УДК 514.76

А.Я. Султанов[1], Г.А. Султанова[2], Н.В. Садовников[3]
[1] Пензенский государственный университет, Пенза
[2, 3] Пензенский филиал Военной академии материально-технического обеспечения им. генерала армии А.В. Хрулева Министерства обороны РФ, Пенза
[1] sultanovaya@rambler.ru, [2] sultgaliya@yandex.ru, [3] sadovnikovnv@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2021-52-13

О максимальной размерности алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательных расслоений с синектической связностью А.П. Широкова

В настоящей работе получена точная оценка сверху размерностей алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований в касательных расслоениях первого порядка, снабженных синектическими связностями А.П. Широкова.

Ключевые слова: дифференцируемое многообразие, касательное расслоение, синектическая связность, инфинитезимальное аффинное преобразование, алгебра Ли.

Теория касательных расслоений над дифференцируемым многообразием M принадлежит области геометрии и топологии многообразий и является интенсивно развивающимся направлением теории расслоенных пространств. Основы теории расслоенных пространств были заложены в работах С. Эресмана, А. Вейля, А. Моримото, Ш. Сасаки, К. Яно, С. Ишихара. Среди отечественных ученых касательные расслоения исследовали А.П. Широков, В.В. Вишневский, В.В. Шурыгин, Б.Н. Шапуков и их ученики.

Поступила в редакцию 28.06.2021 г.

При исследовании автоморфизмов обобщенных пространств важное значение имеет вопрос об инфинитезимальных преобразованиях связностей в этих пространствах. Движениями в различных пространствах занимались К. Яно, Г. Вранчану, П. А. Широков, И. П. Егоров, А. З. Петров, А. В. Аминова и др. Движениям и автоморфизмам касательных расслоений посвящены работы К. Сато и Ш. Танно. Инфинитезимальные аффинные коллинеации в касательных расслоениях с синектической связностью были предметом исследований Х. Шадыева.

В настоящее время вопрос о движениях расслоенных пространств рассматривается в работах А. Я. Султанова, исследующего инфинитезимальные преобразования расслоения линейных реперов со связностью полного лифта, алгебры Ли голоморфных аффинных векторных полей в произвольных расслоениях Вейля.

1. Основные определения и факты

Касательное расслоение первого порядка представляет собой расслоение А. Вейля над гладким класса C^∞ многообразием *M*, возникающим при помощи алгебры $A = R(\varepsilon)$ дуальных чисел со стандартным базисом $(\varepsilon^0, \varepsilon^1)$. Из определения базисных элементов следует, что они перемножаются по следующему правилу: $\varepsilon^\alpha \cdot \varepsilon^\beta = \varepsilon^{\alpha+\beta}$, причем $\varepsilon^\gamma = 0$ при $\gamma \geq 2$. Обозначим через A^* векторное пространство линейных форм над полем действительных чисел *R*, заданных на *A* и принимающих значения в *R*.

Пусть $C^\infty(M)$ — вещественная алгебра гладких класса C^∞ функций, заданных на *M* и принимающих значения в *R*. Обозначим через $T_q M$ множество всевозможных гомоморфизмов $t_q : C^\infty(M) \to A$, где $q \in M$, удовлетворяющих условию $t_q(f) \equiv f(q)(\mathrm{mod}\, I)$, где I — идеал алгебры A, порожденный элементом ε^1. Множество $TM = \bigcup\limits_{q \in M} T_q M$ можно естественным образом наделить структурой гладкого многообразия над алгеброй A и гладкой структурой над R [1]. Отображение $\pi : TM \to M$, определенное условием $\pi(t_q) = q$, называется канонической проекцией, а тройка (TM, π, M) — расслоением А. Вейля, в нашем случае — касательным расслоением первого порядка.

