зованиях.- Итоги науки. Геометрия (1963). ВИНИТИ АН СССР, М., 1965, с. 138-164.

3. Б а з ы л е в В.Т. О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства.-"Изв. вузов. Матем.", 1966, № 2, с.9-19.

4. Г о л ь д б е р г В.В. Об инвариантном оснащении картановского многообразия V_p в проективном пространстве P_{2p} .-"Изв. вузов. Матем., 1970, № 12, с. 11-21.

5. И в л е в Е.Т. О многообразии $E(0,n-m,m)$ в n-мерном проективном пространстве P_n $(m>2,\ n>m(m+1))$.-"Сиб. мат. журн.", 1967, т.8, № 5, с. 1143-1155.

6. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-"Тр. Моск. матем. о-ва", 1953, т.2, с.275-382.

7. Л а п т е в Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства.-"Тр. 4-го Всес. матем. съезда"(1961), 1964, т. 2, Л., "Наука", с. 226-233.

8. Л а п т е в Г.Ф., О с т и а н у Н.М. Распределения -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I.-"Тр. Геометр. семинара." Ин-т научн. информ. АН СССР, 1971, т. 3, с.49-94.

9. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М.-Л., Гостехиздат, 1950.

10. О с т и а н у Н.М. О геометрии многомерной поверхности проективного пространства.-"Тр. Геометр. семинара." Ин-т научн. информ. АН СССР, 1966, т.1, с.239-263.

11. О с т и а н у Н.М. Инвариантное оснащение поверхности, несущей сеть.-"Изв. вузов. Матем.", 1970, № 7, с.72-82.

12. О с т и а н у Н.М., Р ы ж к о в В.В., Ш в е й к и н П.И. Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева.-"Тр. Геометр. семинара." Ин-т научн. информ. АН СССР, 1973, т.4, с.7-70.

13. С т о л я р о в А.В. Внутренняя геометрия сетей на распределениях m-мерных линейных элементов проективного пространства P_n . Тезисы докл. на 6-й Всес. геом. конф. по совр. проблемам геометрии. Вильнюс, 1975, с. 231-233.

14. С т о л я р о в А.В. Приложение теории регулярных гиперполос к изучению геометрии многомерных поверхностей проективного пространства.-"Изв. вузов. Матем.", 1976, № 2.

15. Cartan E. Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidiene on non euclidiene. Bull. Soc. Math. de France, 1919, 47, 125-160; 1920, 48, 132-208.

16. Cartan E. Les espaces á connexion projective.-"Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу", 1937, в.4, с.147-159.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

В.А. Т и х о н о в

СТУПЕНЧАТО - ЧЕБЫШЕВСКИЕ СЕТИ НА МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

В настоящей статье на многомерных поверхностях аффинного пространства рассматривается класс сетей , названных нами ступенчато - чебышевскими. В основу построения этих сетей положено аффинно - инвариантное свойство : параллельность (в смысле объемлющего пространства) образующих элементов специальным образом выбранной последовательности распределений , касательных к поверхности.

1. В N - мерном аффинном пространстве A_N рассмотрим поверхность V_n , отнесенную к подвижному реперу $\{M, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha\}$, где точка M есть текущая точка поверхности , а векторы $\vec{e}_i$ $(i,j,k\ldots=1,2,\ldots,n)$ лежат в её касательной в этой точке плоскости. Инфинитезимальное перемещение выбранного репера определяется уравнениями $(\alpha,\beta,\ldots=n+1,\ldots,N)$

$$d\vec{M}=\omega^i\vec{e}_i,\quad d\vec{e}_i=\omega_i^k\vec{e}_k+\omega_i^\alpha\vec{e}_\alpha,\quad d\vec{e}_\alpha=\omega_\alpha^i\vec{e}_i+\omega_\alpha^\beta\vec{e}_\beta.$$

Тогда

$$\omega^\alpha=0,\quad \omega_i^\alpha=b_{ij}^\alpha\omega^j \qquad (1)$$

и система функций b_{ij}^α образует , как известно , симметричный по нижним индексам тензор.

2. Зададим на поверхности V_n сеть Σ_n. Векторы $\vec{e}_i$ подвижного репера расположим теперь на касательных к линиям сети Σ_n в точке M. Линейные формы ω^i_k $(i \neq k)$ [I] станут главными :

$$\omega^i_k = a^i_{kj}\,\omega^j . \qquad (2)$$

Пусть m - натуральное число , удовлетворяющее условию $1 \leq m \leq n-1$. Векторные поля $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m$ порождают содержащее их m - мерное распределение Δ_m , которое можно рассматривать как поле m - мерных направлений $\Delta_m(M)$. Мы назовём сеть $\Sigma_n \subset V_n \subset A_N$ ступенчато - чебышевской , если для каждого значения m поле направлений $\Delta_m(M)$ параллельно вдоль линии ω^{m+1} сети Σ_n.

