6. *Омельян О. М.* Внутренняя кривизна 1-го типа на распределении плоскостей // Тр. мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Казань, 2009. Т. 39. С. 313—315.

O. Omelyan

ABOUT INTERNAL CURVATURES OF THE 1ST AND 2ND TYPES ON THE PLANES DISTRIBUTION

In many-dimensional projective space the planes distribution is considered. Internal composite clothing of the planes distribution is made. It is proved, that this clothing induces in the principal fiber bundle internal curvatures of the 1st and 2nd types.

УДК 514.745

К. В. Полякова

(Российский государственный университет им. И. Канта Калининград)

ОБОБЩЕНИЕ ВНЕШНЕГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА С ПОМОЩЬЮ ВИРТУАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрено обобщение внешнего дифференциала и приведены некоторые его свойства.

Ключевые слова: внешние формы, обобщение внешнего дифференциала, скобка векторных полей.

Рассмотрим дифференциальную p-форму

$$\overset{p}{\omega} = a_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \overset{def}{=} a_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1 \dots i_p},$$

где $a_{i_1 \dots i_p} = a_{i_1 \dots i_p}(x^j, x^\xi)$, причем индексы принимают следующие значения:

$$i_1, \dots, i_p, j = \overline{1, n},\ \xi = \overline{n+1, n+s},\ \alpha = \overline{n+s+1, n+s+s_1}.$$

Исходя из отображения $D: \overset{p}{\omega} \in \wedge^{p} T^{*} \ \rightarrow \ D\overset{p}{\omega} \in \wedge^{p+1} T^{*}$, построим отображение D_f, ставящее *p*-форме $\overset{p}{\omega}$ в соответствие *(p+1)*-форму $D_f \overset{p}{\omega}$ по закону

$$D_f \overset{p}{\omega} = D\overset{p}{\omega} + p\frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge \overset{p}{\omega}, \tag{1}$$

где $f = f(x^i, x^\xi, x^\alpha)$. Будем называть функцию *f* виртуальной, а отображение D_f — обобщенным внешним дифференциалом.

Для 1-формы $\omega = a_i dx^i$ справедливо равенство

$$D_f\omega - D\omega = x_{ij} dx^i \wedge dx^j, \ x_{ij} = a_j \partial_i f .$$

С учетом выражения для внешнего дифференциала $D\overset{p}{\omega}$ формула (1) принимает вид:

$$D_f \overset{p}{\omega} = ((\partial_j a_{i_1 \dots i_p} + p a_{i_1 \dots i_p} \partial_j f) dx^j + \partial_\xi a_{i_1 \dots i_p} dx^\xi) \wedge dx^{i_1 \dots i_p},$$

где используется обозначение $\partial_j a = \dfrac{\partial a}{\partial x^j}$.

Рассмотрим свойства отображения D_f:

1⁰. $D_f(\overset{p}{\omega} + \overset{p}{\theta}) = D_f \overset{p}{\omega} + D_f \overset{p}{\theta}$.

2⁰. $D_f g = Dg = dg$, $g = g(x^i, x^\xi)$.

3⁰. $D_f(g\overset{p}{\omega}) = dg \wedge \overset{p}{\omega} + gD_f \overset{p}{\omega}$.

4⁰. $D_f(\overset{p}{\omega} \wedge \overset{q}{\omega}) = (D_f \overset{p}{\omega}) \wedge \overset{q}{\omega} + (-1)^p \overset{p}{\omega} \wedge D_f \overset{q}{\omega}$.

5⁰. Если $\omega = a_\xi dx^\xi$, то $D_f\omega = D\omega = da_\xi \wedge dx^\xi$.

6⁰. Если $\omega = dg$, $g = g(x^i, x^\xi)$, то $D_f\omega = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}\dfrac{\partial g}{\partial x^j} dx^i \wedge dx^j$.

7⁰. Если $\omega = a_i(x^j, x^\xi)dx^i$, то $D_f^2\omega = \omega_{ij} \wedge dx^i \wedge dx^j$.

Доказательства.

