Условие аффинного расслоения от прямолинейной конгруэнции **(A, $\bar{e}_\gamma$)** к конгруэнции касательных плоскостей [**A**, $\bar{e}_\alpha$, $\bar{e}_\beta$**]** поверхности **(A)** с учетом (7) и (8), имеет вид:

$$\omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\alpha^\gamma + \omega_\gamma^\beta \wedge \omega_\beta^\gamma = 0. \tag{9}$$

Форма Пфаффа ω_γ^γ тогда и только тогда является полным дифференциалом некоторой функции, когда $D\omega_\gamma^\gamma = 0$ или выполняется равенство (9), откуда следует утверждение теоремы.

Теорема 3.Точка **A** тогда и только тогда является фокусом луча **[A, $\bar{e}_\alpha$]** конгруэнции **(A, $\bar{e}_\alpha$)**, когда формы Пфаффа ω^β и ω^γ линейно зависимы.

Доказательство. Точка **A** является фокусом луча **[A, $\bar{e}_\alpha$]** конгруэнции **(A, $\bar{e}_\alpha$)** тогда и только тогда, когда $\Gamma_1^\beta\Gamma_2^\gamma - \Gamma_2^\beta\Gamma_1^\gamma = 0$ или $\omega^\beta \wedge \omega^\gamma = 0$, а это и означает линейную зависимость форм ω^β и ω^γ.

Библиографический список

1. *Щербак Е.А***.** О конгруэнциях пар фигур, порожденных коникой и точкой в **A_3** // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1986.С. 110 - 114.

E. A. S c h e r b a k

ON SOME PROPERTIES OF CONGRUENCES
OF EQUIPPED CONICS IN A_3

Investigation of congruences K equipped conics F={F_1, F_2} are continued, where F_1 is a central conic and F_2 is a point, not incident to a plane of the conic F_1. New geometric properties of the congruence K are obtained.

УДК 514.76

ОСНАЩЕНИЯ ПОДМНОГООБРАЗИЙ ГОЛОНОМНОГО И НЕГОЛОНОМНОГО ЦЕНТРОПРОЕКТИВНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Ю.И. Ш е в ч е н к о

(Калининградский государственный университет)

Под центропроективным многообразием понимается результат проективизации дифференцируемого многообразия, при которой касательные линейные пространства всех порядков превращаются в центропроективные пространства тех же размерностей. При этом различаются голономные и неголономные центропроективные многообразия, полученные из соответствующих дифференцируемых многообразий и отличающиеся размерностями касательных пространств выше первого порядка.

Рассмотрено подмногообразие центропроективного многообразия и главное расслоение, ассоциированное с ним. Расслоение содержит, в частности, подрасслоения касательных и нормальных линейных реперов. Способом Лаптева в ассоциированном расслоении задана групповая связность, в том числе, касательная и нормальная линейные связности. Оснащение Картана и нормализация Нордена поверхности проективого пространства распространены на подмногообразие.

Доказано, что композиционное оснащение (оснащение Картана и нормализация 2-го рода Нордена) подмногообразия сводят к касательной и нормальной связностям групповую связность, называемую в этом случае композиционной. Показано, что плоскость Картана и нормаль 2-го рода абсолютно параллельны в композиционной связности. Линейные связности охарактеризованы геометрически с помощью центральных проекций плоскостей Картана и нормалей 2-го рода. Введены новые оснащения, выяснены их роль и взаимоотношения.

1. Центропроективные многообразия. Рассмотрим n-мерное многообразие V_n некоторого класса дифференцируемости. В любой точке $A\in V_n$ имеются касательные векторные пространства T^r порядков r, причем их размерности при r>1 для неголономного и голономного дифференцируемых многообразий различны [1]: $\mathrm{Dim}T^r=n(1+n+...+n^{r-1})$, $\dim T^r=C^r_{n+r}-1$. Наделяя векторные пространства T^r структурой аффинного пространства, дополняя их несобственными гиперплоскостями и расширяя действия групп преобразований, произведем проективизацию дифференцируемого многообразия V_n. В результате касательные пространства T^r превратятся в центропроективные пространства P^r тех же размерностей, а дифференцируемое многообразие V_n станет центропроективным многообразием W_n [2].

Отнесем многообразие W_n к подвижному реперу $\{A, A_I, A_{IJ}, A_{IJK},...\}$, причем $A\in W_n$; $A,A_I\in P^1=P_n$; $A_{IJ}\in P^2$; $A_{IJK}\in P^3$;... Деривационные формулы репера имеют вид [2]:

$$\partial A=\omega A+\omega^I A_I \quad (I,J,K,L=1,...,n), \tag{1}$$

$$\partial A_I=\omega A_I+\omega^J_I A_J+\omega_I A+\omega^J A_{IJ},$$

$$\partial A_{IJ}=\omega A_{IJ}+\omega^K_I A_{KJ}+\omega^K_J A_{IK}+\omega_I A_J+\omega_J A_I+\omega^K_{IJ} A_K+\omega_{IJ} A+\omega^K A_{IJK},..., \tag{2}$$

где ∂ – символ дифференцирования вдоль многообразия W_n, ω – некоторая линейная дифференциальная форма, ω^I – базисные формы многообразия W_n, $\omega^I_J,\omega_I,\omega^K_{IJ},\omega_{IJ},...$ – слоевые формы. Базисные и слоевые формы удовлетворяют структурным уравнениям [2]:

$$D\omega^I=\omega^J\wedge\omega^I_J,\ D\omega^I_J=\omega^K_J\wedge\omega^I_K+\omega^K\wedge\omega^I_{JK}, \tag{3}$$

$$D\omega_I=\omega^J_I\wedge\omega_J+\omega^J\wedge\omega_{IJ}, \tag{4}$$

$$D\omega^I_{JK}=\omega^L_{JK}\wedge\omega^I_L-\omega^I_{LK}\wedge\omega^L_J-\omega^I_{JL}\wedge\omega^L_K+\omega^L\wedge\omega^I_{JKL},$$

$$D\omega_{IJ} = \omega_{IJ}^{K} \wedge \omega_{K} - \omega_{IK} \wedge \omega_{J}^{K} - \omega_{KJ} \wedge \omega_{I}^{K} + \omega^{K} \wedge \omega_{IJK}, ...,$$

где D – символ внешнего дифференцирования. Точки A_{IJ}, A_{IJK},... и формы ω_{JK}^{I}, ω_{IJ}, ω_{JKL}^{I}, ω_{IJK},... в голономном случае симметричны по нижним индексам, а в неголономном случае не симметричны, поэтому неголономная и голономная размерности, например, соприкасающегося пространства P^2 таковы: $DimP^2=n(1+n)$, $dimP^2=\frac{n}{2}(n+3)$.

