некоторой локальной системе координат можно всегда привести к виду

$$X^i_j = x^i p_j - x^j p_i \quad (i<j), \tag{4}$$

$$X_i = \frac{1}{2} k x^i x^j p_j + \left(1 - \frac{1}{4} k\alpha\right) p_i, \tag{5}$$

где $\alpha = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2$, $\quad p_\ell = \frac{\partial}{\partial x^\ell}$, $k \in R$.

Общее решение системы (3) для операторов вращений (4) определяется равенствами

$$g_{ij} = a\delta_{ij} + x^i x^j A + (x^i u^j + x^j u^i) B + u^i u^j C, \tag{6}$$

где a, A, B, C -функции от переменных $\alpha, \bar\beta, \bar\gamma$, причем $\bar\beta = x^1 u^1 + x^2 u^2 + \ldots + x^n u^n$, $\bar\gamma = (u^1)^2 + (u^2)^2 + \ldots + (u^n)^2$. Обратимся теперь к операторам (5) и рассмотрим уравнения $\mathcal{D}_{\bar X_\ell} g_{ij} = 0$,где $\bar X_\ell$ -естественное продолжение оператора X_ℓ на переменные $\bar u\,(u^j)$. Из этих уравнений следует,что $A = 0$, $B = 0$,а функции a, C определяются формулами $a = \frac{c_1}{(1+\frac{1}{4}k\alpha)^2}$, $C = \frac{c_2}{\bar\gamma(1+\frac{1}{4}k\alpha)^2}$,где c_1, c_2 -постоянные. Общее решение рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (3) относительно операторов (4),(5) для составляющих $g_{ij}(x,\bar u)$ выражается формулой

$$g_{ij}(x,\bar u) = a\Phi_{ij} + b\,\Phi^{-1}\Phi_{\cdot i}\Phi_{\cdot j} \quad (a, b \in R,\ a + 2b \neq 0,\ a \neq 0) \tag{7}$$

или,что то же самое , только в другом виде

$$g_{ij}(x,\bar u) = A\,(c_1\delta_{ij} + c_2\bar\gamma^{-1} u^i u^j), \tag{8}$$

$$A = \left(1 + \frac{1}{4}k\alpha\right)^{-2}, \quad \Phi(x,\bar u) = A\bar\gamma, \quad 2a = c_1, \quad 4b = c_2.$$

2.Будем рассматривать также метрические пространства гиперплоскостных элементов $g_{n,\underline{u}}$,для которых ассоциированное пространство $H_{n,\underline{u}}$ с метрической функцией $H(x,\underline{u}) = g^{j\ell}(x,\underline{u}) u_j u_\ell$, $\underline{u}\,(u_j)$ является гамильтоновым,т.е. $\det \| H^{\cdot j \cdot \ell} \| \neq 0$, $H^{\cdot j \cdot \ell} = \frac{\partial^2 H}{\partial u_j \partial u_\ell}$, $H(x, \lambda\underline{u}) = \lambda^2 H(x,\underline{u})$.

В настоящей работе предполагается,что пространство $H_{n,\underline{u}}$ определенно положительной метрики.Метрика рассматриваемых пространств $g_{n,\underline{u}}$ в общем случае непотенциальна.Для метрических пространств гиперплоскостных элементов $g_{n,\underline{u}}$,задаваемых невырожденным симметрическим тензором $g^{ij}(x,\underline{u})$ типа (2,0), рассуждения,аналогичные предыдущим для операторов (4),(5),приводят к формуле

$$g^{j\ell}(x,\underline{u}) = cK^{\cdot j \cdot \ell} + dK^{-1}K^{\cdot j}K^{\cdot \ell}, \quad c, d \in R, \tag{9}$$

или,что то же самое,но в другом виде

$$g^{ij}(x,\underline{u}) = 2B\,[c\delta^{ij} + 2d\underline{\gamma}^{-1} u_i u_j], \tag{10}$$

$$B = \left(1 + \frac{k}{4}\alpha\right)^2, \quad \underline{\gamma} = (u_1)^2 + (u_2)^2 + \ldots + (u_n)^2,$$

$$c \neq 0, \quad c + 2d \neq 0, \quad K = B\,[(u_1)^2 + (u_2)^2 + \ldots + (u_n)^2].$$

Таким образом,мы приходим к следующему выводу.

