by consideration of subclasses of varieties of quadrics with special properties of the associated images. Characteristic and focal varieties of quadrics, being forming elements of subclasses of complexes of central quadrics with variety of the centres degenerating in a surface are vectorially characterized. It is constructed unintegral representation of a special subclass of complexes K_{32}.

УДК 514.76

В.С. Малаховский
(Калининградский государственный университет)

О ГОЛОНОМНОСТИ РАССЛОЕНИЯ РЕПЕРОВ НА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОМ МНОГООБРАЗИИ

На n-мерном дифференцируемом многообразии M_n класса C^∞ исследуется расслоение $H^p(M_n)$ реперов r_x^p порядка p≥2. Установлена голономность расслоений реперов произвольного порядка p, а следовательно, и голономность линейных дифференциальных групп D_n^p (p≥2). Сформулированы принципы корректного применения метода внешних форм и подвижного репера в дифференциальной геометрии и проанализированы принципиальные ошибки некоторых работ, выполненных с нарушением этих принципов.

§1. Голономность линейной дифференциальной группы D_n^2 второго порядка

Рассмотрим n-мерное дифференцируемое многообразие M_n класса C^∞ со структурными базовыми 1-формами ω^i и слоевыми 1-формами θ^α (i, j, k, s=$\overline{1,n}$; $\alpha,\beta,\gamma=\overline{n+1,N}$). Система N пфаффовых форм ω^i, θ^α – линейно независима (см. [2, с. 24]):

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \ldots \wedge \omega^n \wedge \theta^{n+1} \wedge \ldots \wedge \theta^N \neq 0\,, \qquad (1.1)$$

Теорема 1.1. *Если квадратичные формы*

$$\Omega_i = a_{i,jk}\omega^j \wedge \omega^k + b_{i,j\alpha}\omega^j \wedge \theta^\alpha + c_{i,\alpha\beta}\theta^\alpha \wedge \theta^\beta \qquad (1.2)$$

удовлетворяют условию

$$\omega^i \wedge \Omega_i = 0, \qquad (1.3)$$

то

$$\Omega_i = \omega^j \wedge \omega_{ij}, \qquad (1.4)$$

где альтернированные формы Пфаффа

$$\omega_{[ij]} = \frac{1}{2}(\omega_{ij} - \omega_{ji}) \qquad (1.5)$$

являются линейными комбинациями только базовых форм ω^i.

Доказательство. Подставляя (1.2) в (1.3), получим:

$$a_{i,jk}\omega^i \wedge \omega^j \wedge \omega^k + b_{i,j\alpha}\omega^i \wedge \omega^j \wedge \theta^\alpha + c_{i,\alpha\beta}\omega^i \wedge \theta^\alpha \wedge \theta^\beta = 0\,. \qquad (1.6)$$

В силу линейной независимости форм Пфаффа ω^i θ^α альтернированные коэффициенты кубичной внешней формы (1.6) равны нулю:

$$a_{[i,jk]} = 0,\ b_{[i,j],\alpha} = 0,\ c_{i,[\alpha,\beta]} = 0. \qquad (1.7)$$

Учитывая (1.7) в (1.2), приводим квадратичные формы Ω_i к виду:

$$\Omega_i = a_{i,jk}\omega^j \wedge \omega^k + b_{i,j\alpha}\omega^j \wedge \theta^\alpha = \omega^j \wedge \omega_{ij}, \qquad (1.8)$$

где

$$\omega_{ij} = a_{i,jk}\omega^k + b_{i,j\alpha}\theta^\alpha. \qquad (1.9)$$

Из (1.9), (1.7) следует, что

$$\omega_{[ij]} = \frac{1}{2}(a_{i,jk} - a_{j,ik})\omega^k = h_{ij,k}\omega^k, \qquad (1.10)$$

где

$$h_{ij,k} = a_{[i,j]k} = \frac{1}{2}(a_{i,jk} - a_{j,ik}). \qquad (1.11)$$

Из (1.11) следует:

$$h_{ij,k} + h_{ji,k} = 0. \qquad (1.12)$$

Теорема 1.2. *Дифференциальная группа* D_n^2, *порожденная расслоением* $H^2(M_n)$ *реперов* r_x^2 *второго порядка, голономна.*