2. Связности многообразия. Над многообразием W_n возникает главное расслоение центропроективных реперов $C(W_n)$ со структурными уравнениями (3,4), типовым слоем которого является центропроективная (коаффинная) группа $C=GA^*(n)$, действующая в касательном центропроективном пространстве P_n. Это расслоение содержит подрасслоение линейных реперов $L(W_n)$ с уравнениями (3), типовым слоем которого служит линейная группа $L=GL(n)\subset C$. Центропроективная связность в расслоении $C(W_n)$ задается способом Лаптева [3] с помощью форм $\Omega_{J}^{I} = \omega_{J}^{I} - \Gamma_{JK}^{I}\omega^{K}$, $\Omega_{I} = \omega_{I} - \Gamma_{IJ}\omega^{J}$, причем компоненты объекта связности $\Gamma=\{\Gamma_{JK}^{I}, \Gamma_{IJ}\}$ удовлетворяют дифференциальным соотношениям

$$\nabla\Gamma_{JK}^{I} + \omega_{JK}^{I} \equiv 0,\ \nabla\Gamma_{IJ} + \Gamma_{IJ}^{K}\omega_{K} + \omega_{IJ} \equiv 0, \tag{5}$$

где символ $\equiv$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^{I}, а дифференциальный оператор ∇ действует следующим образом:

$$\nabla\Gamma_{JK}^{I} = \partial\Gamma_{JK}^{I} - \Gamma_{JL}^{I}\omega_{K}^{L} - \Gamma_{LK}^{I}\omega_{J}^{L} + \Gamma_{JK}^{L}\omega_{L}^{I}.$$

Объект центропроективной связности Γ содержит подобъект Γ_{JK}^{I}, задающий линейную связность в подрасслоении $L(W_n)$. Объект Γ охарактеризован [2] с помощью параллельных переносов нормали 2-го рода многообразия W_n –подпространства N_{n-1}: $A\notin N_{n-1}\subset P_n$. Дадим характеристику подобъекту Γ_{JK}^{I} с помощью отображений нормалей N_{n-1}. Рассмотрим точки $N_I=A_I+\lambda_I A$. Подействуем на них оператором ∇: $\nabla N_I\equiv\omega N_I+(\nabla\lambda_I+\omega_I)A$. Совокупность точек N_I инвариантна в фиксированной точке $A\in W_n$ при условиях $\nabla\lambda_I+\omega_I=\lambda_{IJ}\omega^{J}$. Продолжая эти уравнения, получим $\nabla\lambda_{IJ}-\lambda_K\omega_{IJ}^{K}+\omega_{IJ}\equiv 0$. Нормаль $N_{n-1}=[N_I]$–натянута на точки N_I, которые удовлетворяют уравнениям

$$\nabla N_I=\omega N_I+\omega^{J} N_{IJ}\ (N_{IJ}=A_{IJ}+\lambda_{IJ}A+\lambda_I A_J) \tag{6}$$

Определение 1. Центропроективное многообразие W_n, на котором задано поле нормалей 2-го рода N_{n-1}, назовем полунормализованным многообразием W_n^0.

Точки N_{IJ} удовлетворяют сравнениям

$$\nabla N_{IJ}\equiv\omega N_{IJ}+\omega_J N_I+\omega_{IJ}^{K} N_K,$$

т.е. вместе с точками N_I определяют продолженную нормаль $N(n)=[N_{IJ},N_I]$: $A\notin N(n)\subset P^2$, $N_{n-1}\subset N(n)$, $DimN(n)=n^2+n-1$, $dimN(n)=\frac{n}{2}(n+3)-1$.

Введем формы линейной связности Ω_{J}^{I} в уравнения (6):

$$dN_I=\omega N_I+\Omega_I^J N_J+\omega^J C_{IJ}, \qquad (7)$$

где $C_{IJ}=N_{IJ}+\Gamma_{IJ}^K N_K$ ($\nabla C_{IJ}\equiv\omega C_{IJ}+\omega_J N_I$). Возьмем точки $E_{IJ}=C_{IJ}+\lambda_J N_I$ ($\nabla E_{IJ}\equiv\omega E_{IJ}$). На них натянута плоскость $E(n)=[E_{IJ}]$: $N_{n-1}\oplus E(n)=N(n)$, $DimE(n)=n^2-1$, $dimE(n)=\frac{n}{2}(n+1)-1$. Уравнения (7) перепишем в виде:

$$dN_I=(\omega-\lambda_J\omega^J)N_I+\Omega_I^J N_J+\omega^J E_{IJ}. \qquad (8)$$

Определение 2. Плоскость $E(n)$ назовем порожденным линейной связностью дополнением нормали 2-го рода N_{n-1} многообразия W_n^0 до продолженной нормали $N(n)$. Произвольную плоскость E, обладающую тем же свойством: $N_{n-1}\oplus\mathsf{E}=N(n)$, назовем просто дополнением нормали N_{n-1}.

Теорема 1. Задание линейной связности в расслоении $L(W_n^0)$ над полунормализованным многообразием W_n^0 эквивалентно заданию поля дополнений нормалей 2-го рода N_{n-1}.