Т е о р е м а . Максимальный порядок групп движений G_r в метрических пространствах $g_{n,\bar u}$, $g_{n,\underline{u}}$ равен точно $\frac{n(n+1)}{2}$. Метрический тензор любого максимально подвижного пространства линейных,гиперплоскостных элементов $g_{n,\bar u}$, $g_{n,\underline{u}}$ с ассоциированной положительно определенной метрикой за счет выбора локальной системы приводятся соответственно к виду (8),(10).Пространства $g_{n,\bar u}$, $g_{n,\bar u}$ допускают группу движений G_r $(r = \frac{n(n+1)}{2})$ максимального порядка тогда,когда метрические тензоры $g_{ij}(x,\bar u)$, $g^{ij}(x,\underline{u})$ имеют соответственно строения (7),(9) в любой системе координат.

Библиографический список

1.Е г о р о в И.П.,Егоров А.И. О некоторых проблемах автоморфизмов в обобщенных пространствах//Движения в обобщённых пространствах. Рязань,1982.С.41-52.

УДК 514.75

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ КОНГРУЭНЦИЙ ПАРАБОЛ В ЭКВИАФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Л.А.Ж а р и к о в а
(Калининградское ВИУИВ)

В трехмерном эквиаффинном пространстве изучается подкласс $\pi(\ell)$ конгруэнции π парабол [1], для которого характеристическая точка плоскости параболы находится на диаметре параболы,проходящем через фокальную точку многообразия $\pi(\ell)$.

Отнесем конгруэнцию π к каноническому реперу $\mathcal{R} = \{A, \vec e_1, \vec e_2, \vec e_3\}$ [1], где точка A помещается в фокус,образующий неразвертывающуюся фокальную поверхность с неасимптотическими фокальными линиями.Вектор $\vec e_1$ направлен по касательной к параболе в точке A , $\vec e_2$ - по касательной к линии,сопряженной фокальной линии $\omega^2 = 0$ на поверхности (A) , $\vec e_3$ -по диаметру параболы,проходящему через точку A .Относительно этого репера уравнение параболы и система уравнений Пфаффа конгруэнции имеют вид:

$$(x^1)^2 - 2px^3 = 0, \quad x^2 = 0 \quad (p \neq 0); \tag{1}$$

$$
\begin{cases}
\omega_1^1 = -\frac{1}{8}\{(3a+c)\omega^1 + (3b+e)\omega^2\}, \quad \omega_1^2 = f\omega^1 + g\omega^2, \\
\omega_1^3 = \omega^1, \quad \omega_2^1 = (f-b)\omega^1 - (g-c)\omega^2, \\
\omega_2^2 = \frac{1}{8}\{(a+3c)\omega^1 + (b+3e)\omega^2\}, \quad \omega_2^3 = -\omega^2, \quad \omega^3 = 0, \\
\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0, \quad d\ln p = p_1\omega^1 + p_2\omega^2, \\
\omega_3^1 = h\omega^1 + k\omega^2, \qquad \omega_3^2 = r\omega^1 + s\omega^2.
\end{cases}
\tag{2}
$$

Т е о р е м а. Справедливы следующие утверждения: I) конгруэнции $\pi(\ell)$ существуют и определяются с произволом четырех функций двух аргументов; 2) характеристическая точка M плоскости параболы совпадает с одним из фокусов конгруэнции диаметров парабол; 3) индикатриса вектора аффинной нормали является поверхностью с касательной плоскостью, коллинеарной касательной плоскости поверхности (A); 4) диаметр параболы и касательная к ней сопряжены относительно квадрики Ли поверхности (A); 5) торсы прямолинейных конгруэнций $\{A,\vec{e}_1\}$ и $\{A,\vec{e}_2\}$ соответствуют и высекают на поверхности (A) координатные линии; 6) если существует расслоение от прямолинейной конгруэнции $\{A,\vec{e}_i\}$ к конгруэнции плоскостей $\{A,\vec{e}_j,\vec{e}_3\}$, $i \neq j$, $i,j = 1,2$, то существует расслоение от прямолинейной конгруэнции $\{A,\vec{e}_3\}$ к конгруэнции плоскостей $\{A,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $\vec{M} = \vec{A} + x^3\vec{e}_3$ – характеристическая точка плоскости параболы, тогда $x^3 = -\frac{1}{s}$, $r = 0$. Учитывая равенство нулю коэффициента r в системе (2) и находя ее чистое замыкание, получим, что конгруэнции $\pi(\ell)$ существуют и определяются с произволом четырех функций двух аргументов.

