ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.10 1979

УДК 513.73

В. Б. Лазарева

ТРИ-ТКАНИ НА ДВУМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ТРИАКСИАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть V_2 -поверхность в трехмерном проективном пространстве P_3 и ℓ_i ($i=1,2,3$) - три прямые общего положения в P_3. Определим локально квазигруппу $q: \ell_1 \times \ell_2 \to \ell_3$ следующим образом: если $A_i \in \ell_i$, то плоскость $\sigma=[A_1A_2A_3]$ касается V_2. Цель настоящей работы- изучение свойств квазигруппы q и связанных с ней три-тканей.

I. Трехмерное проективное пространство P_3 с заданными в нем тремя неподвижными прямыми ℓ_i назовем триаксиальным пространством. Рассмотрим в этом пространстве совокупность реперов, три точки A_i которых лежат соответственно на прямых ℓ_i, а плоскость $[A_1A_2A_3]$ не содержит ни одной из прямых ℓ_i. Инфинитезимальное перемещение репера определяется уравнениями

$$dA_\xi = \omega^\eta_\xi A_\eta \quad (\xi,\eta=0,1,2,3). \tag{1}$$

Формы ω^η_ξ удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega^\eta_\xi = \omega^\zeta_\xi \wedge \omega^\eta_\zeta. \tag{2}$$

За счет нормировки координат точек A_ξ получим

$$\sum_{\xi=0}^{3} \omega^\xi_\xi = 0. \tag{3}$$

Так как точка A_i описывает прямую ℓ_i, то следует положить

$$\omega^j_i = \lambda^j_i \omega^0_i. \tag{4}$$

Тогда

$$dA_i = \omega^i_i A_i + \omega^0_i B_i, \quad B_i = A_0 + \lambda^j_i A_j + \lambda^k_i A_k. \tag{5}$$

Условия неподвижности прямых ℓ_i имеют вид

$$d\lambda^i_j - \lambda^i_j \omega^0_0 - (\lambda^i_j)^2 \omega^0_i + \lambda^i_j \omega^i_i - \omega^i_0 - \lambda^k_j (\lambda^i_j - \lambda^i_k)\omega^0_k = 0, \tag{6}$$

где индексы i, j, k, все различны.

Зафиксируем точки A_i на прямых ℓ_i, т.е. положим $\omega^0_i = 0$. Тогда из уравнений (6) получим $\delta\lambda^i_j - \lambda^i_j \pi^0_0 + \lambda^i_j \pi^i_i + \pi^i_0 = 0$, откуда

$$\delta(\lambda^i_j - \lambda^i_k) = (\lambda^i_j - \lambda^i_k)(\pi^0_0 - \pi^i_i), \tag{7}$$

где $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$ - четная подстановка. Из уравнений (7) видно, что величины $\lambda^i = \frac{1}{2}(\lambda^i_j - \lambda^i_k)$ являются относительными инвариантами. Можно показать, что обращение величины λ^i в нуль имеет следующий геометрический смысл:

а) $\lambda^1 = 0$, $\lambda^2\lambda^3 \neq 0$, тогда прямые ℓ_2 и ℓ_3 лежат в одной плоскости σ_1, определяемой точками A_2, A_3, $A_0 + \lambda^1_2 A_1$;

б) $\lambda^3 \neq 0$, $\lambda^1 = \lambda^2 = 0$, тогда ℓ_3 есть линия пересечения плоскостей, в которых лежат ℓ_1 и ℓ_2;

в) $\lambda^1 = \lambda^2 = \lambda^3 = 0$, тогда прямые ℓ_i проходят через одну точку.

Далее будем предполагать, что ни один из инвариантов λ^i не обращается в нуль.

2. Прямые ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 определяют в P_3 невырожденную квадрику Q, для которой они служат прямолинейными образующими, принадлежащими одному семейству. Нетрудно подсчитать, что полюс A'_0 плоскости $[A_1A_2A_3]$ относительно Q имеет вид

$$A'_0 = A_0 + \tfrac{1}{2}(\lambda^1_2 + \lambda^1_3)A_1 + \tfrac{1}{2}(\lambda^2_1 + \lambda^2_3)A_2 + \tfrac{1}{2}(\lambda^3_1 + \lambda^3_2)A_3. \tag{8}$$

Поместим вершину A_0 репера в полюс плоскости $[A_1A_2A_3]$. Тогда $\lambda^i_j + \lambda^i_k = 0$ и из соотношений $2\lambda^j = \lambda^j_i - \lambda^j_k$ следует, что

$$\lambda^1_2 = -\lambda^1_3 = \lambda^1, \ \lambda^2_3 = -\lambda^2_1 = \lambda^2, \ \lambda^3_1 = -\lambda^3_2 = \lambda^3. \tag{9}$$