Доказательство. Дифференцируя внешним образом уравнения структуры

$$d\omega^k = \omega^i \wedge \omega_i^k \qquad (1.13)$$

многообразия M_n, где ω_i^k – слоевые формы первого порядка, т. е. 1-формы расслоения $H^1(M_n)$, находим:

$$\omega^i \wedge (d\,\omega_i^k - \omega_i^j \wedge \omega_j^k) = 0. \qquad (1.14)$$

В силу теоремы (1.1):

$$d\omega_i^k - \omega_i^j \wedge \omega_j^k = \omega^j \wedge \omega_{ij}^k, \qquad (1.15)$$

где

$$\omega_{[ij]}^k = h_{ij,s}^k \omega^s, \qquad (1.16)$$

причем

$$h_{ij,s}^k + h_{ji,s}^k = 0. \qquad (1.17)$$

Следовательно, $\pi_{ij}^k = \pi_{ji}^k$ (где символом π обозначается значение соответствующих форм ω при фиксированных первичных параметрах), а значит, дифференциальная группа D_n^2 голономна.

Замечание 1. Проводя аналогичные рассуждения для слоевых форм $\omega_{i_1 i_2 .. i_s}^k$ (s>2), получим дифференциальные уравнения

$$\omega_{i_1 i_2 \ldots [i_{s-1} i_s]}^k = h_{i_1 .. i_{s-1} j}^k \omega^j, \qquad (1.18)$$

из которых непосредственно следует полуголономность дифференциальных групп D_n^s порядка s>2 (т. е. симметрия всех слоевых форм $\pi_{i_1 i_2 .. i_s}^k$ по двум последним индексам).

Замечание 2. В некоторых опубликованных работах (см., например, [1; 3 – 7]) при исследовании дифференцируемых многообразий рассматриваются неголономные дифференциальные группы $\tilde{D}^2_n$ и неголономные соприкасающиеся линейные пространства $\tilde{T}^2_n$ второго порядка, отличные от соответствующих голономных (т. е. группы и пространства с несимметричными по нижним индексам вторичными слоевыми формами π^k_{ij} и базисными векторами e_{ij}), и формулируются предложения, опирающиеся именно на их несовпадение ($\tilde{D}^2_n \neq D^2_n, \tilde{T}^2_n \neq T^2_n$). Однако в силу теоремы 1.2 таких дифференциальных групп и таких соприкасающихся пространств не существует.

§2. О голономности распределения $H^p(M_n)$

Для репера $r^1_x = \{x, \vec{e}_i\}$ касательного пространства $T^1_n(x)$ в точке $x \in M_n$ выполняются деривационные формулы

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \tag{2.1}$$

где $d\vec{x} \in T^1_n(x)$ (см. [8, с. 49]).

Дифференцируя внешним образом уравнения (2.1), находим:

$$\omega^i \wedge (d\vec{e}_i - \omega^j_i \vec{e}_j) = 0. \tag{2.2}$$

По лемме Картана

$$d\vec{e}_i - \omega^j_i \vec{e}_j = \omega^j \vec{e}_{ij}, \tag{2.3}$$

где

$$\vec{e}_{ij} = \vec{e}_{ji}. \tag{2.4}$$

Пространство, определяемое точкой $x \in M_n$ и базисными векторами $\vec{e}_i$, $\vec{e}_{ij}$, называется соприкасающимся пространством второго порядка и обозначается символом $T^2_n(x)$.

Продолжая (2.3), получим:

$$d\vec{e}_{ij} = \omega_{ij}^{k}\vec{e}_{k} + \omega_{i}^{k}\vec{e}_{kj} + \omega_{j}^{k}\vec{e}_{ik} + \omega^{k}\vec{e}_{ijk}, \qquad (2.5)$$

где $\vec{e}_{ijk}$ симметричны по любой паре нижних индексов. В силу (2.4), (1.16) и (2.5), находим:

$$\vec{0} = d\vec{e}_{ij} - d\vec{e}_{ji} = (\omega_{ij}^{k} - \omega_{ji}^{k})\vec{e}_{k} = 2h_{ij,s}^{k}\omega^{s}\vec{e}_{k}\,. \qquad (2.6)$$

Следовательно,

$$h_{ij,s}^{k} = 0, \qquad (2.7)$$

т. е. выполняются условия $\omega_{ij}^{k} = \omega_{ji}^{k}$ голономности распределения $H^2(M_n)$.