Для того , чтобы в выбранном репере уравнения (I) , (2) определяли ступенчато - чебышевскую сеть $\Sigma_n \subset V_n$, к ним необходимо присоединить условия

$$a^i_{kj} = 0 \quad \text{для} \quad k < j \leq i \ , \quad b^\alpha_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j \qquad (3)$$

Асимптотические формы $\Phi^\alpha = \omega^\alpha_i\,\omega^i$ поверхности V_n имеют в этом случае канонический вид $\Phi^\alpha = \sum_i b^\alpha_{ii}(\omega^i)^2$. Справедлива

Т е о р е м а I. Ступенчато - чебышевская сеть Σ_n на поверхности V_n аффинного пространства A_N есть сеть сопряжённая.

3. Векторы $\vec{b}_k = b^\alpha_{kk}\vec{e}_\alpha$ вместе с векторами $\vec{e}_i$ определяют соприкасающуюся плоскость к поверхности V_n в точке M. Поверхность V_n будем считать тангенциально невырожденной, то есть все векторы $\vec{b}_k$ предполагаем ненулевыми.

Каждая из $n-1$ точек $\vec{F}^j_i = \vec{M} - (a^j_{ij})^{-1}\vec{e}_i$ $(i \neq j)$ касательной к линии ω^i сети Σ_n называется псевдофокусом прямой $[M, \vec{e}_i]$. Известно [I] , что в неметрическом пространстве положение псевдофокусов на касательных к линиям сети $\Sigma_n \subset V_n$ не зависит от выбора оснащения поверхности V_n только в том случае , если сеть Σ_n - сопряженная. Следовательно , все псевдофокусы касательных к линиям ступенчато - чебышевской сети $\Sigma_n \subset V_n$ инвариантны относительно выбора поля нормалей первого рода данной поверхности. Ступенчато - чебышевская сеть $\Sigma_n \subset V_n$ имеет на касательных к своим линиям специальное расположение псевдофокусов : на прямой $[M, \vec{e}_i]$ существуют только псевдофокусы $F^1_i, F^2_i, \ldots, F^{i-1}_i$. Остальные псевдофокусы этой прямой бесконечно удалены.

Каждая из точек $\vec{F}_i = \vec{M} - (n-1)\left(\sum_{j \neq i} a^j_{ij}\right)^{-1}\vec{e}_i$ называется гармоническим полюсом точки M относительно псевдофокусов F^j_i касательной $[M, \vec{e}_i]$, а $(n-1)$ - мерная плоскость , проведённая через все точки F_i - гармонической плоскостью сети Σ_n . Для ступенчато - чебышевских сетей поле гармонических плоскостей является инвариантным , и для каждой точки $M \in V_n$ прямая $[M, \vec{e}_1]$ параллельна соответствующей этой точке гармонической плоскости.

4. Продифференцировав внешним образом систему уравнений Пфаффа (I) , (2) с учётом равенств (3) , находим совокупность конечных соотношений :

$$(a^j_{ik} - a^j_{ki})\vec{b}_j + a^i_{jk}\vec{b}_i - a^k_{ji}\vec{b}_k = 0 \quad \text{при } i<j<k \qquad (4)$$

$$(a^j_{ik} - a^j_{ki})\vec{b}_j + a^i_{jk}\vec{b}_i = 0 \quad \text{при } j<i<k \qquad (5)$$

$$a^j_{ki}\vec{b}_j - a^i_{jk}\vec{b}_i + a^k_{ji}\vec{b}_k \quad \text{при } i<k<j \qquad (6)$$

$$a^i_{kq}(a^q_{st} - a^q_{ts}) + a^p_{kt}a^i_{ps} - a^i_{kr}a^r_{ts} = 0 \qquad (7)$$

В равенствах (7) $q < s \le p < t < r$ и по индексам q, p, r ($q = 1, 2, \dots, k$; $p = k+1, \dots, i$; $r = i+1, \dots, n$) ведется суммирование. В равенствах (4), (5), (6) суммирование нигде не проводится и, как можно показать, каждая из трёх подсистем этих условий есть следствие двух других.