2) Найдем фокусы конгруэнции диаметров парабол из уравнения $sk\lambda^2 + (s+k)\lambda + 1 = 0$. Имеем $\lambda_1 = -\frac{1}{s}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{k}$. Следовательно, $\vec{F}_1 = \vec{A} - \frac{1}{s}\vec{e}_3$, $\vec{F}_2 = \vec{A} - \frac{1}{k}\vec{e}_3$ и точка F_1 совпадает с точкой M.

3) Так как направляющий вектор аффинной нормали поверхности (A) имеет вид $\vec{e} = \vec{e}_3 + \frac{1}{4}\{(c-a)\vec{e}_1 + (b-e)\vec{e}_2\}$, то

$$
d\vec{e} = (\omega_3^3 + \tfrac{1}{4}(c-a)\omega_1^3 + \tfrac{1}{4}(b-e)\omega_2^3)\vec{e}_3 + (\dots)\vec{e}_1 + (\dots)\vec{e}_2 .
$$

Чтобы касательная плоскость индикатрисы вектора $\vec{e}$ совпадала с касательной плоскостью поверхности (A), необходимо и достаточно выполнение равенства $\omega_3^3 + \frac{1}{4}(c-a)\omega_1^3 + \frac{1}{4}(b-e)\omega_2^3 = 0$. Подставляя выражения ω_3^3, ω_1^3, ω_2^3 из (2), убеждаемся в справедливости утверждения.

4) В уравнении квадрики Ли поверхности (A)

$$
(x^1)^2 - (x^2)^2 + \lambda(x^3)^2 + \frac{a-c}{4}x^1x^3 + \frac{b-e}{4}x^2x^3 - 2x^3 = 0
$$

отсутствуют координаты x^1 и x^2, следовательно, векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ сопряжены относительно квадрики Ли.

5) Торсы прямолинейных конгруэнций $\{A,\vec{e}_1\}$ и $\{A,\vec{e}_2\}$ для конгруэнции $\pi(\ell)$ определяются уравнением $\omega^1\omega^2 = 0$, что и доказывает справедливость утверждения 5.

6) Найдем условия существования расслоения от конгруэнции $\{A,\vec{e}_i\}$ к конгруэнции $\{A,\vec{e}_j,\vec{e}_3\}$ и от прямолинейной конгруэнции $\{A,\vec{e}_3\}$ к конгруэнции плоскостей $\{A,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$, получим:

$$
b = f, \quad k - fc = 0, \quad g = 0, \quad fc = 0; \tag{3}
$$

$$
k = 0 . \tag{4}
$$

Справедливость утверждения очевидна, т.к. из формул (3) следует равенство (4).

О п р е д е л е н и е I. Конгруэнцией $C(\ell)$ называется конгруэнция ассоциированных параболических цилиндров с образующей, параллельной вектору $\vec{e}_2$ и с направляющей параболой конгруэнции $\pi(\ell)$.

О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнцией $\overset{*3}{\pi}_4(\ell)$ называется конгруэнция $\pi(\ell)$ при условии, что точка A является четырехкратной фокальной точкой конгруэнций $\pi(\ell)$, $C(\ell)$ и фокальной точкой третьего порядка конгруэнции $\pi(\ell)$.

Конгруэнция $\overset{*3}{\pi}_4(\ell)$ определяется условиями $p = 1$, $a = b = f = g = h = r = s = k = 0$. Подставляя эти значения в систему (2) и находя ее чистое замыкание, получим, что конгруэнции $\overset{*3}{\pi}_4(\ell)$ существуют и определяются с произволом двух функций одного аргумента.