1^0. В силу (1) имеем

$$D_f(\overset{p}{\omega}+\overset{p}{\theta}) = D(\overset{p}{\omega}+\overset{p}{\theta}) + p\frac{\partial f}{\partial x^j}dx^j \wedge (\overset{p}{\omega}+\overset{p}{\theta}) =$$

$$= (D\overset{p}{\omega} + p\frac{\partial f}{\partial x^j}dx^j \wedge \overset{p}{\omega}) + (D\overset{p}{\theta} + p\frac{\partial f}{\partial x^j}dx^j \wedge \overset{p}{\theta}) = D_f\overset{p}{\omega} + D_f\overset{p}{\theta}.$$

2^0. Свойство очевидно.

3^0. $D_f(g\overset{p}{\omega}) = D(g\overset{p}{\omega}) + p\frac{\partial f}{\partial x^j}dx^j \wedge (g\overset{p}{\omega}) =$

$$= dg \wedge \overset{p}{\omega} + (gD\overset{p}{\omega} + gp\frac{\partial f}{\partial x^j}dx^j \wedge \overset{p}{\omega}) = dg \wedge \overset{p}{\omega} + gD_f\overset{p}{\omega}.$$

4^0. В силу свойств внешнего дифференциала получаем

$$D_f(\overset{p}{\omega} \wedge \overset{q}{\omega}) = D(\overset{p}{\omega} \wedge \overset{q}{\omega}) + (p+q)\frac{\partial f}{\partial x^j}dx^j \wedge (\overset{p}{\omega} \wedge \overset{q}{\omega}) =$$

$$= D\overset{p}{\omega} \wedge \overset{q}{\omega} + (-1)^p\overset{p}{\omega} \wedge D\overset{q}{\omega} + p\frac{\partial f}{\partial x^j}dx^j \wedge \overset{p}{\omega} \wedge \overset{q}{\omega} + (-1)^p q\frac{\partial f}{\partial x^j}\overset{p}{\omega} \wedge dx^j \wedge \overset{q}{\omega} =$$

$$= (D_f\overset{p}{\omega}) \wedge \overset{q}{\omega} + (-1)^p\overset{p}{\omega} \wedge D_f\overset{q}{\omega}.$$

5^0. Свойство очевидно.

6^0. $D_f\omega = D_f(dg) = D_f\left(\frac{\partial g}{\partial x^i}dx^i + \frac{\partial g}{\partial x^\xi}dx^\xi\right) =$

$$= D_f\left(\frac{\partial g}{\partial x^i}dx^i\right) + D_f\left(\frac{\partial g}{\partial x^\xi}dx^\xi\right) = D\left(\frac{\partial g}{\partial x^i}dx^i\right) + \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i \wedge \frac{\partial g}{\partial x^i}dx^i +$$

$$+ D\left(\frac{\partial g}{\partial x^\xi}dx^\xi\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i \wedge \frac{\partial g}{\partial x^i}dx^i.$$

7^0. $D_f^2\omega = D_f\left(D_f\omega\right) = D_f\left(da_i \wedge dx^i + \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i \wedge \omega\right) =$

$$= D_f(da_i) \wedge dx^i - da_i \wedge D_f(dx^i) + D_f(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i) \wedge \omega -$$

$$- \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge D_f \omega = \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial a_i}{\partial x^k} dx^k + d(\frac{\partial f}{\partial x^i}) a_j \right) dx^i \wedge dx^j =$$

$$= \omega_{ij} \wedge dx^i \wedge dx^j, \text{ где } \omega_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial a_i}{\partial x^k} dx^k + d(\frac{\partial f}{\partial x^i}) a_j .$$

Если $\omega = a_\xi dx^\xi$, то свойство 7^0 записывается следующим образом:

$$D_f^2 \omega = \theta_{ij} \wedge dx^i \wedge dx^j, \ \theta_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial a_\xi}{\partial x^j} dx^\xi .$$

Известно, что для внешнего дифференциала *D*, формы Пфаффа $\omega = a_i(x^j, x^\xi) dx^i$ и векторных полей $X = X^i \partial_i$, $Y = Y^i \partial_i$, где $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, справедлива формула (см., например, [1, с. 36, 43])

$$(D\omega)(X,Y) = \partial_X \omega(Y) - \partial_Y \omega(X) - \omega([X,Y]) .$$