Доказательство. Если даны нормализующий 2-го рода квазитензор λ_I и объект линейной связности Γ_{JK}^I, то с их помощью строятся базисные точки дополнения $E(n)$: $E_{IJ}=N_{IJ}+(\Gamma_{IJ}^K+\delta_I^K\lambda_J)N_K$. Обратно, рассмотрим точки $\mathsf{E}_{IJ}=N_{IJ}+\mu_{IJ}^K N_K$. Применяя оператор ∇, найдем

$$\nabla\mathsf{E}_{IJ}\equiv\omega\mathsf{E}_{IJ}+(\nabla\mu_{IJ}^K+\omega_{IJ}^K+\delta_I^K\omega_J)N_K.$$

При выполнении сравнений $\nabla\mu_{IJ}^K+\omega_{IJ}^K+\delta_I^K\omega_J\equiv0$ на точки E_{IJ} натянута плоскость E, т.е. задание поля плоскостей E эквивалентно заданию поля квазитензора μ_{IJ}^K. Сопоставляя разложения точек E_{IJ} и E_{IJ}, получим $\Gamma_{IJ}^K=\mu_{IJ}^K-\delta_I^K\lambda_J$.

Теорема 2. Линейная связность полунормализованного многообразия W_n^0 характеризуется внутри продолженной нормали $N(n)$ проекцией смежной нормали 2-го рода $N_{n-1}+\partial N_{n-1}$ на исходную нормаль N_{n-1} из центра $E(n)$–порожденного линейной связностью дополнения нормали N_{n-1}. В символической записи

$$\Gamma_{JK}^I: N_{n-1}+\partial N_{n-1}\xrightarrow{E(n)}N_{n-1}.$$

Доказательство следует из формулы (8).

3. Подмногообразие. Пусть в многообразии W_n дано подмногообразие W_m. Разобьем значения индексов: $I=(i,a)$; $i,j,k=1,...m$; $a,b,c=m+1,...,n$. Дифференциальные уравнения подмногообразия $W_m\subset W_n$ запишем в виде:

$$\omega^a=\Lambda_i^a\omega^i. \qquad (9)$$

Продолжая их, найдем

$$\nabla\Lambda_i^a-\Lambda_j^a\Lambda_i^b\omega_b^j+\omega_i^a=\Lambda_{ij}^a\omega^j \quad (\Lambda_{[ij]}^a=0), \qquad (10)$$

где дифференциальный оператор ∇ действует так:

$$\nabla\Lambda_i^a=d\Lambda_i^a-\Lambda_j^a\omega_i^j+\Lambda_i^b\omega_b^a \qquad (d=\partial\big|_{W_n}).$$

Уравнение (1) для точки $A\in W_m$,смещающейся вдоль подмногообразия W_m, принимает вид $dA=\omega A+\omega^i B_i$ ($B_i=A_i+\Lambda^a_i A_a$). Точки B_i удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla B_i=\omega B_i+\Lambda^a_i\omega^j_a B_j+(\omega_i+\Lambda^a_i\omega_a)A+\omega^j B_{ij}, \tag{11}$$

где

$$B_{ij}=A_{ij}+\Lambda^a_{ij}A_a+\Lambda^a_j A_{ia}+\Lambda^a_i(A_{aj}+\Lambda^b_j A_{ab}). \tag{12}$$

Совокупность точек A,B_i определяет касательное подпространство $P_m=[A,B_i]\subset P_n$ к подмногообразию W_m в точке A.

Произведем частичную канонизацию подвижного репера $\{A, A_i, A_a\}$ касательного пространства P_n, помещая точки A_i в касательное подпространство P_m. Тогда $\Lambda^a_i=0$, $B_i=A_i$ и соотношения (9-12) упрощаются

$$\omega^a=0,\ \omega^a_i=\Lambda^a_{ij}\omega^j;$$

$$\nabla B_i=\omega B_i+\omega_i A+\omega^j B_{ij}\ (B_{ij}=A_{ij}+\Lambda^a_{ij}A_a). \tag{13}$$

Продолжая вторую подсистему системы (13), найдем $\nabla\Lambda^a_{ij}+\omega^a_{ij}\equiv 0$, где знак $\equiv$ теперь означает сравнение по модулю базисных форм ω^i подмногообразия W_m. Точки B_{ij} удовлетворяют сравнениям

$$\nabla B_{ij}\equiv\omega B_{ij}+\omega_i A_j+\omega_j A_i+\theta^k_{ij}A_k+\theta_{ij}A,$$

где $\theta^k_{ij}=\omega^k_{ij}+\Lambda^a_{ij}\omega^k_a$, $\theta_{ij}=\omega_{ij}+\Lambda^a_{ij}\omega_a$. Совокупность точек A, A_i, B_{ij} определяет соприкасающееся подпространство $P(m)$ к подмногообразию W_m в точке A, причем $DimP(m)=m(m+1)$, $dimP(m)=\frac{m}{2}(m+3)$.

4. Прикасающиеся пространства. Из деривационных формул (2) с учетом уравнений (13) подмногообразия W_n следует:

$$\nabla A_{ij}\equiv\omega A_{ij}+\omega_i A_j+\omega_j A_i+\omega^k_{ij}A_k+\omega^a_{ij}A_a+\omega_{ij}A,$$

$$\nabla A_{ai}\equiv\omega A_{ai}+\omega^j_a A_{ji}+\omega_a A_i+\omega_i A_a+\omega^j_{ai}A_j+\omega^b_{ai}A_b+\omega_{ai}A,$$

$$\nabla A_{ia}\equiv\omega A_{ia}+\omega^j_a A_{ij}+\omega_a A_i+\omega_i A_a+\omega^j_{ia}A_j+\omega^b_{ia}A_b+\omega_{ia}A.$$

Значит, инвариантны совокупности точек $\{A, A_i, A_a, A_{ij}\}$, $\{A, A_i, A_a, A_{ij},A_{ai}\}$, $\{A, A_i, A_a, A_{ij},A_{ia}\}$,$\{A, A_i, A_a, A_{ij}, A_{ai}, A_{ia}\}$, определяющие четыре подпространства, которые обозначим X,Y,Y^*,Z соответственно. В неголономном случае имеем:

$$A\in P_m\ \begin{matrix}P_n\\ P(m)\end{matrix}\ X\ \begin{matrix}Y\\ Y^*\end{matrix}\ Z\subset P^2=P(n),$$

$$P_n\cap P(m)=P_m,\ P_n+P(m)=X,\ Y\cap Y^*=X,\ Y+Y^*=Z,$$

$$DimX=n+m^2,\ DimY=DimY^*=n(m+1),\ DimZ=n+m(2n-m).$$

В голономном случае таблица включений упрощается, т.к. $X\subset Y=Y^*=Z$, причем $dimX=n+\frac{m}{2}(m+1)$, $dimY=n+\frac{m}{2}(2n-m+1)$.