З.С.Малаховским аналитически был выделен класс $\overset{*3}{\pi}_4(\ell)$ и найдены его некоторые геометрические свойства [1]. Теперь можно утверждать, что, если точка A является одновременно фокальной точкой третьего порядка конгруэнции $\pi(\ell)$ и четырехкратной фокальной точкой конгруэнций $\pi(\ell)$ и $C(\ell)$, то многообразие $\pi(\ell)$, являющееся в этом случае конгруэнцией $\overset{*3}{\pi}_4(\ell)$, обладает следующими свойствами: 1) все диаметры парабол образуют связку параллельных прямых; 2) точка A – пятикратная фокальная точка конгруэнции $\pi(\ell)$; 3) линии $\omega^1 = 0$ и $\omega^2 = 0$ поверхности (A) являются линиями тени, причем $\omega^2 = 0$ – плоская; 4) фокальная поверхность (A) является аффинной поверхностью переноса; 5) если линии $\omega^1 = 0$ – плоские, то $c = 0$ и аффинные нормали $\vec{e} = \vec{e}_3 - \frac{1}{4}e\vec{e}_2$ принадлежат плоскости $\{A,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$. Вдоль фокальной линии поверхности (A) $\omega^2 = 0$ единственный отличный от нуля инвариант является константой. Если и он обращается в нуль, то фокальная поверхность (A) становится поверхностью второго порядка, а диаметры парабол, проходящие через точки касания их с фокальной поверхностью, являются аффинными нормалями этой поверхности;б) существует расслоение от конгруэнции парабол к конгруэнции $\{A, \bar{e}_2\}$.

Библиографический список

1.М а л а х о в с к и й В.С. Конгруэнции парабол в эквиаффинной геометрии//Геометр.сб./Томский ун-т.Томск.1962.Т.161.С.76-86.

2.В е р б и ц к а я Л.А. Об одном классе конгруэнций парабол// Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч. тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1980.Вып.11.С.17-21.

3.Ж а р и к о в а Л.А. Конгруэнция парабол с фокальными многообразиями высших порядков//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч. тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1986.Вып.16. С.30-33.

УДК 514.75

ПОЛНАЯ СИСТЕМА ИНВАРИАНТОВ ДИАДЫ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПСЕВДОРИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.Г. И в а н о в
(Могилевский педагогический институт)

Методом Г.Ф.Лаптева [1] в работе автора [2] было дано тензорное описание ортонормированной пары векторных полей (диады) в пространстве (-времени) ${}^1V_4$. Продолжая изучение диады,мы строим в этой статье ее полную систему инвариантов первой дифференциальной окрестности в 4-мерном псевдоримановом пространстве ${}^mV_4$ ($0 \leq m \leq 4$) произвольной сигнатуры.

1.Уравнения инфинитезимальных смещений подвижного репера $(M, \bar{e}_i)$ ($i, j, \ldots\ldots \in \overline{1,4}$) локального касательного пространства ${}^mR_4(M)$ точки $M \in {}^mV_4$ имеют вид: $d\bar{M} = \omega^i \bar{e}_i$, $d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j$. Формы ω^i и ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры $D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i$, $D\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j + R^j_{ik\ell}\, \omega^k \wedge \omega^\ell$, где $R^j_{ik\ell}$ -тензор кривизны пространства ${}^mV_4$,и равенствам $\varepsilon_i \omega_i^j + \varepsilon_j \omega_j^i = 0$, вытекающим из условий ортонормированности векторов $\bar{e}_i$ ($\bar{e}_i^2 \equiv \varepsilon_i = \pm 1$).

Дифференциальные уравнения диады $\{\bar{e}_3, \bar{e}_4\}$ ($\alpha, \beta \in \overline{1,2}$) пространства ${}^mV_4$ имеют вид [2]:

$$\omega_\alpha^3 = \gamma^3_{\alpha i}\omega^i, \quad \omega_\alpha^4 = \gamma^4_{\alpha i}\omega^i, \quad \omega_4^3 = \gamma^3_{4i}\omega^i; \qquad (1)$$

$$\begin{cases} (d\gamma^3_{\alpha i} - \gamma^3_{\beta i}\omega_\alpha^\beta - \gamma^3_{\alpha j}\omega_i^j + \gamma^4_{\alpha i}\gamma^3_{4j}\omega^j + R^3_{\alpha ij}\omega^j) \wedge \omega^i = 0, \\ (d\gamma^4_{\alpha i} - \gamma^4_{\beta i}\omega_\alpha^\beta - \gamma^4_{\alpha j}\omega_i^j + \gamma^3_{\alpha i}\gamma^4_{3j}\omega^j + R^4_{\alpha ij}\omega^j) \wedge \omega^i = 0, \\ (d\gamma^3_{4i} - \gamma^3_{4j}\omega_i^j - \gamma^3_{\alpha i}\gamma^\alpha_{4j}\omega^j + R^3_{4ij}\omega^j) \wedge \omega^i = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Система величин

$$(\gamma^3_{\alpha\beta}, \gamma^4_{\alpha\beta}, \gamma^3_{\alpha 3}, \gamma^3_{\alpha 4}, \gamma^4_{\alpha 4}, \gamma^4_{\alpha 3}, \gamma^3_{4\alpha}, \gamma^3_{43}, \gamma^3_{44}) \qquad (3)$$