5. Сеть $\Sigma_n \subset V_n$ называется голономной [I], если каждое из уравнений $\omega^i = 0$ вполне интегрируемо. Пусть ступенчато - чебышевская сеть $\Sigma_n \subset V_n \subset A_N$ голономна. Из конечных соотношений (4) - (6) с учётом тангенциальной невырожденности поверхности V_n находим, что при различных индексах i, k, j все $a^i_{kj} = 0$. Сеть $\Sigma_n \subset V_n$ будет теперь определена дифференциальными уравнениями

$$\omega^i_k = a^i_{ki}\,\omega^i + a^i_{kk}\,\omega^k \qquad \text{для} \quad i < k$$

$$\omega^i_k = a^i_{kk}\,\omega^k \qquad \text{для} \quad i > k$$

и есть - сопряженная система частного вида. Замыкая эти уравнения внешним образом, получим

$$\Delta a^i_{ki} \wedge \omega^i + \Delta a^i_{kk} \wedge \omega^k = 0 \quad (i<k), \quad \Delta a^i_{kk} \wedge \omega^k = 0 \quad (i>k)$$

где, например, $\Delta a^i_{ki} = da^i_{ki} - a^i_{ki}\omega^k_k$ + линейная комбинация форм ω^j. Присоединяя к полученной системе квадратичные уравнения $\Delta b^\alpha_{ii} \wedge \omega^i = 0$ и проводя исследование всей системы на совместность, в известных обозначениях находим :

$$s_1 = n(N-1), \; s_2 = \frac{n(n-1)}{2}, \; s_3 = \dots = s_n = 0.$$ Доказана

Т е о р е м а 2. Поверхность $V_n \subset A_N$, несущая голономную

ступенчато - чебышевскую сеть, есть n - сопряженная система частного вида. Произвол существования такой системы $\frac{n(n-1)}{2}$ функций от двух аргументов.

Уравнение $\omega^1 = 0$ расслаивает в этом случае поверхность V_n на ∞^1 подповерхностей V_{n-1}, вдоль каждой из которых прямые $[M, \vec{e}_1]$ параллельны. Сами поверхности V_{n-1} уравнением $\omega^2 = 0$ расслаиваются на ∞^1 V_{n-2}, причём вдоль поверхностей V_{n-2} плоскости $[M, \vec{e}_1, \vec{e}_2]$ параллельны и т.д. Наконец, поверхности V_3, несущие сети Σ_3 из линий $\omega^{n-2}, \omega^{n-1}, \omega^n$ сети Σ_n, уравнением $\omega^{n-2} = 0$ расслаиваются на ∞^1 V_2 и вдоль поверхностей V_2 $(n-2)$ - плоскости $[M, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-2}]$ параллельны. Кроме того, вдоль линии ω^n параллельны $(n-1)$ - мерные плоскости $[M, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1}]$

6. При исследовании неголономных ступенчато - чебышевских сетей $\Sigma_n \subset V_n$ существенную роль играют разности $a^i_{jk} - a^i_{kj}$ $(j<i<k)$. В силу требования неголономности они ненулевые. В общем случае $a^i_{jk} \ne 0$ $(j<i<k)$. Рассмотрим подкласс ступенчато - чебышевских сетей $\Sigma_n \subset V_n$ в этом предположении. После соответствующих выкладок, которые мы здесь опускаем, получается:

Т е о р е м а 3. Если поверхность $V_n \subset A_N$ несет ступенчато - чебышевскую сеть наиболее общего задания, то она расслаивается вдоль линии ω^n на однопараметрическое семейство подповерхностей класса I, несущих сети Σ_{n-1} из остальных линий сети Σ_n.

В терминах классификации сетей на дифференцируемых многообразиях по объекту неголономности [3] можно сказать ,что ступенчато - чебышевская сеть самого общего вида есть сеть ранга $n-1$.

Каждая из поверхностей V_{n-1} , о которых говорится в теореме 3 , сама несет ступенчато - чебышевскую сеть Σ_{n-1} из линий $\omega^1,\dots,\omega^{n-1}$, а следовательно , к ней также можно применить эту теорему. Вдоль линий ω^{n-1} поверхности V_{n-1} расслаиваются на ∞^1 подповерхностей V_{n-2} класса I , несущих ступенчато - чебышевские сети Σ_{n-2} из линий $\omega^1,\dots,\omega^{n-2}$ сети Σ_n .Применяя последовательно теорему 3 нужное число раз , находим , наконец , что поверхности V_3 , несущие ступенчато - чебышевские сети Σ_3 из линий ω^1, ω^2, ω^3 расслаиваются вдоль линии ω^3 на ∞^1 подповерхностей V_2 класса I , несущих получебышевские сопряженные сети Σ_2 из линий ω^1, ω^2 сети Σ_n. Таково строение многомерной поверхности , несущей ступенчато - чебышевскую сеть самого общего вида.