Выясним геометрическую характеристику подпространств Y,Y^*, через которые выражаются подпространства X,Z. Предварительно найдем 2-ой дифференциал точки $A\in W_n$ вдоль многообразия W_n:

$$\partial^2 A=\partial(\omega A+\omega^I A_I)=(\partial\omega^I+2\omega\,\omega^I+\omega^J\omega_J^I)A_I+$$

$$+(\partial\omega+\omega^2+\omega^I\omega_I)A+\omega^I\omega^J A_{IJ}\in P(n)=[P_n+\partial P_n].$$

Соприкасающееся пространство $P(n)$ является линейной оболочкой множества пространств $P_n+\partial P_n$, смежных с касательным пространством P_n вдоль многообразия W_n. Аналогично, для подмногообразия W_m:

$$d^2A=d(\omega A+\omega^i A_i)=(d\,\omega^i+2\omega\,\omega^i+\omega^j\omega_j^i)A_i+$$

$$+(d\omega+\omega^2+\omega^i\omega_i)A+\omega^i\omega^j A_{ij}\in P(m)=[P_m+dP_m].$$

Соприкасающееся подпространство $P(m)$ есть оболочка пространств P_m+dP_m, смежных с касательным подпространством P_m вдоль подмногообразия W_m.

Для смещений 2-го порядка возможны еще два варианта. Во-первых,

$$d(\partial A)=d(\omega A+\omega^i A_i+\omega^a A_a)=(d\omega+\omega^2+\omega^i\omega_i+\omega^a\omega_a)A+\omega^i(\omega^j B_{ij}+\omega^a A_{ai})+$$

$$+(d\,\omega^i+\omega^j\omega_j^i+2\omega\,\omega^i+\omega^a\omega_a^i)A_i+(d\omega^a+\omega^b\omega_b^a+\omega\,\omega^a)A_a\in Y=[P_n+dP_n].$$

Подпространство Y является линейной оболочкой пространств P_n+dP_n, смежных к касательному пространству P_n вдоль подмногообразия W_m. Во-вторых,

$$\partial(dA)=\partial(\omega A+\omega^i A_i)=(\partial\omega+\omega^2+\omega^i\omega_i)A+(\partial\omega^i+\omega^j\omega_j^i+2\omega\,\omega^i)A_i+$$

$$+(\omega\,\omega^a+\omega^i\omega_i^a)A_a+\omega^i(\omega^j A_{ij}+\omega^a A_{ia})\in Y^*=[P_m+\partial P_m].$$

Подпространство Y^* есть оболочка подпространств $P_m+\partial P_m$, смежных к касательному подпространству P_m вдоль многообразия W_n.

Определение 3. Подпространства X,Y,Y^*,Z назовем прикасающимися подпространствами подмногообразия W_m центропроективного многообразия W_n в точке $A\in W_m$.

Замечание. 1)Прикасающиеся подпространства подмногообразия дифференцируемого многообразия характеризуются аналогично [4].

5. Ассоциированное расслоение. Структурные уравнения (3,4) с учетом дифференциальных уравнений (13) подмногообразия W_m принимают вид:

$$D\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j^i, \tag{14}$$

$$D\omega_j^i=\omega_j^k\wedge\omega_k^i+\omega^k\wedge\theta_{jk}^i, \tag{15}$$

$$D\omega_i=\omega_i^j\wedge\omega_j+\omega^j\wedge\theta_{ij}, \tag{16}$$

$$D\omega_b^a=\omega_b^c\wedge\omega_c^a+\omega^i\wedge\theta_{bi}^a\ \ (\theta_{bi}^a=\omega_{bi}^a-\Lambda_{ij}^a\omega_b^j), \tag{17}$$

$$D\omega_a^i=\omega_a^j\wedge\omega_j^i+\omega_a^b\wedge\omega_b^i+\omega^j\wedge\omega_{aj}^i, \tag{18}$$

$$D\omega_a=\omega_a^b\wedge\omega_b+\omega_a^i\wedge\omega_i+\omega^i\wedge\omega_{ai}. \tag{19}$$

Расслоение центропроективных реперов $C(W_n)$ сократилось до главного расслоения $G(W_m)$, базой которого является подмногообразие W_m, а типовым слоем служит $[n(n+1)-m(n-m)]$-членная подгруппа стационарности $G\subset C$ центрированного касательного подпространства P_m в касательном пространстве P_n. Расслоение $G(W_m)$ содержит четыре главных подрасслоения над той же базой W_m со следующими структурными уравнениями:

а) (14,15) - расслоение касательных линейных реперов $L_{m^2}(W_m)$, типовой слой– линейная группа L_{m^2}=GL(m)$\subset$G, действующая неэффективно в (m-1)-мерном проективном пространстве направлений касательного подпространства P_m;

б) (14,17) – расслоение нормальных линейных реперов $L_{(n-m)^2}(W_m)$, типовой слой – линейная фактор-группа $L_{(n-m)^2}$=GL(n-m), действующая неэффективно в фактор-пространстве P_n/P_m, являющимся (n-m-1)-мерным проективным пространством;

в) (14-16) – расслоение центропроективных реперов $C_{m(m+1)}(W_m)$, типовой слой – центропроективная (коаффинная) группа $C_{m(m+1)}$=GA*(m):$L_{m^2}\subset$GA*(m)$\subset$G, действующая в касательном подпространстве P_m;

г) (14,15,17,18) – расслоение $H(W_m)$, ассоциированное с соответствующим подмногообразием V_m дифференцируемого многообразия V_n [4], типовой слой –(m^2-mn+n^2)-членная подгруппа стационарности H$\subset$G подпространства T_m в пространстве T_n.

