УДК 514.76

***Г. А. Банару*[1]**
[1] Смоленский государственный университет, Россия
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2021-52-2
1

О приближенно келеровых многообразиях и аксиоме квазисасакиевых гиперплоскостей

Показано, что отличные от келеровых приближенно келеровы многообразия, классическим примером которых служит шестимерная сфера, не удовлетворяют аксиоме квазисасакиевых гиперплоскостей.

Ключевые слова*:* почти эрмитово многообразие, приближенно келерово многообразие, почти контактная метрическая структура, аксиома квазисасакиевых гиперплоскостей.

В память о дорогом Вадиме Фёдоровиче
Кириченко (1947—2021)

1. Известно, что почти контактная метрическая структура индуцируется на всякой ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия. Изучением почти контактных метрических гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий занимались такие известные математики, как Д. Блэр, С. Голдберг, С. Ишихара, В. Ф. Кириченко, С. Сасаки, С. Танно, Й. Таширо, Х. Янамото, К. Яно [1].

В настоящей заметке рассматриваются почти контактные метрические гиперповерхности приближенно келеровых многообразий. Отметим, что класс приближенно келеровых многообразий — один из самых важных классов Грея — Хервеллы почти эрмитовых многообразий. Его изучению посвящены

Поступила в редакцию 27.06.2021 г.

сотни работ. Не вдаваясь в подробности этого обширного вопроса, напомним лишь, что только шестимерная сфера S^6 с так называемой канонической приближенно келеровой структурой исследовалась такими геометрами, как Л. Вранкен, А. Грей, Р. Дещч, Ф. Диллен, Н. Ежири, Е. Калаби, В. Ф. Кириченко, Й.-С. Пак, К. Секигава, С. Тачибана, Ш. Фунабаши, Хайжонг Ли, Х. Хашимото [2].

Данная статья продолжает исследования автора, связанные с изучением почти контактных метрических структур на гиперповерхностях приближенно келеровых многообразий (см., например, [3; 4] и др.).

2. Напомним, что почти контактной метрической структурой на ориентируемом многообразии N^{2n-1} нечетной размерности называется система тензорных полей $\{\varPhi, \xi, \eta, g\}$ на этом многообразии, для которой выполняются такие условия:

$$\eta(\xi)=1;\ \varPhi(\xi)=0;\ \eta\circ\varPhi=0;\ \varPhi^2=-id+\xi\otimes\eta;$$

$$\langle\varPhi X,\varPhi Y\rangle=\langle X,Y\rangle-\eta(X)\eta(Y),\ X,Y\in\aleph(N^{2n-1}).$$

Здесь $\varPhi$ — поле тензора типа $(1,1)$, ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика, $\aleph(N^{2n-1})$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N^{2n-1} [5].

Почти контактная метрическая структура $\{\varPhi, \xi, \eta, g\}$ называется квазисасакиевой (quasi-Sasakian, qS-), если ее фундаментальная форма $\varOmega(X,Y)=\langle X,\varPhi Y\rangle$ замкнута и выполняется такое условие:

$$N_{\varPhi}+\frac{1}{2}d\eta\otimes\xi=0,$$

где $N_{\varPhi}$ — тензор Нейенхейса оператора $\varPhi$ [5].

Напоминаем, что почти эрмитово многообразие M^{2n} удовлетворяет аксиоме квазисасакиевых гиперповерхностей, если

qS-гиперповерхность проходит через каждую точку этого многообразия. Данную терминологию сорок лет назад ввел в рассмотрение В. Ф. Кириченко [6].

3. Воспользуемся структурными уравнениями Картана почти контактной метрической структуры на гиперповерхности N^{2n-1} приближенно келерова многообразия M^{2n} [7]:

$$d\,\omega^{\alpha} = \omega^{\alpha}_{\beta} \wedge \omega^{\beta} + B^{\alpha\beta\gamma}\,\omega_{\beta} \wedge \omega_{\gamma} +$$

$$+\ i\sigma^{\alpha}_{\beta}\,\omega^{\beta} \wedge \omega + (-\sqrt{2}\,\tilde{B}^{n\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{B}^{\alpha\beta n} + i\,\sigma^{\alpha\beta})\,\omega_{\beta} \wedge \omega\ ;$$

$$d\,\omega_{\alpha} = -\,\omega^{\beta}_{\alpha} \wedge \omega_{\beta} + B_{\alpha\beta\gamma}\,\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} +$$

$$-\ i\sigma^{\beta}_{\alpha}\,\omega_{\beta} \wedge \omega + (-\sqrt{2}\,\tilde{B}_{n\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{B}_{\alpha\beta n} - i\,\sigma_{\alpha\beta})\,\omega^{\beta} \wedge \omega\ ;$$

$$d\,\omega = \sqrt{2}\,B_{n\alpha\beta}\,\omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} + \sqrt{2}\,B^{n\alpha\beta}\,\omega_{\alpha} \wedge \omega_{\beta} -$$

$$-2i\,\sigma^{\alpha}_{\beta}\,\omega^{\beta} \wedge \omega_{\alpha} + \left(\tilde{B}_{n\beta n} + i\,\sigma_{n\beta}\right)\omega \wedge \omega^{\beta} + \left(\tilde{B}^{n\beta n} - i\,\sigma^{\beta}_{n}\right)\omega \wedge \omega_{\beta}\,.$$

Здесь и далее $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n-1$; $a, b, c = 1, \ldots, n$. Функции $\{B^{abc}\}, \{B_{abc}\}$ и $\{B^{ab}{}_{c}\}, \{B_{ab}{}^{c}\}$ являются компонентами структурных и виртуальных тензоров Кириченко соответственно [8], σ — вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности N^{2n-1} в приближенно келерово многообразие M^{2n}.