Этот результат можно установить рассуждением от противного. Пусть

$$\omega_{ij}^{k} \neq \omega_{ji}^{k}. \qquad (2.8)$$

Тогда группа D_n^3 не голономна, т. е.

$$\pi_{[ij]s}^{k} \neq 0, \qquad (2.9)$$

где $\pi_{ijs}^{k} = \omega_{ijs}^{k}\,|_{\omega^1=0,..,\omega^n=0}$.

Продолжая систему пфаффовых уравнений (1.16), находим:

$$\nabla h_{ij,s}^{k} + \omega_{[ij],s}^{k} = h_{ij,st}^{k}\omega^{t}\,. \qquad (2.10)$$

Фиксируя точку $x_0 \in M_n$, т. е. приравнивая нулю все базовые формы ω^i ($i = \overline{1,n}$), получим:

$$\delta h_{ij,s}^{k} = h_{tj,s}^{k}\pi_{i}^{t} + h_{it,s}^{k}\pi_{j}^{t} + h_{ij,t}^{k}\pi_{s}^{t} - h_{ij,s}^{t}\pi_{t}^{k} + \pi_{[ij]s}^{k} = 0. \qquad (2.11)$$

Так как

$$h_{[ij],s}^{k} = 0,\ \ \pi_{i[js]}^{k} = 0, \qquad (2.12)$$

то, используя лемму Н.М. Остиану [9], можно осуществить канонизацию репера r_x^3

$$\pi^k_{[ij]s} = 0 \to h^k_{ij,s} = 0, \qquad (2.13)$$

что приводит к симметричности форм ω^k_{ij} по нижним индексам, т. е. к голономности распределения $H^2(M_n)$ и, следовательно, противоречит неравенствам (2.8). Осуществляя продолжения структурных уравнений (1.15) и их продолжений, получим структурные уравнения распределения $H^s(M_n)$ реперов r^s_x $(s = \overline{2,p})$ (см. [2, с. 28; 3, с. 252; 8, с. 122]):

$$d\omega^k_{i_1i_2} - \omega^j_{i_1} \wedge \omega^k_{ji_2} - \omega^j_{i_2} \wedge \omega^k_{i_1j} + \omega^j_{i_1i_2} \wedge \omega^k_j = \omega^j \wedge \omega^k_{i_1i_2j};$$

$$d\omega^k_{i_1i_2i_3} - \omega^j_{i_1} \wedge \omega^k_{ji_2i_3} - \omega^j_{i_2} \wedge \omega^k_{i_1ji_3} - \omega^j_{i_3} \wedge \omega^k_{i_1i_2j} + \omega^k_j \wedge \omega^j_{i_1i_2i_3} -$$
$$- \omega^j_{i_2i_3} \wedge \omega^k_{i_1j} - \omega^j_{i_1i_3} \wedge \omega^k_{ji_2} - \omega^j_{i_1i_2} \wedge \omega^k_{ji_3} = \omega^j \wedge \omega^k_{i_1i_2i_3j}; \qquad (2.14)$$

……………………………………………………………………..

$$d\omega^k_{i_1i_2\ldots i_p} - \sum_{q=1,\ldots,p} \frac{p!}{q!(p-q)!} \omega^j_{(i_1\ldots i_q} \wedge \omega^k_{i_{q+1}\ldots i_p)j} = \omega^j \wedge \omega^k_{i_1\ldots i_pj}.$$

Слоевые формы $\omega^k_{i_1i_2\ldots i_s}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям (1.18), причем

$$h^k_{i_1i_2\ldots i_{s-1}i_s,j} + h^k_{i_1i_2\ldots i_{s-2}i_si_{s-1},j} = 0. \qquad (2.15)$$