Групповая связность в главном расслоении $G(W_m)$со структурными уравнениями (14-19) задается по Лаптеву с помощью форм

$$\Omega^i_j=\omega^i_j-\Pi^i_{jk}\omega^k,\ \Omega_i=\omega_i-\Pi_{ij}\omega^j,\ \Omega^a_b=\omega^a_b-\Pi^a_{bi}\omega^i,$$
$$\Omega^i_a=\omega^i_a-\Pi^i_{aj}\omega^j,\ \Omega_a=\omega_a-\Pi_{ai}\omega^i, \qquad (20)$$

причем компоненты объекта связности П={$\Pi^i_{jk},\Pi_{ij},\Pi^a_{bi},\Pi^i_{aj},\Pi_{ai}$} удовлетворяют сравнениям:

$$\nabla\Pi^i_{jk}+\theta^i_{jk}\equiv 0,\ \nabla\Pi_{ij}+\Pi^k_{ij}\omega_k+\theta_{ij}\equiv 0,\ \nabla\Pi^a_{bi}+\theta^a_{bi}\equiv 0,$$
$$\nabla\Pi^i_{aj}-\Pi^i_{kj}\omega^k_a+\Pi^b_{aj}\omega^i_b+\omega^i_{aj}\equiv 0,\ \nabla\Pi_{ai}+\Pi^j_{ai}\omega_j+\Pi^b_{ai}\omega_b-\Pi_{ji}\omega^j_a+\omega_{ai}\equiv 0. \qquad (21)$$

Объект групповой связности П содержит четыре подобъекта, задающие связности в указанных подрасслоениях: объекты касательной и нормальной линейных связностей Π^i_{jk} и Π^a_{bi}, объект коаффинной (центропроективной) связности {Π^i_{jk},Π_{ij}} и подобъект групповой связности {$\Pi^i_{jk},\Pi^a_{bi},\Pi^i_{aj}$} для ассоциированного подрасслоения $H(W_m)$.

Определение 4. Групповую связность ассоциированного расслоения $G(W_m)$ назовем G-связностью, а связность подрасслоениия $H(W_m)$ – H-связностью.

Замечания. 2) Объект П можно получить из объекта Г, ограничивая сравнения (5) на подмногообразие W_m, расписывая их подробно для существенных на W_m компонент $\Gamma^i_{jk},\Gamma_{ij},\Gamma^a_{bi},\Gamma^i_{aj},\Gamma_{ai}$ и Γ^a_{ij},производя отождествление $\Gamma^a_{ij}=\Lambda^a_{ij}$ и переобозначая коренную букву остальных компонент с Г на П.

3) Расслоение, ассоциированное с m-поверхностью X_m проективного n-пространства, рассматриваемой как многообразие касательных плоскостей, есть частный случай расслоения $G(W_m)$, а G-связность – непосредственное обобщение связности в расслоении, ассоциированном с поверхностью X_m[5].

6. Классические оснащения. Распространим классические оснащения поверхности X_m проективного n-пространства на подмногообразие $W_m \subset W_n$.

Определение 5. Оснащением Картана [6] подмногообразия W_m назовем присоединение к каждой его точке плоскости C_{n-m-1}:$P_m \oplus C_{n-m-1} = P_n$..

Плоскость C_{n-m-1} зададим точками $C_a = A_a + \lambda^i_a A_i + \lambda_a A$. Применим к ним оператор ∇:

$$\nabla C_a \equiv \omega C_a + (\nabla\lambda^i_a + \omega^i_a)A_i + (\nabla\lambda_a + \lambda^i_a\omega_i + \omega_a)A,$$

откуда получим уравнения

$$\nabla\lambda^i_a + \omega^i_a = \lambda^i_{aj}\omega^j, \tag{22}$$

$$\nabla\lambda_a + \lambda^i_a\omega_i + \omega_a = \lambda_{ai}\omega^i. \tag{23}$$

Продолжая их, найдем

$$\nabla\lambda^i_{aj} - \lambda^i_b\theta^b_{aj} + \lambda^k_a\theta^i_{kj} + \omega^i_{aj} \equiv 0, \tag{24}$$

$$\nabla\lambda_{ai} - \lambda_b\theta^b_{ai} + \lambda^j_a\theta_{ji} + \lambda^j_{ai}\omega_j + \omega_{ai} \equiv 0. \tag{25}$$

Определение 6. Нормализацией Нордена [7] подмногообразия W_m назовем поле двух плоскостей на нем, а именно, нормали 1-го рода N_{n-m}: $P_m \cap N_{n-m} = A$, $P_m + N_{n-m} = P_n$ и нормали 2-го рода N_{m-1}:$A \not\in N_{m-1} \subset P_m$. Поле нормалей 1-го(2-го) рода называется нормализацией 1-го(2-го) рода.

Подобъект λ^i_a оснащающего по Картану квазитензора $\{\lambda^i_a, \lambda_a\}$ задает нормаль 1-го рода $N_{n-m} = [A, A_a + \lambda^i_a A_i]$. Плоскость N_{m-1} определим точками $N_i = A_i + \lambda_i A$. Применим к ним оператор ∇: $\nabla N_i \equiv \omega N_i + (\nabla\lambda_i + \omega_i)A$, откуда

$$\nabla\lambda_i + \omega_i = \lambda_{ij}\omega^j. \tag{26}$$

Продолжая эти уравнения, найдем

$$\nabla\lambda_{ij} - \lambda_k\theta^k_{ij} + \theta_{ij} \equiv 0. \tag{27}$$

Òåîðåìà 3. Íîðìàëèçàöèÿ 1-ãî ðîäà ïîäìíîãîîáðàçèÿ W_m ñâîäèò Í-ñâÿçíîñòü ê êàñàòåëüíîé è íîðìàëüíîé ëèíåéíûì ñâÿçíîñòÿì.

Äîêàçàòåëüñòâî äàåòñÿ ôîðìóëîé

$$\Pi^i_{aj} = \lambda^i_{aj} + \lambda^i_b\Pi^b_{aj} - \lambda^k_a\Pi^i_{kj}, \tag{28}$$

ïðîâåðÿåìîé ñ ïîìîùüþ ñèñòåìû (21,22,24).

