранств* $A_{n,n}$ *и* $P_{n,n}$ *совпадают.*

Следствие 2. *Пространство проективной связности* $P_{n,n}$ *вырождается в проективное пространство* P_n $(R^{\bar{i}}_{\bar{j}st} \equiv 0)$ *то-*

гда и только тогда, когда исходное пространство аффинной связности $A_{n,n}$ *является аффинным* A_n ($r^i_{st} \equiv 0$, $r^i_{jst} \equiv 0$).

2. Согласно [4] пространством проективно-метричес- кой связности $K_{n,n}$ называется пространство проективной связности $P_{n,n}$, обладающее инвариантным полем локальных гиперквадрик Q_{n-1} (локальных абсолютов). Известно [7], что критерием того, что $P_{n,n}$ есть пространство проективно-метрической связности $K_{n,n}$ с полем локальных абсолютов

$$a_{ij}x^i x^j + \frac{1}{c}\left(g_{i0}x^i + cx^0\right)^2 = 0,\ a_{[ij]} = 0,\ g_{[i0]} = 0,\ c = \mathrm{const} \neq 0, \tag{5}$$

отличных от сдвоенных гиперплоскостей, является выполнение уравнений

$$dg_{i0} - g_{k0}\omega^k_i - c\omega^0_i = a_{ik}\omega^k_0,$$

$$da_{ij} - a_{ik}\omega^k_j - a_{kj}\omega^k_i = -\frac{1}{c}\left(a_{ik}g_{j0} + a_{jk}g_{i0}\right)\omega^k_0; \tag{6}$$

при этом форма ω^0_0 является главной:

$$\omega^0_0 = -\frac{1}{c}g_{k0}\omega^k_0. \tag{7}$$

Наличие инвариантного поля локальных гиперквадрик (5) приводит [7] к конечным соотношениям для компонент тензора кривизны-кручения пространства $K_{n,n}$:

$$R^0_{0st} + \frac{1}{c}g_{k0}R^k_{0st} = 0,\ g_{k0}R^k_{ist} + a_{ik}R^k_{0st} + cR^0_{ist} = 0,$$

$$a_{ik}R^k_{jst} + a_{kj}R^k_{ist} - \frac{1}{c}\left(a_{ik}g_{j0} + a_{jk}g_{i0}\right)R^k_{0st} = 0; \tag{8}$$

одновременное выполнение этих соотношений есть условие полной интегрируемости объединенной системы дифференциальных уравнений (6), (7).

3. Если пространство проективной связности $P_{n,n}$, ассоциированное с исходным пространством аффинной связности $A_{n,n}$, является пространством проективно-метрической связности $K_{n,n}$, то будем говорить, что $A_{n,n}$ — пространство аффинно-метрической связности; ниже это пространство обозначим через $M_{n,n}$.

В неоднородных координатах $X^i = x^i : x^0$ уравнение локального абсолюта Q_{n-1} пространства $M_{n,n}$, согласно (5), имеет вид:

$$a_{ij}X^iX^j + \frac{1}{c}\left(g_{i0}X^i + c\right)^2 = 0; \qquad (9)$$

в силу (2), (6), (7) функции a_{ij}, g_{i0} удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dg_{i0} - g_{k0}\theta_i^k = \left(a_{ik} - \frac{1}{c}g_{i0}g_{k0}\right)\theta^k, \qquad (10)$$

$$da_{ij} - a_{ik}\theta_j^k - a_{kj}\theta_i^k = -\frac{1}{c}\left(a_{ik}g_{j0} + a_{jk}g_{i0} + 2a_{ij}g_{k0}\right)\theta^k.$$

Согласно (4), (8) компоненты тензоров кривизны r_{jst}^i и кручения r_{st}^i пространства $M_{n,n}$ удовлетворяют конечным соотношениям

$$\frac{1}{n+1}r_{kst}^k = \frac{1}{c}g_{k0}r_{st}^k,\ g_{k0}r_{ist}^k + a_{ik}r_{st}^k = \frac{1}{n+1}g_{i0}r_{kst}^k,$$

$$a_{ik}r_{jst}^k + a_{kj}r_{ist}^k = \frac{2}{n+1}a_{ij}r_{kst}^k + \frac{1}{c}\left(a_{ik}g_{j0} + a_{jk}g_{i0}\right)r_{st}^k. \qquad (11)$$

Если пространство $M_{n,n}$ − без кручения ($r_{st}^i \equiv 0$), то из тождеств Риччи $r_{(jst)}^i \equiv 0$ непосредственно следует

$$r^k_{kst} = -2r_{[st]}, (12)$$

где $r_{st} \overset{\text{def}}{=} r^l_{stl}$ есть тензор Риччи пространства $M_{n,n}$. Из соотношений (11$_1$), (12) находим $r_{[st]} = 0,$ т.е. справедлива

Теорема 2. *Пространство аффинно-метрической связности* $M_{n,n}$ *без кручения является эквиаффинным.*

4. Уравнения (10$_2$) можно переписать в виде

$$da_{ij} - a_{ik}\Theta^k_j - a_{kj}\Theta^k_i = 0, \tag{13}$$

где

$$\Theta^i_j = \theta^i_j - \frac{1}{c}\left(\delta^i_j g_{k0}\theta^k + g_{j0}\theta^i\right). \tag{14}$$