Учитывая голономность распределения $H^2(M_n)$, т. е. соотношения

$$\omega^k_{ij} = \omega^k_{ji}, \qquad (2.16)$$

продолжая уравнения (2.5) и их продолжения для векторов $\vec{e}_{i_1i_2i_3},\ldots,\vec{e}_{i_1\ldots i_p}$, составляем разности дифференциалов

$$\vec{0} = d\vec{e}_{i_1i_2\ldots i_s} - d\vec{e}_{j_1j_2\ldots j_s} = (\omega^k_{i_1i_2\ldots i_s} - \omega^k_{j_1j_2\ldots j_s})\vec{e}_k, \qquad (2.17)$$

где $(j_1,j_2,\ldots,j_s)$ – любая перестановка нижних индексов $i_1,i_2,\ldots,i_s$ $(s=2,3,\ldots,p)$. Из формул (2.17) непосредственно следует голономность распределений $H^3(M_n)$, $H^4(M_n)$,…, $H^p(M_n)$.

§3. О двух принципах корректного применения метода внешних форм и подвижного репера в дифференциальной геометрии

Созданное в 1899 – 1902 годах Эли Картаном α-исчисление, вошедшее в науку под названием «метод внешних форм Картана», проникло во многие области математики. Особенно широко используется этот метод в сочетании с методом подвижного репера Г. Дарбу и методом продолжений и охватов Г.Ф. Лаптева в современной дифференциальной геометрии.

Однако при исследовании многообразий в неканоническом подвижном репере, содержащем кроме первичных параметров вторичные (произвольные изменения которых оставляют фиксированным образующий элемент многообразия), необходимо придерживаться двух основных принципов:

1. Рассматривать только относительно инвариантные системы дифференциальных уравнений Пфаффа, т.е. такие системы

$$\theta_a = 0, \tag{3.1}$$

для которых

$$\delta\theta_a = C_a^b \theta_b \quad (a, b = \overline{1, m}), \tag{3.2}$$

где δ – символ дифференцирования по вторичным параметрам.

2. Рассматривать только такие системы строгих дифференциальных неравенств

$$\theta_a \neq 0, \tag{3.3}$$

которые изменением вторичных параметров не могут быть преобразованы в системы пфаффовых уравнений

$$\tilde{\theta}_a \overset{\text{def}}{=} \theta_a + \delta\theta_a = 0. \tag{3.4}$$

Нарушение одного из этих принципов приводит к построению неинвариантных теорий, фактически сводящихся к теориям «на пустом множестве».

Анализ некорректностей, связанных с рассмотрением относительно неинвариантных систем дифференциальных уравнений, дан в [10].

Рассмотрим простейший пример. Пусть S – поверхность в трехмерном евклидовом пространстве, отнесенная к реперу 1-го порядка $\{A;\ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, где орт $\vec{e}_3$ направлен по нормали к поверхности. Дифференциальное уравнение поверхности S имеет вид:

$$\omega^3 = 0. \tag{3.5}$$

Продолжая (3.5), находим:

$$\omega_i^3 = \lambda_{ik}\omega^k \ \ (\lambda_{12} = \lambda_{21}, \omega^1 \wedge \omega^2 \neq 0). \tag{3.6}$$

Дифференциальное уравнение

$$\omega^2 = 0 \tag{3.7}$$

относительно неинвариантно, так как

$$\delta\omega^2 = -\pi_1^2\omega^1. \tag{3.8}$$

Можно ли утверждать, что оно определяет на поверхности S линию γ, огибаемую векторами $\vec{e}_1$? Очевидно нельзя, так как такой линии не существует: при повороте репера $\{A;\ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ около нормали орт $\vec{e}_1$ преобразуется в вектор

$$\tilde{\vec{e}}_1 \overset{\text{def}}{=} \vec{e}_1 + \delta\vec{e}_1 = \vec{e}_1 + \pi_1^2\vec{e}_2, \tag{3.9}$$

не коллинеарный вектору $\vec{e}_1$. Касательная же к линии γ в точке A поверхности не может изменить своего направления, если точка A касания осталась неподвижной.