Для каждой функции $f \in C^\infty(M)$ можно построить ее естественный лифт $f_{(1)}$, называемый ее полным лифтом, с базы M в его касательное расслоение TM следующим образом: $f_{(1)} = (\partial_j f)_{(0)} x_1^j$. Функции $f_{(0)}$ и $f_{(1)}$ позволяют определить на TM функцию f^A со значениями в A формулой $f^A = f_\alpha \varepsilon^\alpha$ $(\alpha = 0,1)$. Функция f^A называется естественным продолжением функции f из M в TM. Композицию $a^* \circ f^A$ обозначим через $f_{(a^*)}$. Если $a^* = a^\alpha \varepsilon_\alpha$, то $f_{(a^*)} = a^\alpha f_{(\varepsilon_\alpha)}$, причем $f_{(\varepsilon_0)} = f_{(0)}, f_{(\varepsilon_1)} = f_{(1)}$.

Пусть $a \in A$ — произвольный фиксированный элемент алгебры A, X — произвольное гладкое векторное поле на M. На касательном расслоении TM существует единственное векторное поле $X^{(a)}$, удовлетворяющее условию

$$X^{(a)} f_{(b^*)} = (Xf)_{(a^* \cdot b)}$$

для любой функции $f \in C^\infty(M)$. В этом равенстве $a^* \cdot b \in A^*$ определяется по правилу $a^* \cdot b(c) = a^*(bc)$. Для векторного поля X можно построить его естественное продолжение X^A на

TM. Оно задается условием $X^A f^A = (Xf)^A$ для любой функции $f \in C^\infty(M)$. Векторное поле $\tilde{X}$ на *A* называется голоморфным тогда и только тогда, когда $\tilde{X} = \varepsilon^\alpha X^A_\alpha$ $(\alpha = 0, 1)$.

Линейная связность $\tilde{\nabla}$, заданная на *TM*, называется голоморфной, если векторное поле $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}$ является голоморфным для любых голоморфных векторных полей $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$, заданных на *TM*. А. П. Широковым доказано, что любая голоморфная связность $\tilde{\nabla}$ на касательном расслоении первого порядка может быть представлена в виде $\tilde{\nabla} = \nabla^A + \varepsilon \cdot \Gamma^A_1$, где $\nabla = \Gamma_0$ — линейная связность, а Γ_1 — тензорное поле типа (1,2) на *M* [1]. Вещественную реализацию ∇^{Sh} голоморфной связности $\tilde{\nabla}$ будем называть синектической связностью А. П. Широкова.

Имеет место тождество

$$\nabla^{Sh}_{X^{(a)}} Y^{(b)} = (\Gamma_\alpha(X, Y))^{(\varepsilon^\alpha ab)}.$$

Известно, что линейная связность ∇^{Sh} без кручения, заданная на *TM* при условии $\dim A \geq 2$ и $\dim M \geq 2$ с отличным от нуля тензорным полем кривизны R^{Sh}, имеет отличное от нуля тензорное поле Г. Вейля проективной кривизны W^{Sh} [3]. На основании теоремы И. П. Егорова о максимальной размерности алгебры Ли аффинных векторных полей заключаем, что размерность алгебры Ли аффинных векторных полей связности ∇^{Sh} на касательном расслоении *TM*, где $\dim M \geq 2$, не больше, чем $(2n)^2 - 2(2n) + 5 = (2n-1)^2 + 4$ [2]. Покажем точность этой оценки. Для этого рассмотрим касательное расслоение R^A_n $(n \geq 2)$, снабженное связностью А. П. Широкова ∇^{Sh} $\Gamma^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} = \varepsilon_\sigma(\varepsilon^\nu \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta \varepsilon^\mu)\left(\Gamma^i_{\nu jk}\right)_{(\mu)}$, причем $\Gamma^i_{\nu jk} = 0$ для всех $\nu = 0, 1$, а $\Gamma^1_{123} = \Gamma^1_{132} = x^2, \Gamma^{i_1}_{\nu j_1 k_1} = 0$ в остальных случаях. Тогда

$\Gamma^{001}_{231} = x_0^2, \Gamma^{001}_{321} = x_0^2$, а остальные коэффициенты $\Gamma^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} = 0$. Вычислив компоненты тензорного поля кривизны $R^{\alpha\beta\gamma i}_{jkl\sigma}$, получим, что $R^{0001}_{2231} = 1, R^{0001}_{2321} = -1$, все другие компоненты тензорного поля R^{Sh} равны 0. Так как $R^{Sh} \neq 0$, то $W^{Sh} \neq 0$. Во множестве мультииндексов $\begin{pmatrix} i \\ \alpha \end{pmatrix}$, где $i \in \{1, 2, ..., n\}, \alpha \in \{0,1\}$, введем отношение линейного порядка следующими условиями:

(а) если $i < j$, то $\begin{pmatrix} i \\ \alpha \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} j \\ \beta \end{pmatrix}$ для любых $\alpha, \beta \in \{0,1\}$;

(б) если $i = j$, то $\begin{pmatrix} i \\ \alpha \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} i \\ \beta \end{pmatrix}$ для всех α, β, удовлетворяющих условию $\alpha < \beta$.

Тогда рассматриваемый случай будет представлять пример, приведенный И.П. Егоровым для доказательства точности $d^2 - 2d + 5$ алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства R^d с линейной связностью ∇ с компонентами $\Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = x^2$, другие $\Gamma^i_{jk} = 0$ [2].

Таким образом, доказана

Теорема. *Максимальная размерность алгебры Ли аффинных векторных полей касательных расслоений первого порядка гладкого многообразия, снабженного синектической связностью А.П. Широкова, равна точно* $(2n-1)^2 + 4$.

Список литературы

1. *Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В.* Пространства над алгебрами : учеб. пособие. Казань, 1985.

2. *Егоров И.П.* Движения в пространствах аффинной связности // Учен. записки Пенз. пед. ин-та им. В.Г. Белинского. Казань, 1965. С. 5—179.

3. *Султанов А.Я.* О вещественной реализации голоморфной линейной связности над алгеброй // ДГМФ. Калининград, 2007. Вып. 38. С. 136—139.

A. Ya. Sultanov[1]*, G. A. Sultanova*[2]*, N. V. Sadovnikov*[2]

[1] *Penza State University*

[2] *Federal State-Owned Logistic Military Educational Institution named after general A. V. Khrulov of the Ministry of Defence of the Russian Federation, Penza*

[1] sultanovaya@rambler.ru, [2] sultgaliya@yandex.ru, [3] sadovnikovnv@yandex.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2021-52-13

Affine transformations of the tangent bundle with a complete lift connection over a manifold with a linear connection of special type

Submitted on Juny 28, 2021

The theory of tangent bundles over a differentiable manifold M belongs to the geometry and topology of manifolds and is an intensively developing area of the theory of fiber spaces. The foundations of the theory of fibered spaces were laid in the works of S. Eresman, A. Weil, A. Morimoto, S. Sasaki, K. Yano, S. Ishihara. Among Russian scientists, tangent bundles were investigated by A.P. Shirokov, V.V. Vishnevsky, V.V. Shurygin, B.N. Shapukov and their students.

In the study of automorphisms of generalized spaces, the question of infinitesimal transformations of connections in these spaces is of great importance. K. Yano, G. Vrancianu, P.A. Shirokov, I.P. Egorov, A.Z. Petrov, A.V. Aminova and others have studied movements in different spaces. The works of K. Sato and S. Tanno are devoted to the motions and automorphisms of tangent bundles. Infinitesimal affine collineations in tangent bundles with a synectic connection were considered by H. Shadyev.

At present, the question of the motions of fibered spaces is considered in the works of A. Ya. Sultanov, in which infinitesimal transformations of a bundle of linear frames with a complete lift connection, the Lie algebra

of holomorphic affine vector fields in arbitrary Weyl bundles are investigated. In this paper we obtain exact upper bounds for the dimensions of Lie algebras of infinitesimal affine transformations in tangent bundles with a synectic connection A. P. Shyrokov.

Keywords: differentiable manifold, tangent bundle, synectic connection, infinitesimal affine transformation, Lie algebra.

References

1. *Vishnevskiy, V. V., Shirokov A. P., Shurygin V. V.:* Spaces over algebras. Kazan' (1984).

2. *Egorov, I. P.:* Movements in spaces of affine connectivity. *Scientific Notes Penza Ped. Univ*. Kazan'. 5—179 (1965).

3. *Sultanov, A. Ya.:* On the real realization of a holomorphic path connection over an algebra. *DGMF*. Kaliningrad. **38**, 136—139 (2007).