Для сетей $\Sigma_3 \subset V_3 \subset A_N$ верна

Т е о р е м а 4 . Ступенчато - чебышевская сеть $\Sigma_3 \subset V_3 \subset A_N$, расслаивающаяся вдоль линии ω^3 на ∞^1 сетей Σ_2 из линий ω^1 , ω^2 , расположенных на поверхностях V_2 класса I , существует с произволом одной функции от трёх аргументов.

В этом случае главная компонента оснащения поверхности V_n [I] двумерна. Располагая векторы $\vec{e}_{n+1}$, $\vec{e}_{n+2}$ в плоскости главной компоненты оснащения , убеждаемся , что поверхность V_n имеет две независимые квадратичные формы φ^{n+1}, φ^{n+2}. Остальные асимптотические формы тождественно равны нулю.

7. Отметим , что если нам дано расслоение поверхности V_n на последовательность вложенных друг в друга подповерхностей $V_2 \subset V_3 \subset \dots \subset V_{n-1}$ класса I , то при заданной сопряженной получебышевской сети $\Sigma_2 \subset V_2$ однозначно определяется вся ступенчато - чебышевская сеть $\Sigma_n \subset V_n$.

Действительно , каждая из поверхностей $V_m (m=2,3,\dots,n-1)$ есть гиперповерхность своего соприкасающегося пространства и в силу предполагаемой нами невырожденности гиперраспределения её касательных плоскостей допускает оснащение этого распределения полем аффинной нормали $\vec{L}_m$ [4] (нормали, вдоль векторных линий которой образующий элемент гиперраспределения переносится параллельно).

В каждой точке $M \in V_n$ мы имеем теперь n линейно - - независимых I - распределений : $n-2$ из них порождены полями $\vec{L}_m$, а два других касаются линий сети Σ_2. Они и определяют на поверхности V_n ступенчато - чебышевскую сеть.

8. Возникает следующий вопрос : чем же геометрически интересен тот подкласс ступенчато - чебышевских сетей , для которого все функции $a^i_{jk} = 0 \ (j<i<k)$.Соотношения (5) примут вид: $(a^j_{ik} - a^j_{ki})\vec{e}_j = 0 \ (j<i<k)$, равносильные в силу тангенциальной невырожденности поверхности V_n следующим :

$$a^j_{ik} - a^j_{ki} = 0 \quad (j<i<k) . \qquad (8)$$

Внешнее дифференцирование уравнений (2) сети Σ_n при наличии условий (8) конечных соотношений не дает , а равенства (4) - (6) приведутся к виду :

$$a^i_{kj}\vec{b}_i + a^k_{ij}\vec{b}_k - a^{j}_{ki}\vec{b}_j = 0 \quad (j<i<k) \qquad (9)$$

Уравнение $\omega^1=0$ расслаивает в этом случае поверхность на ∞^1 подповерхностей V_{n-1}, несущих несопряженные сети Σ_{n-1} из линий $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ сети Σ_n. Поверхности V_{n-1} уравнением $\omega^2=0$ расслаиваются на ∞^1 подповерхностей V_{n-2}, несущих несопряженные сети Σ_{n-2} из линий $\omega^1, \ldots, \omega^{n-2}$ сети Σ_n и т.д. Наконец, поверхности V_3 уравнением $\omega^{n-2}=0$ расслаиваются на ∞^1 V_2, несущих несопряженные сети Σ_2 из линий ω^1, ω^2 сети Σ_n.

Равенства (9) показывают, что любая тройка векторов $\vec{b}_\ell$ компланарна, но никакие два из них не коллинеарны. Главная компонента оснащения поверхности V_n двумерна. Векторы $\vec{e}_{n+1}, \vec{e}_{n+2}$ расположим в плоскости главной компоненты оснащения. Тогда $\vec{b}_i = b^{n+1}_{ii}\vec{e}_{n+1} + b^{n+2}_{ii}\vec{e}_{n+2}$ и значит, $b^{\sigma}_{ii}=0$ $(\sigma=n+1,\ldots,N)$. Поверхность V_n имеет две линейно независимые квадратичные формы $\Phi^{n+1}=\sum_i b^{n+1}_{ii}(\omega^i)^2$, $\Phi^{n+2}=\sum_i b^{n+2}_{ii}(\omega^i)^2$. Матрица, составленная из коэффициентов этих форм, в силу неколлинеарности каждой пары векторов $\vec{b}_k$ удовлетворяет требованиям обобщённой теоремы Сегре [2] и поверхность V_n имеет коразмерность 2.