Òåîðåìà 4. Íîðìàëèçàöèÿ 2-ãî ðîäà ïîäìíîãîîáðàçèÿ W_m ñâîäèò êîìôîðìíóþ ñâÿçíîñòü ê êàñàòåëüíîé ëèíåéíîé ñâÿçíîñòè.

Äîêàçàòåëüñòâî ñëåäóåò èç ôîðìóëû

$$\Pi_{ij} = \lambda_{ij} + \lambda_k\Pi^k_{ij}, \tag{29}$$

ïðîâåðÿåìîé ñ ïîìîùüþ ñèñòåìû (21,26,27).

Òåîðåìà 5. Îñíàùåíèå Êàðòàíà ïîäìíîãîîáðàçèÿ W_m ñâîäèò G-ñâÿçíîñòü ê êîìôîðìíîé è íîðìàëüíîé ëèíåéíой ñâÿçíîñòÿì.

Äîêàçàòåëüñòâî âûòåêàåò èç ôîðìóëû (28) è ñëåäóþùåé

$$\Pi_{ai} = \lambda_{ai} + \lambda_b \Pi^b_{ai} - \lambda^j_a \Pi_{ji}, \tag{30}$$

проверяемой с помощью соотношений (21-23,25,28).

Следствие (Т.4,Т.5). Композиционное оснащение [8] подмногообразия W_m (оснащение Картана и нормализация 2-го рода) сводит G-связность к касательной и нормальной линейным связностям.

Определение 7. Если G-связность порождена по формулам (28-30) двумя линейными связностями с помощью композиционного оснащения, задаваемого полем квазитензора $\lambda=\{\lambda^i_a, \lambda_a, \lambda_i\}$, то назовем ее композиционной G-связностью или CG-связностью.

Вводя в уравнения (22,23,26) формы G-связности (20), получим $\Delta\lambda^i_a = \lambda^i_{a|j}\omega^j, \Delta\lambda_a = \lambda_{a|i}\omega^i, \Delta\lambda_i = \lambda_{i|j}\omega^j$, где ковариантные дифференциалы и ковариантные производные компонент композиционно оснащающего квазитензора λ относительно G-связности имеют вид:

$$\Delta\lambda^i_a = d\lambda^i_a - \lambda^i_b\Omega^b_a + \lambda^j_a\Omega^i_j + \Omega^i_a,\ \Delta\lambda_a = d\lambda_a - \lambda_b\Omega^b_a + \lambda^i_a\Omega_i + \Omega_a,$$

$$\Delta\lambda_i = d\lambda_i - \lambda_j\Omega^j_i + \Omega_i;\ \lambda^i_{a|j} = \lambda^i_{aj} + \lambda^i_b\Pi^b_{aj} - \lambda^k_a\Pi^i_{kj} - \Pi^i_{aj},$$

$$\lambda_{a|i} = \lambda_{ai} + \lambda_b\Pi^b_{ai} - \lambda^j_a\Pi_{ji} - \Pi_{ai},\ \lambda_{i|j} = \lambda_{ij} + \lambda_k\Pi^k_{ij} - \Pi_{ij}.$$

Равенства $\lambda^i_{a|j} = 0,\ \lambda_{a|i} = 0,\ \lambda_{i|j} = 0$ дают формулы (28-30).

Теорема 6. Поле композиционно оснащающего квазитензора λ абсолютно параллельно в композиционной G-связности. Иначе говоря, плоскость Картана C_{n-m-1} и нормаль 2-го рода N_{m-1}, соответствующие любой точке $A\in W_m$, переносятся параллельно относительно CG-связности вдоль произвольной кривой подмногообразия W_m,проходящей через точку A.

Замечания. 4) Нормализация подмногообразия W_m сводит H-связность и коаффинную связность к линейным подсвязностям, но всю G-связность свести с ее помощью к подсвязностям не удаеться. Это позволяет сделать лишь более сильное композиционное оснащение. Нормализация Нордена поверхности X_m дает возможность не только свести соответствующую связность к линейным подсвязностям, но и задать последние [5,9,10].

5) На поверхности X_m компоненты композиционно оснащающего квазитензора λ удовлетворяют тем же уравнениям (22,23,26), их продолжения (24,25,27) имеют более простой вид, формулы (28-30) сохраняются [9,10]. Ковариантный дифференциал и ковариантные производные квазитензора λ имеют тот же вид, поэтому вдоль линии подмногообразия W_m можно осуществлять разнообразные параллельные перенесения [9,11,12].

7. Линейные связности как отображения. Нормаль 2-го рода N_{m-1} натянута на точки N_i, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$\nabla N_i = \omega N_i + \omega^j N_{ij} \quad (N_{ij}=B_{ij}+\lambda_{ij}A+\lambda_i A_j) \tag{31}$$

Точки N_{ij} удовлетворяют сравнениям $\nabla N_{ij} \equiv \omega N_{ij} + \omega_j N_i + \theta^k_{ij} N_k$ и определяют вместе с точками N_i продолженную нормаль 2-го рода $N(m)=[N_{ij},N_i]$ подмногообразия W_m: $N_{m-1}\subset N(m)$, $A\notin N(m)\subset X$, $DimN(m)=m^2+m-1$, $dimN(m)=\frac{m}{2}(m+3)-1$.

Введем в уравнения (31) формы касательной линейной связности Ω^j_i:

$$dN_i=\omega N_i+\Omega^j_i N_j+\omega^j C_{ij}, \tag{32}$$

где $C_{ij}=N_{ij}+\Pi^k_{ij} N_k$. Точки C_{ij} удовлетворяют сравнениям $\nabla C_{ij}\equiv\omega C_{ij}+\omega_j N_i$. Возьмем точки $E_{ij}=C_{ij}+\lambda_j N_i$ ($\nabla E_{ij}\equiv\omega E_{ij}$).Они задают плоскость $E(m)=[E_{ij}]$–порожденное касательной линейной связностью дополнение нормали 2-го рода N_{m-1} до продолженной нормали $N(m)$: $N_{m-1}\oplus E(m)=N(m)$,$DimE(m)=m^2-1$, $dimE(m)=\frac{m}{2}(m+1)-1$. Уравнения (32) запишем в виде:

$$dN_i=(\omega-\lambda_j\omega^j)N_i+\Omega^j_i N_j+\omega^j E_{ij}.$$

Теорема 7. Касательная линейная связность эквивалентна заданию поля дополнений $E(m)$ нормалей 2-го рода N_{m-1} и характеризуется внутри прдолженной нормали $N(m)$ с помощью центральной проекции

$$\Pi^i_{jk}: N_{m-1}+dN_{m-1} \xrightarrow{E(m)} N_{m-1}.$$

Плоскость Картана C_{n-m-1} натянута на точки C_a, которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla C_a=\omega C_a+\omega^i C_{ai}, \tag{33}$$