Для обобщенного внешнего дифференциала D_f аналогичная формула имеет вид:

$$(D_f \omega)(X',Y') = \partial_{X'} \omega(Y') - \partial_{Y'} \omega(X') - \omega([X',Y']) -$$
$$- [df(Y'|_{\partial_i}) \omega(X'|_{\partial_i})]_{alt(X',Y')}, \qquad (2)$$

где

$$X' = X^i \partial_i + X^\xi \partial_\xi, \ Y' = Y^j \partial_j + Y^\eta \partial_\eta, \ f = f(x^i, x^\xi, x^\alpha) .$$

Для доказательства предварительно запишем скобку $[X',Y']$ в координатах

$$[X',Y'] = \partial_{X'} Y' - \partial_{Y'} X' =$$
$$= (X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i + X^\xi \partial_\xi Y^i - Y^\xi \partial_\xi X^i) \partial_i +$$
$$+ (X^i \partial_i Y^\xi - Y^i \partial_i X^\xi + X^\eta \partial_\eta Y^\xi - Y^\eta \partial_\eta X^\xi) \partial_\xi .$$

Рассмотрим левую часть формулы (2):

$$(D_f\omega)(X',Y') = (D\omega + \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge \omega)(X',Y') =$$

$$= ((\frac{\partial a_i}{\partial x^j} dx^j + \frac{\partial a_i}{\partial x^\xi} dx^\xi) \wedge dx^i + \frac{\partial f}{\partial x^j} a_i dx^j \wedge dx^i)(X',Y') =$$

$$= ((\frac{\partial a_i}{\partial x^j} + \frac{\partial f}{\partial x^j} a_i) dx^j \wedge dx^i + \frac{\partial a_i}{\partial x^\xi} dx^\xi \wedge dx^i)(X',Y') =$$

$$= (\frac{\partial a_i}{\partial x^j} + \frac{\partial f}{\partial x^j} a_i)\left(dx^j(X')dx^i(Y') - dx^j(Y')dx^i(X')\right) +$$

$$+ \frac{\partial a_i}{\partial x^\xi}\left(dx^\xi(X')dx^i(Y') - dx^\xi(Y')dx^i(X')\right) =$$

$$= (\frac{\partial a_i}{\partial x^j} + \frac{\partial f}{\partial x^j} a_i)\left(X^j Y^i - Y^j X^i\right) + \frac{\partial a_i}{\partial x^\xi}\left(X^\xi Y^i - Y^\xi X^i\right).$$

Рассмотрим правую часть формулы (2):

$$\partial_{X'}\omega(Y') - \partial_{Y'}\omega(X') - \omega([X',Y']) - [df(Y'|_{\partial_i})\omega(X'|_{\partial_i})]_{alt(X',Y')} =$$

$$= \partial_{X'}(a_i Y^i) - \partial_{Y'}(a_i X^i) -$$

$$- a_i\left(X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i + X^\xi \partial_\xi Y^i - Y^\xi \partial_\xi X^i\right) -$$

$$- [\partial_j f dx^j (Y^i \partial_i) a_k dx^k (X^l \partial_l)]_{alt(X',Y')} =$$

$$= X^j \partial_j (a_i Y^i) + X^\xi \partial_\xi (a_i Y^i) - Y^j \partial_j (a_i X^i) - Y^\xi \partial_\xi (a_i X^i) -$$

$$- a_i\left(X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i + X^\xi \partial_\xi Y^i - Y^\xi \partial_\xi X^i\right) -$$

$$- \left(\partial_i f Y^i a_j X^j - \partial_i f X^i a_j Y^j\right) =$$

$$= (\frac{\partial a_i}{\partial x^j} - \frac{\partial a_j}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial x^j} a_i - \frac{\partial f}{\partial x^i} a_j) X^j Y^i + \frac{\partial a_i}{\partial x^\xi}\left(X^\xi Y^i - Y^\xi X^i\right).$$

Получили равные выражения, что доказывает формулу (2).