Уравнения (4) и (6) теперь примут вид

$$\left.\begin{array}{c}\omega_1^2=-\lambda^2\omega_1^0,\ \omega_1^3=\lambda^3\omega_1^0,\ \omega_2^1=\lambda^1\omega_2^0,\ \omega_2^3=-\lambda^3\omega_2^0,\\ \omega_3^1=-\lambda^1\omega_3^0,\ \omega_3^2=\lambda^2\omega_3^0,\end{array}\right\} \tag{10}$$

$$\omega_0^i=\lambda^i(\lambda^i\omega_i^0-\lambda^j\omega_j^0-\lambda^k\omega_k^0),\ d\lambda^i=\lambda^i(\omega_0^0-\omega_i^i+\lambda^j\omega_j^0-\lambda^k\omega_k^0), \tag{11}$$

где $\begin{pmatrix}1&2&3\\ i&j&k\end{pmatrix}$ - четная подстановка.

3. Пусть $q: \ell_1\times\ell_2\to\ell_3$ –локальная дифференцируемая квазигруппа [1], задающая точечное соответствие на прямых ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 и V_2 -огибающая семейства плоскостей $\sigma=[A_1A_2A_3]$, $A_i\in\ell_i$. Плоскости, проходящие через фиксированную точку M одной из прямых, например ℓ_1, образуют однопараметрическое семейство σ и касаются V_2 вдоль некоторой кривой. Меняя точку M на ℓ_1, получим однопараметрическое семейство кривых S_1 на V_2. Аналогично получим два других однопараметрических семейства кривых - S_2 и S_3. Таким образом, на V_2 возникает три-ткань $\mathfrak{M}$.

Пусть M -точка касания огибающей V_2 и плоскости $[A_1A_2A_3]$. Положим $M=x^iA_i$, тогда

$$dM=dx^iA_i+x^i(\omega_i^0A_0+\omega_i^jA_j)=(dx^i+x^j\omega_j^i)A_i+x^i\omega_i^0A_0.$$

Так как $dM\subset[A_1A_2A_3]$, то

$$x^i\omega_i^0=0. \tag{12}$$

Нормируем точку M условием $M=A_1+A_2+A_3$, тогда уравнение (12) примет вид

$$\omega_1^0+\omega_2^0+\omega_3^0=0. \tag{13}$$

Уравнение (13) представляет собой дифференциальное уравнение локальной квазигруппы q и три-ткани $\mathfrak{M}$ на поверхности V_2 [2]. Семейство кривых S_i на V_2 определяется уравнением $\omega_i^0=0$, причем эти формы попарно линейно независимы.

4. Дифференцируя уравнение (13), получим

$$\sum_{i=1}^{3}\widetilde{\omega}^i\wedge\omega_i^0=0, \tag{14}$$

где

$$\widetilde{\omega}^i=\omega_1^i+\omega_2^i+\omega_3^i,\ i=1,2,3 \tag{15}$$

Из уравнений (14) в силу (13) следует, что формы $\widetilde{\omega}^i-\widetilde{\omega}^j$ -главные. Следовательно, при фиксированных главных параметрах (т.е. при $\omega_i^0=0$) имеем $\widetilde{\pi}^i=\widetilde{\pi}^j$, а в силу (15) $\widetilde{\pi}^i=\pi_i^i$. Положим $\widetilde{\pi}^i=\pi$, тогда $\widetilde{\pi}^i-\pi=0$ и форма $\widetilde{\omega}^i-\omega$ -главная, т.е.

$$\widetilde{\omega}^i=\omega+a^i\omega_k^0+b^i\omega_j^0. \tag{16}$$

Подставляя $\widetilde{\omega}^i$ в (14), получим

$$a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3. \tag{17}$$

Положим в соотношениях (16) $\widetilde{\omega}=\omega+\sum_{i=1}^{3}\xi_i\omega_i^0$. Тогда за счет ξ_i и (17) разности a^i-b^i можно привести к нулю. Введем обозначения $\alpha_i=a^i=b^i$. При этом формулы (16) упростятся:

$$\widetilde{\omega}^i=\omega-\alpha_i\omega_i^0,\ i=1,2,3 \tag{18}$$

5. Вычислим второй дифференциал точки M поверхности V_2. Учитывая (15) и (18), получим

$$d^2M=\sum_k[d\widetilde{\omega}^k+\sum_i\widetilde{\omega}^i\omega_i^k]A_k-\sum_i\alpha_i(\omega_i^0)^2A_0.$$

Квадратичная форма $\varphi=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i(\omega_i^0)^2$ есть асимптотическая форма поверхности V_2. Если формы $\overline{\omega}_i^0$ и ω_i^0 определяют на V_2 сопряженные направления, то $\alpha_1\overline{\omega}_1^0\omega_1^0+\alpha_2\overline{\omega}_2^0\omega_2^0+\alpha_3\overline{\omega}_3^0\omega_3^0=0$. Направление, сопряженное $\omega_0^i=0$, определяется уравнением

$$\overset{*}{\omega}{}_i^0=\alpha_j\omega_j^0-\alpha_k\omega_k^0=0, \tag{19}$$

где $\begin{pmatrix}1&2&3\\ i&j&k\end{pmatrix}$ - четная подстановка. Эти уравнения определяют ткань $\mathfrak{M}^*$ на поверхности V_2. При фиксированном i линии $\omega_i^0 = 0$ и $^*\omega_i^0 = 0$ образуют на поверхности V_2 сеть Кенигса, осью которой является прямая l_i.