Система форм $\{\theta^i, \Theta^i_j\}$ в силу (1), (10) удовлетворяет структурным уравнениям Картана — Лаптева [1; 4]

$$D\theta^i = \theta^k \wedge \Theta^i_j + \frac{1}{2}\Re^i_{st}\theta^s \wedge \theta^t,$$

$$D\Theta^i_j = \Theta^k_j \wedge \Theta^i_k + \frac{1}{2}\Re^i_{jst}\theta^s \wedge \theta^t, \tag{15}$$

а следовательно, определяет новое пространство аффинной связности $\tilde{A}_{n,n}$; тензоры кручения $\Re^i_{st}$ и кривизны $\Re^i_{jst}$ этого пространства имеют, соответственно, вид:

$$\Re^i_{st} = r^i_{st},$$

$$\Re^i_{jst} = r^i_{jst} - \frac{1}{c}\left(\delta^i_j g_{k0} r^k_{st} + g_{j0} r^i_{st} + 2a_{j[s}\delta^i_{t]}\right). \tag{16}$$

Замечание. Строение форм Θ^i_j (см. (14)) говорит о том, что пространство $\tilde{A}_{n,n}$ индуцируется полярной относительно поля

(9) нормализацией пространства аффинно-метрической связности $M_{n,n}$.

Из соотношений (16_1) следует, что тензоры кручения пространств $\tilde{A}_{n,n}$ и $M_{n,n}$ совпадают; при этом уравнения (13) говорят о том, что связность пространства $\tilde{A}_{n,n}$ является метрической (вообще говоря, с кручением) с полем метрического тензора a_{ij}.

Для пространства $\tilde{A}_{n,n}$ без кручения, согласно соотношениям (12), (16) и теореме 2, справедливо

$$2\Re_{[st]} = -\Re^{k}_{kst} = -r^{k}_{kst} = 2r_{[st]} = 0.$$

Доказана

Теорема 3. *Для пространства аффинно-метрической связности* $M_{n,n}$ *с полем локальных абсолютов (9) система форм Пфаффа* $\{\theta^i, \Theta^i_j\}$ *(см. (14)) определяет пространство аффинной связности* $\tilde{A}_{n,n}$ *, причем тензоры кручения пространств* $\tilde{A}_{n,n}$ *и* $M_{n,n}$ *совпадают. Связность пространства* $\tilde{A}_{n,n}$ *является метрической (вообще говоря, с кручением) с полем метрического тензора* a_{ij}, *причем если* $\tilde{A}_{n,n}$ *имеет нулевое кручение, то оно есть пространство эквиаффинной связности.*

Следствие. *Если* $M_{n,n}$ *есть пространство аффинно-метрической связности без кручения, причем тензор* a_{ij} *невырожден, то пространство* $\tilde{A}_{n,n}$ *является римановым с полем метрического тензора* a_{ij}.

В предположении невырожденности тензора a_{ij} справедлива

Теорема 4. *Пространство аффинно-метрической связности* $M_{n,n}$ *плоское* $(r^i_{st} = r^i_{jst} \equiv 0)$ *тогда и только тог- да, когда* $\tilde{A}_{n,n}$ *является римановым пространством постоянной кривизны* $K = -\frac{1}{c}$.

Действительно, если пространство $M_{n,n}$ − плоское, то необходимость условия теоремы 4 непосредственно следует из соотношений (16) и следствия из теоремы 3, ибо при этом справедливо

$$\Re^i_{jst} = -\frac{2}{c} a_{j[s}\delta^i_{t]}; \tag{17}$$

последнее, согласно [5; 6], характеризует риманово пространство постоянной кривизны $K = -\frac{1}{c}$.

Обратно, если $\tilde{A}_{n,n}$ есть риманово пространство постоянной кривизны, то справедливы соотношения (17) и $\Re^i_{st} = r^i_{st} = 0$; следовательно, из (16) следует $r^i_{jst} = 0$, т.е. $M_{n,n}$ есть плоское пространство.

Так как в условиях теоремы 4 справедливо

$$\Re_{js} = -\frac{n-1}{c} a_{js},$$

т.е. тензор Риччи риманова пространства $\tilde{A}_{n,n}$ постоянной кривизны пропорционален метрическому тензору с постоянным коэффициентом пропорциональности, то, согласно [2], $\tilde{A}_{n,n}$ является пространством Эйнштейна.

Список литературы

1. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Пробл. геометрии. М., ВИНИТИ. 1979.Т. 9.
2. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. М., 1981.
3. *Лаптев Г.Ф.* О выделении одного класса внутренних геометрий, индуцированных на поверхности пространства аффинной связности //ДАН СССР. 1943. —Т. 41. № 8. С. 329—331.
4. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий //Тр. Моск. матем. общ-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.
5. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.
6. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М., 1967.
7. *Столяров А.В.* Пространство проективно-метрической связности //Изв. вузов. Математика. 2003. № 11. С. 70—76.
8. *Cartan E.* Leçons sur la théorie des éspaces a connexion projective. Paris, 1937.

A. Stolyarov

THE SPACE OF AFFINE-METRICAL CONNECTION AND RIEMANNIAN SPACE OF CONSTANT CURVATURE

It is shown that the projectively connected space $P_{n,n}$ is associated with the affinely connected space $A_{n,n}$. If $P_{n,n}$ is the space of projective-metrical connection, then in this particula article $A_{n,n}$ is called the space of affine-metrical connection ($M_{n,n}$ space). Some problems of interior geometry of $M_{n,n}$ space are studied in this paper.