образует геометрический объект - фундаментальный объект первого порядка диады $\{\bar{e}_3, \bar{e}_4\}$. Это тензор,из которого выделяются перечисленные в (3) подтензоры.Их геометрическое и кинематическое истолкование также дано в работе [2].

2.Построим следующие скалярные величины:

$$\begin{cases} J_1 = \varepsilon_1\gamma^3_{11} + \varepsilon_2\gamma^3_{22}, \quad J_2 = (\gamma^3_{11})^2 + (\gamma^3_{22})^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2(\gamma^3_{(12)})^2, \\ J_3 = \gamma^3_{11}\gamma^4_{11} + \gamma^3_{22}\gamma^4_{22} + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\gamma^4_{(12)}\gamma^3_{(12)}, \quad J_4 = \gamma^3_{[12]}, \\ J_5 = \varepsilon_1\gamma^4_{11} + \varepsilon_2\gamma^4_{22}, \quad J_6 = (\gamma^4_{11})^2 + (\gamma^4_{22})^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2(\gamma^4_{(12)})^2, \\ J_7 = \gamma^4_{[12]}, \quad J_8 = \varepsilon_1(\gamma^3_{13})^2 + \varepsilon_2(\gamma^3_{23})^2, \quad J_9 = \gamma^4_{11}(\gamma^3_{13})^2 + \\ + \gamma^4_{22}(\gamma^3_{23})^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\gamma^4_{(12)}\gamma^3_{13}\gamma^3_{23}, \quad J_{10} = \varepsilon_1(\gamma^3_{14})^2 + \varepsilon_2(\gamma^3_{24})^2, \\ J_{11} = \gamma^4_{11}(\gamma^3_{14})^2 + \gamma^4_{22}(\gamma^3_{24})^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\gamma^4_{(12)}\gamma^3_{14}\gamma^3_{24}, \\ J_{12} = \varepsilon_1(\gamma^4_{14})^2 + \varepsilon_2(\gamma^4_{24})^2, \quad J_{13} = \gamma^4_{11}(\gamma^4_{14})^2 + \gamma^4_{22}(\gamma^4_{24})^2 + \\ + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\gamma^4_{(12)}\gamma^4_{14}\gamma^4_{24}, \quad J_{14} = \varepsilon_1(\gamma^4_{13})^2 + \varepsilon_2(\gamma^4_{23})^2, \\ J_{15} = \gamma^4_{11}(\gamma^4_{13})^2 + \gamma^4_{22}(\gamma^4_{23})^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\gamma^4_{(12)}\gamma^4_{13}\gamma^4_{23}, \\ J_{16} = \varepsilon_1(\gamma^3_{41})^2 + \varepsilon_2(\gamma^3_{42})^2, \quad J_{17} = \gamma^4_{11}(\gamma^3_{41})^2 + \gamma^4_{22}(\gamma^3_{42})^2 + \\ + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\gamma^4_{(12)}\gamma^3_{41}\gamma^3_{42}, \quad J_{18} = \gamma^3_{43}, \quad J_{19} = \gamma^3_{44}. \end{cases} \qquad (4)$$

Т е о р е м а. Система величин (4) образует полную систему инвариантов первой дифференциальной окрестности диады $\{\bar{e}_3, \bar{e}_4\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Инвариантность (в смысле Г.Ф.Лаптева) величин (4) сводится к простой проверке условий $dJ_1 = dJ_2 = \ldots = dJ_{19} = 0$ при нулевых главных формах (1) и учете квадратичных уравнений (2). Поскольку число построенных инвариантов в точности равно разности между количеством различных в общем случае величин (4) и числом вторичных параметров (=1),то остается лишь убедиться в функциональной независимости системы (4). При условии