6. Продифференцировав формы ω_i^0, получим $d\omega_i^0 = \omega_i^0 \wedge \gamma$, где

$$\gamma = \omega_0^0 - \omega + (\lambda^3-\lambda^2)\omega_1^0 + (\lambda^1-\lambda^3)\omega_2^0 + (\lambda^2-\lambda^1)\omega_3^0 \qquad (20)$$

- форма связности 2 три-ткани $\mathfrak{M}$. Дифференцируя уравнения (18), найдем

$$d\omega = \Delta\alpha_i \wedge \omega_i^0, \qquad (21)$$

где

$$\Delta\alpha_i = d\alpha_i + \alpha_i(\omega_i^i - \omega - \gamma). \qquad (22)$$

Разрешая уравнения (21), получим

$$\Delta\alpha_i = -\beta_i\omega_i^0 + \beta\,\omega_{i-1}^0 \quad (i, i-1 = 1,2,3). \qquad (23)$$

Заметим, что величины α_i являются относительными инвариантами.

Вычислим кривизну три-ткани $\mathfrak{M}$. Для этого продифференцируем внешним образом форму связности. Имеем:

$$\mathcal{D}\gamma = [-\beta + 2(\lambda^1\alpha_1 + \lambda^2\alpha_2 + \lambda^3\alpha_3)], \qquad (24)$$

где $\Omega = \omega_1^0\wedge\omega_2^0 = \omega_2^0\wedge\omega_3^0 = \omega_3^0\wedge\omega_1^0$ - поверхностный элемент ткани и

$$b = -\beta + 2(\lambda^1\alpha_1+\lambda^2\alpha_2+\lambda^3\alpha_3) \qquad (25)$$

-кривизна три-ткани.

7. Рассмотрим некоторые частные случаи:

а) $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. Из уравнений (22) и (21) следует, что $d\omega=0$, т.е. $\omega = d\varphi$. Уравнения (18) примут вид $\tilde{\omega}^i = d\varphi$. Складывая последние три уравнения (1), получим $dM = d\varphi M$. Следовательно, точка M неподвижна и поверхность V_2 вырождается в точку M, а многообразие касательных плоскостей к V_2 - в связку плоскостей $[A_1A_2A_3]$, проходящих через эту точку.

Из уравнений (23) и $\alpha_i = 0$ получаем, что $b=0$, т.е. ткань, соответствующая рассматриваемой квази-

группе, является шестиугольной. С рассматриваемой квазигруппой связана конфигурация, изображенная на рис.1.

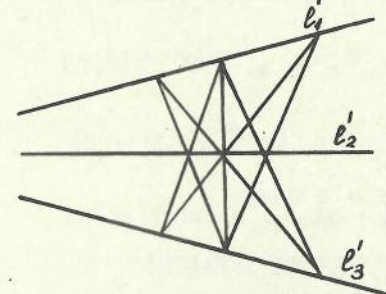

Рис.1

б) $\alpha_1=\alpha_2=0$, $\alpha_3\neq0$. Тогда из уравнений (21) имеем $d\omega=0$ и $\omega=d\varphi$. Складывая последние три уравнения (1) и учитывая (18), получим $dM = d\varphi M - \alpha_3\omega_3^0 A_3$. Отсюда видно, что точка M описывает кривую V_1. Из соотношений $dA_3 = \omega_3^3 A_3 + \omega_3^0 B_3$ и $dB_3 = p_3 A_3 + q_3 B_3$ следует, что кривая V_1 лежит в плоскости, проходящей через l_3. Многообразие касательных плоскостей поверхности V_2 вырождается в многообразие касательных плоскостей к кривой V_1.

в) $\alpha_1=0$, $\alpha_2\neq0$, $\alpha_3\neq0$. В этом случае из (19) получаем, что уравнение $\omega_2^0=0$ эквивалентно $^*\omega_3^0=0$, так что семейства S_2 и S_3 (определяемые уравнениями $\omega_2^0=0$ и $\omega_3^0=0$) образуют сопряженную сеть. Очевидно и обратное: если указанная сеть сопряженная, то $\alpha_1=0$. Итак, имеет место

Теорема. $\alpha_i=0$ тогда и только тогда, когда семейства линий S_j и S_k, $i\neq j$, $i\neq k$ образуют на сопряженную сеть.

Список литературы

1. А к и в и с М.А. Локальные дифференцируемые квазигруппы.- В кн.: Исследование по теории квазигрупп и луп. Кишинев, 1973.

2. Б л я ш к е В. Введение в геометрию тканей. М., 1959.