В §1 и 2 доказана некорректность результатов, основанных на рассмотрении неголономной дифференциальной группы $\tilde{D}_n^2 \neq D_n^2$. Например, в работе [4] на с. 115 для объекта кручения $S_{JK}^I = \Gamma_{[JK]}^I$ линейной связности получено уравнение

$$\nabla S_{JK}^I + \omega_{[JK]}^I = \Gamma_{[JK]L}^I\omega^L, \tag{3.10}$$

из которого, по мнению автора, следует утверждение (см. [4] теорему 2, с. 115): «На неголономном многообразии $\tilde{V}$ объект кручения S^I_{JK} , вообще говоря, не образует тензор». Но это противоречит доказанной в §1 голономности дифференциальной группы D^2_n для любого дифференциального многообразия: из формулы (1.19) следует:

$$\pi^I_{[JK]} = 0. \tag{3.11}$$

Особенно удивляет появление в отдельных работах (например, в [4; 5]) так называемых «неполных дифференциалов», внешние дифференциалы которых отличны от нуля. Здесь нарушение принципа 2 приводит к возникновению «несимметричных» смешанных производных второго порядка для функции класса C^∞, что противоречит общеизвестной теореме о равенсте смешанных производных второго порядка любой дважды непрерывно дифференцируемой функции. Например, в [4] на с. 144 сказано: «Откажемся от неявного предположения, что dx – полный дифференциал. Исследуем общий случай, когда внешний дифференциал от dx не равен нулю». А в работе [5] на с. 111 для дифференцируемого многообразия V_n класса C^∞ сформулировано: «Предложение 1. Дифференциал точки A является полным тогда и только тогда, когда вторые смешанные производные $\partial_{ij}A$ симметричны».

Возможность сведения неголономного распределения $H^p(M_n)$ реперов r^p_x (p≥2) к голономному изменением только вторичных слоевых форм $\pi^k_{i_1..i_{s+1}}$ (т.е. слоевых форм $\omega^k_{i_1..i_{s+1}}$ при фиксации точки $x_0 \in M_n$) ставил под сомнение многие результаты, базирующиеся на несимметричности слоевых форм неголономного распределения $H^p(M_n)$ реперов порядка p≥2.

Список литературы

1. *Лумисте Ю.Г.* Связности в однородных расслоениях // Мат. сб. 1966. Т. 69. С. 434 – 469.

2. *Малаховский В.С., Остиану Н.М.* Поля геометрических объектов в однородных и обобщенных пространствах / ВИНИТИ АН СССР. М., 1979. 80 с.

3. *Лумисте Ю.Г.* Матричное представление полуголономной дифференциальной группы и структурные уравнения расслоения p-корепepов // Тр. геом. семинара ВИНИТИ АН СССР. М., 1974. С. 239 – 257.

4. Шевченко Ю.И. Связности голономных и неголономных дифференцируемых многообразий // Диф. геом. многооб. фигур. Вып. 25. Калининград, 1994. С. 110 – 120.

5. *Шевченко Ю.И.* Голономные и неголономные реперы 2-го порядка на гладких многообразиях // Диф. геом. многооб. фигур. Вып. 33. Калининград, 2002. С. 110 – 115.

6. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Учеб. пособ. Калининград, 1998. 83 с.

7. Шевченко Ю.И. Оснащения центрированных многообразий: Учеб. пособ. Калининград, 2000. 113 с.

8. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии. Т. 9: Итоги науки и техники / ВИНИТИ АН СССР. М., 1972. 272 с.

9. *Остиану Н.М.* О канонизации подвижного репера погруженных многообразий // Revue de mathematiques pure et appliqués, Acad. RPR. 1962. 7. №2. P. 231 – 240.

10. *Малаховский В.С.* К геометрии касательно оснащенных многообразий // Изв. высш. учеб. заведений. №9 (124). Казань, 1972. С. 54 – 65.

V. Malakhovsky

ON HOLONOMIC FIBERING OF FRAMES ON A DIFFERENTIABLE MANIFOLD

On n-dimensional differentiable manifold M_n the fibering $H^p(M_n)$ of frames r_x^p of the order p≥2 is investigated. It is proved that for arbitrary order p this fibering is holonomic and therefore linear differential group D_n^p (p≥2) is holonomic. Two principles of correct application of Cartan's and moving frame methods in differential geometry are given.