где $C_{ai}=A_{ai}+\lambda^j_{ai} A_j+\lambda^j_a B_{ji}+\lambda_{ai}A+\lambda_a A_i$. Эти точки удовлетворяют сравнениям $\nabla C_{ai}\equiv\omega C_{ai}+\omega_i C_a+\theta^b_{ai} C_b$, т.е. определяется продолженная плоскость Картана $C=[C_{ai},C_a]$: $C_{n-m-1}\subset C\subset Y$, $DimC=dimC=(m+1)(n-m)-1$.

Введем формы нормальной линейной связности Ω^b_a в уравнения (33):

$$dC_a=\omega C_a+\Omega^b_a C_b+\omega^i B_{ai}, \tag{34}$$

где $B_{ai}=C_{ai}+\Pi^b_{ai} C_b$ ($\nabla B_{ai}\equiv\omega B_{ai}+\omega_i C_a$). Возьмем точки $K_{ai}=B_{ai}+\lambda_i C_a$ ($\nabla K_{ai}\equiv\omega K_{ai}$), задающие порожденное нормальной связностью дополнение плоскости Картана C_{n-m-1} до ее продолжения C– пространство $K=[K_{ai}]$:$C_{n-m-1}\oplus K=C$,$DimK=dimK=m(n-m)-1$. Уравнения (34) запишем в виде:

$$dC_a=(\omega-\lambda_i\omega^i)C_a+\Omega^b_a C_b+\omega^i K_{ai}.$$

Теорема 8. Нормальная линейная связность эквивалентна заданию поля дополнений K плоскостей Картана и характеризуется внутри продолженной плоскости Картана C центральной проекцией

$$\Pi^a_{bi}: C_{n-m-1}+dC_{n-m-1} \xrightarrow{K} C_{n-m-1}.$$

Замечание. 6)Плоскости $E(m)$ и K, характеризующие касательную и нормальную связности, сами определяются с помощью объектов Π^i_{jk} и Π^a_{bi} соответственно. Значит, для окончательной интерпретации линейных связностей объекты Π^i_{jk} u Π^a_{bi} нужно охватить внутренним образом или с помощью других оснащений.

8. Новые оснащения. Рассмотрим точки $F_{ij}=B_{ij}+\mu^k_{ij}A_k+\mu_{ij}A$. Применим оператор ∇:

$$\nabla F_{ij}\equiv\omega F_{ij}+(\nabla\mu^k_{ij}+\delta^k_i\omega_j+\delta^k_j\omega_i+\theta^k_{ij})A_k+(\nabla\mu_{ij}+\mu^k_{ij}\omega_k+\theta_{ij})A.$$

Если выполняются сравнения

$$\nabla\mu^k_{ij}+\delta^k_i\omega_j+\delta^k_j\omega_i+\theta^k_{ij}\equiv 0, \tag{35}$$

$$\nabla\mu_{ij}+\mu^k_{ij}\omega_k+\theta_{ij}\equiv 0, \tag{36}$$

то задано дополнение касательного подпространства P_m до соприкасающегося подпространства $P(m)$ - плоскость $F=[F_{ij}]$: $P_m\oplus F=P(m)$, $DimF=m^2-1$, $dimF=\frac{m}{2}(m+1)-1$.

Теорема 9. F-оснащение полунормализованного подмногообразия W^0_m эквивалентно заданию коаффинной связности.

Доказательство следует из формул

$$\Pi^k_{ij}=\mu^k_{ij}-\delta^k_i\lambda_j-\delta^k_j\lambda_i,\ \Pi_{ij}=\mu_{ij}-\lambda_i\lambda_j, \tag{37}$$

проверяемых с помощью соотношений (21,26,35,36).

F-оснащение подмногообразия W_m задается полем объекта $\{\mu^k_{ij},\mu_{ij}\}$, содержащим подобъект μ^k_{ij}, который определяет дополнение нормали 2-го рода N_{m-1} до соприкасающегося подпостранства P(m) – плоскость $\mathsf{F}=[F_{ij},A]$: $N_{m-1}\oplus\mathsf{F}=P(m)$, $Dim\,\mathsf{F}=m^2$, $dim\,\mathsf{F}=\frac{m}{2}(m+1)$.

Следствие (Т.9). F -оснащение полунормализованного подмногообразия W^0_m эквивалентно заданию касательной линейной связности.

Возьмем точки $L_{ai}=A_{ai}+\mu^b_{ai}A_b$ и применим оператор ∇:

$$\nabla L_{ai}\equiv\omega L_{ai}+\omega^j_a B_{ji}+(\delta^j_i\omega_a+\omega^j_{ai}+\mu^b_{ai}\omega^j_b)A_j+(\nabla\mu^b_{ai}+\delta^b_a\omega_i+\theta^b_{ai})A_b+(\mu^b_{ai}\omega_b+\omega_{ai})A.$$

Если справедливы сравнения

$$\nabla\mu^b_{ai}+\delta^b_a\omega_i+\theta^b_{ai}\equiv 0, \tag{38}$$

то определяется плоскость $L=[L_{ai}, B_{ij}, A_i, A]$:

$$P(m)\subset L\subset Y,\ DimL=m(n+1),\ dimL=\frac{m}{2}(2n-m+3).$$

Теорема 10. L-оснащение полунормализованного подмногообразия W^0_m индуцирует нормальную линейную связность.

Доказательство вытекает из формулы

$$\Pi^b_{ai}=\mu^b_{ai}-\delta^b_a\lambda_i, \tag{39}$$

проверяемой с помощью соотношений (21,26,38).