Приведем более короткое доказательство формулы (2). Поскольку справедливы равенства

$$D_f\omega = D\omega + \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge \omega,$$

$$\omega(X') = a_i dx^i(X^j\partial_j + X^\xi\partial_\xi) = a_i dx^i(X^j\partial_j) + a_i dx^i(X^\xi\partial_\xi) =$$
$$= a_i dx^i(X^j\partial_j) = a_i X^i = \omega(X),$$
$$\omega([X',Y']) = \omega([X,Y]) + a_i(X^\xi\partial_\xi Y^i - Y^\xi\partial_\xi X^i),$$

то

$$(D_f\omega)(X',Y') = (D\omega(X,Y) - a_i(X^\xi\partial_\xi Y^i - Y^\xi\partial_\xi X^i)) +$$
$$+\partial_j f dx^j \wedge \omega(X',Y') = \partial_{X'}\omega(Y') - \partial_{Y'}\omega(X') - \omega([X',Y']) -$$
$$-[df(Y'|_{\partial_i})\omega(XY|_{\partial_i})]_{alt(X',Y')}.$$ Чтд.

Для 2-формы $\overset{2}{\omega}$ и внешнего дифференциала D справедлива формула

$$(D\overset{2}{\omega})(X,Y,Z) = \partial_X\overset{2}{\omega}(Y,Z) - \partial_Y\overset{2}{\omega}(X,Z) + \partial_Z\overset{2}{\omega}(X,Y) -$$
$$-\overset{2}{\omega}([X,Y],Z) + \overset{2}{\omega}([X,Z],Y) - \overset{2}{\omega}([Y,Z],X).$$

В нашем случае для оператора D_f и 2-формы

$$\overset{2}{\omega} = a_{ij}(x^k, x^\xi)dx^i \wedge dx^j$$

имеем

$$(D_f\overset{2}{\omega})(X',Y',Z') = \partial_{X'}\overset{2}{\omega}(Y',Z') - \partial_{Y'}\overset{2}{\omega}(X',Z') + \partial_{Z'}\overset{2}{\omega}(X',Y') -$$
$$-\overset{2}{\omega}([X',Y'],Z') + \overset{2}{\omega}([X',Z'],Y') - \overset{2}{\omega}([Y',Z'],X') +$$
$$+2\left[df(Z'|_{\partial_i})\overset{2}{\omega}(X'|_{\partial_i}, Y'|_{\partial_i})\right]_{alt(X',Y',Z')}.$$

Выражение для дифференциала $D_f\overset{2}{\omega}$ имеет вид

$$D_f\overset{2}{\omega} = D\overset{2}{\omega} + 2\partial_i f dx^i \wedge \overset{2}{\omega}.$$

Следовательно,

$$(D_f\overset{2}{\omega})(X',Y',Z') = D\overset{2}{\omega}(X',Y',Z') - a_{[ij]}(X^\xi\partial_\xi Y^i - Y^\xi\partial_\xi X^i)Z^j +$$
$$+a_{[ij]}(X^\xi\partial_\xi Z^i - Z^\xi\partial_\xi X^i)Y^j + a_{[ij]}(Y^\xi\partial_\xi Z^i - Z^\xi\partial_\xi Y^i)X^j +$$

$$+2\partial_i f dx^i \wedge \overset{2}{\omega}(X',Y',Z') = \partial_{X'} \overset{2}{\omega}(Y',Z') - \partial_{Y'} \overset{2}{\omega}(X',Z') + \partial_{Z'} \overset{2}{\omega}(X',Y') -$$

$$-\overset{2}{\omega}([X',Y'],Z') + \overset{2}{\omega}([X',Z'],Y') - \overset{2}{\omega}([Y',Z'],X') +$$

$$+2\left[df(Z'|_{\partial_i})\overset{2}{\omega}(X'|_{\partial_i}, Y'|_{\partial_i}) \right]_{alt(X',Y',Z')}.\ \text{Чтд.}$$

Список литературы

1. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии / пер. с англ. М., 1981. Т. 1.

K. Polyakova

GENERALIZATION OF EXTERIOR DIFFERENTIAL BY MEANS OF VIRTUAL FUNCTION

Generalization of exterior differential and some its properties are considered.

УДК 514.75

Ю. И. Попов

(Российский государственный университет им. И. Канта, Калининград)

РЕГУЛЯРНЫЕ ГИПЕРПОЛОСЫ ^{P}H$_M$ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Дано задание гиперполосы ^{p}H$_m$ в репере 1-го порядка, и доказана теорема существования. Построен двойственный образ гиперполосы ^{p}H$_m$.

Ключевые слова: гиперполоса, форма, проективное пространство, двойственный образ.