Сопоставляя эти уравнения с известными [5] структурными уравнениями квазисасакиевой структуры

$$d\omega^{\alpha} = \omega^{\alpha}_{\beta} \wedge \omega^{\beta} + B^{\alpha}_{\beta}\omega \wedge \omega^{\beta}\,;$$

$$d\omega_{\alpha} = -\omega^{\beta}_{\alpha} \wedge \omega_{\beta} - B^{\beta}_{\alpha}\omega \wedge \omega_{\beta}\,;$$

$$d\omega = 2\,B^{\alpha}_{\beta}\,\omega^{\beta} \wedge \omega_{\alpha}\,,$$

мы приходим к следующему результату:

$$B^{abc} + B^{bca} + B^{cab} = 0.$$

Условие $B^{abc} + B^{bca} + B^{cab} = 0$ является критерием (в терминах тензоров Кириченко) принадлежности приближенно келерова многообразия классу келеровых многообразий [9].

Значит, мы установили, что если qS-гиперповерхность N^{2n-1} проходит через каждую точку приближенно келерова многообразия M^{2n}, то условие $B^{abc} + B^{bca} + B^{cab} = 0$ выполняется в каждой его точке, а следовательно, многообразие является келеровым. Таким образом, имеет место

Теорема. *Всякое приближенно келерово многообразие, удовлетворяющее аксиоме квазисасакиевых гиперповерхностей, является келеровым многообразием.*

Отметим, что при анализе тех или иных аксиом почти контактных метрических гиперповерхностей для различных типов почти эрмитовых многообразий часто возникают трудности с построением контрпримера, то есть примера почти эрмитова многообразия, *не* удовлетворяющего той или иной аксиоме. Поскольку упомянутая в начале нашей заметки каноническая приближенно келерова шестимерная сфера не является келеровым многообразием (более того, многие специалисты считаю сферу S^6 исторически первым примером отличного от келерова почти эрмитова многообразия), то, таким образом, перед нами простой пример многообразия, не удовлетворяющего аксиоме квазисасакиевых гиперповерхностей.

Список литературы

1. *Кириченко В. Ф., Банару М. Б.* Почти контактные метрические структуры на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2014. Т. 127. С. 5—40.

2. *Банару М. Б.* О шестимерной сфере с приближенно кэлеровой структурой // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2018. Т. 146. С. 3—16.

3. *Banaru M., Banaru G.* A note on almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere // Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Ser. III: Mathematics, Informatics, Physics. 2015. Vol. 8 (57), №2. P. 21—28.

4. *Abu-Saleem A., Banaru M.B., Banaru G.A.* A note on 2-hypersurfaces of the nearly Kählerian six-sphere // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. 2017. №3 (85). P. 107—114.

5. *Кириченко В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса, 2013.

6. *Кириченко В.Ф.* Аксиома голоморфных плоскостей в обобщенной эрмитовой геометрии // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260, №4. С. 795—799.

7. *Банару М.Б.* О типовом числе слабо косимплектических гиперповерхностей приближенно келеровых многообразий // Фундаментальная и прикладная математика. 2002. Т. 8, вып. 2. С. 357—364.

8. *Banaru M.* On Kirichenko tensors of nearly-Kählerian manifolds // Journal of Sichuan University of Science and Engineering. 2012. Vol. 25, №4. P. 1—5.

9. *Банару М.Б.* Геометрия 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2014. Т. 126. С. 10—61.

G.A. Banaru[1]
[1] Smolensk State University
4 Przhevalsky St., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2021-52-2

On nearly Kählerian manifolds and quasi-Sasakian hypersurfaces axiom

Submitted on June 27, 2021

It is known that an almost contact metric structure is induced on an arbitrary hypersurface of an almost Hermitian manifold. The case when the almost Hermitian manifold is nearly Kählerian and the almost contact metric structure on its hypersurface is quasi-Sasakian is considered. It is proved that non-Kählerian nearly Kählerian manifolds (in particular, the six-dimensional sphere equipped with the canonical nearly Kählerian structure) do not satisfy to the quasi-Sasakian hypersurfaces axiom.

Keywords: almost Hermitian manifold, nearly Kählerian manifold, almost contact metric structure, quasi-Sasakian hypersurfaces axiom.

References

1. *Banaru, M.B., Kirichenko, V.F.:* Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds. *J. Math. Sci.*, **207**:4, 513—537 (2015).

2. *Banaru, M.B.:* On the six-dimensional sphere with a nearly Kählerian structure. *J. Math. Sci.*, **245**:5, 553—567 (2020).

3. *Banaru, M., Banaru, G.:* A note on almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere. *Bull. of the Transilvania University of Brasov*. Ser. III: Mathematics, Informatics, Physics. **8 (57)**:2, 21—28 (2015).

4. *Abu-Saleem, A., Banaru, M.B., Banaru, G.A.:* A note on 2-hypersurfaces of the nearly Kählerian six-sphere. *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Moldova. Mat.*, **3** (85), 107—114 (2017).

5. *Kirichenko, V.F.:* Differential-geometric structures on manifolds. Odessa: Pechatnyi Dom (2013).

6. *Kirichenko, V.:* The axiom of holomorphic planes in generalized Hermitian geometry. Dokl. Akad. Nauk USSR, **24**, 336—341 (1981).

7. *Banaru, M.B.:* On the type number of nearly-cosymplectic hypersurfaces in nearly Kählerian manifolds. *Fundam. Prikl. Mat.*, **8**:2, 357—364 (2002).

8. *Banaru, M.:* On Kirichenko tensors of nearly-Kählerian manifolds. *J. Sichuan University of Science and Engineering*, **25**:4, 1—5 (2012).

9. *Banaru, M.B.:* Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra. *Math. Sci.*, **207**:3, 354—388 (2015).