Теорема 11. Подпространства E(m) u F совпадают тогда и только тогда, когда коаффинная связность полунормализованного подмногообразия W^0_m

èíäóöèðîâàíà F-îñíàùåíèåì è ñâåäåíà ê êàñàòåëüíîé ëèíåéíîé ñâÿçíîñòè ñ ïîìîùüþ ïðîäîëæåíèÿ íîðìàëèçàöèè 2-ãî ðîäà.

Äîêàçàòåëüñòâî. Ðàâåíñòâî ïîäïðîñòðàíñòâ E(m)=F âîçìîæíî ëèøü â ñëó÷àå âûïîëíåíèÿ ðàâåíñòâ $E_{ij}=F_{ij}$, èç êîòîðûõ ñëåäóåò

$$\mu^k_{ij}=\Pi^k_{ij}+\delta^k_i\lambda_j+\delta^k_j\lambda_i,\ \mu_{ij}=\lambda_{ij}+\lambda_i\lambda_j+\Pi^k_{ij}\lambda_k.$$

Ýòî ôîðìóëû (37) ïðè óñëîâèÿõ (29).

Òåîðåìà 12. Ïîäïðîñòðàíñòâî Ê ëåæèò â ïðîñòðàíñòâå L òîãäà è òîëüêî òîãäà, êîãäà íîðìàëüíàÿ ñâÿçíîñòü èíäóöèðîâàíà L-îñíàùåíèåì ïîëóíîðìàëèçîâàííîãî ïîäìíîãîîáðàçèÿ W^0_m.

Äîêàçàòåëüñòâî. Ðàçëîæåíèÿ òî÷åê K_{ai} ïðåîáðàçóåì ê âèäó:

$$K_{ai}=L_{ai}+\lambda^j_{ai}A_j+\lambda^j_aB_{ji}+\lambda_{ai}A+\lambda_aA_i+(\Pi^b_{ai}+\delta^b_a\lambda_i-\mu^b_{ai})A_b+(\Pi^b_{ai}+\delta^b_a\lambda_i)(\lambda^j_bA_j+\lambda_bA).$$

Òî÷êè K_{ai} ðàçëàãàþòñÿ ïî áàçèñíûì òî÷êàì ïðîñòðàíñòâà L ëèøü ïðè óñëîâèÿõ (39). Òîãäà Ê$\subset$L.

Библиографический список

1. *Шевченко Ю.И.* Связности голономных и неголономных дифференцируемых многообразий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1994. Вып.25.С. 110-121.

2. *Шевченко Ю.И.* Связности голономных и неголономных центропроективных многообразий // Там же, 1996. Вып.27. С.122-135.

3. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии. М.,1979. Т.9. 248с.

4. *Шевченко Ю.И.* Оснащение подмногообразий голономного и неголономного дифференцируемых многообразий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1995. Вып.26.С. 113-126.

5. *Шевченко Ю.И.* Об оснащениях многомерной поверхности проективного пространства // Там же, 1977. Вып.8. С.135-150.

6. *Картан Э.* Пространства проективной связности // Тр.семин. по вект. и тенз. анализу. М.;Л.,1937. Вып.4. С.160-173.

7. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М.,1976. 432с.

8. *Шевченко Ю.И.* Структура оснащения многообразия линейных фигур // Тез.докл. VI Прибалт. геом. конф. Таллин,1984. С.137-138.

9. *Шевченко Ю.И.* Параллельный перенос фигуры в линейной комбинации связности // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1987. Вып.18.С. 115-120.

10. *Шевченко Ю.И.* Об основной задаче проективно-дифференциальной геометрии поверхности // Там же, 1989. Вып.20. С.122-128.

11. *Шевченко Ю.И.* Геометрическая характеристика некоторых индуцированных связностей поверхности // Там же, 1981. Вып.12. С.126-130.

12. *Полякова К.В.* Параллельные перенесения направлений вдоль поверхности проективного пространства // Там же, 1996. Вып.27. С.63-70.

Yu. I. S h e v c h e n k o

EQUIPMENTS OF SUBMANIFOLDS OF HOLONOMIC AND NONHOLONOMIC CENTROPROJECTIVE MANIFOLDS

A centroprojective manifold is understood as the result of a projectivisation of a differentiable manifold, by which tangent linear spaces of all orders turn into centroprojective spaces of the same dimensions. In this case differ holonomic and nonholonomic centroprojective manifolds, obtained from the corresponding differentiable manifolds and differing by dimensions of tangent spaces of higher than the first order.

A submanifold of the centroprojective manifold and a principal fibering associated with it is considered. The fibering contains, in particular, subfibering of tangent and normal linear frames. Using Laptev′s method a group-connection is given in the associated fibering, including tangent and normal linear connections. Cartan′s equipment and Norden′s normalization of a surface of a projective space are spreading on the submanifold.

It is proved, that a composition equipment (i.e. Cartan′s equipment and Norden′s second genus normalization) of a submanifold reduces group connection, called in this case composite, to tangent and normal connections. It is shown, that Cartan′s plane and a normal of the second genus are absolutely parallel in the composition connection. Linear connections are characterized geometrically with the help of central projections of Cartan′s planes and normals of the second genus. New equipments are introduced, and explained their role and mutual relations.

УДК 514.75

ВВЕДЕНИЕ АФФИННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ НА ГИПЕРПОЛОСНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

С.Н. Юрьева

(*Калининградский государственный университет*)

Работа является продолжением исследований теории регулярных гиперполосных распределений аффинного пространства [1], [2], которые названы нами Н-распределениями [2]. Вводятся обобщённые связности Γ и $\hat{\Gamma}$ соответственно на оснащающем Н-распределении (§1) и базисном М-распределении (§2), индуцированные соответственно полями инвариантных нормалей 1-го рода Н-распределения и М-распределения. Приведены охваты объектов кривизны и кручения связностей Γ и $\hat{\Gamma}$. С помощью тензоров деформаций $\{\gamma^{\sigma}_{\rho K}\}$, $\{\hat{\gamma}^{i}_{jK}\}$,