Для трёхмерных поверхностей пятимерного аффинного пространства, несущих рассматриваемые сети Σ_3, верна

Т е о р е м а 5. Ступенчато - чебышевская сеть $\Sigma_3 \subset V_3 \subset A_5$, расслаивающаяся вдоль линии ω^1 на ∞^1 несопряженных сетей Σ_2 из линий ω^2, ω^3, расположенных на поверхностях V_2, существует с произволом четырёх функций двух аргументов.

В рассматриваемом случае сеть Σ_n также имеет ранг $n-1$.

9. Пусть тангенциально - невырожденная гиперповерхность V_n аффинного пространства A_{n+1} есть n - сопряженная система относительно некоторой выбранной на ней сети Σ_n. В репере $\{M, \vec{e}_i, \vec{e}_{n+1}\}$, векторы $\vec{e}_i$ которого направлены по касательным к линиям сети Σ_n, эта система определена уравнениями

$$\omega^{n+1}=0, \quad \omega^{n+1}_i = b_{ii}\omega^i, \quad \omega^i_k = a^i_{kk}\omega^k + a^i_{ki}\omega^i \quad (i \neq k). \qquad (10)$$

Зададим оснащение поверхности V_n некоторым полем нормали первого рода и в каждой её точке M вектор $\vec{e}_{n+1}$ направим по оснащающей прямой. Тогда

$$\omega^i_{n+1} = c^i_j\,\omega^j. \qquad (11)$$

Система функций c^i_j образует геометрический объект. Потребуем, чтобы в связности, индуцируемой построенным оснащением $[M, \vec{e}_{n+1}]$, линии сети $\Sigma_n \subset V_n$ были геодезическими. Для этого надо к уравнениям (10) присоединить условия: $a^i_{kk}=0$ $(i \neq k)$. Внешнее дифференцирование системы уравнений (10) с учётом присоединённых условий приводит при $n>2$ к ряду конечных соотношений, в силу которых уравнения 11 примут вид: $\omega^i_{n+1} = c^i_i\,\omega^i$.

Это означает, что сеть $\Sigma_n \subset V_n$ есть сеть линий кривизны поля одномерных нормалей $[M, \vec{e}_{n+1}]$.

Таким образом, при $n>2$ сеть Σ_n, относительно которой гиперповерхность V_n n - сопряженная система, будет геодезической сетью линий для некоторого оснащения $[M, \vec{e}_{n+1}]$ этой поверхности только в том случае, если она есть сеть линий кривизны оснащения $[M, \vec{e}_{n+1}]$. Исследуя систему пфаффовых уравнений, определяющих рассматриваемую сеть ,и систему их квадратичных уравнений , находим произвол существования - $n(n+1)$ функций одного аргумента.

Пусть теперь сеть $\Sigma_n \subset V_n \subset A_{n+1}$ — ступенчато - чебышевская n - сопряженная система. В этом случае (при $n>2$)

$$\omega^1_{n+1} = c^1_1 \omega^1, \qquad \omega^p_{n+1} = 0 \qquad (p=2,3,\dots,n).$$

Произвол существования геодезической ступенчато - чебышевской n - сопряженной системы $\frac{n(n+1)}{2}+1$ функций одного аргумента. Гиперповерхность V_n вдоль линий ω^1 расслаивается на ∞^1 подповерхностей V_{n-1} таких, что любая линия этой подповерхности V_{n-1} есть линия кривизны поля нормали первого рода $[M, \vec{e}_{n+1}]$, относительно которого сеть Σ_n — геодезическая. Линии ω^1 - также линии кривизны поля $[M, \vec{e}_{n+1}]$, они соответствуют фокусу

$$\vec{F} = \vec{M} - (c^1_1)^{-1}\, \vec{e}_{n+1}.$$

Если нормаль Бляшке $\vec{\beta} = -\frac{1}{n+2} b^{kk} \sum_i b^{ii} b_{iik} \vec{e}_k + \vec{e}_{n+1}$ [4] гиперповерхности V_n принадлежит гиперплоскости $[M, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_{n+1}]$, то семейство линий ω^1 сети Σ_n есть семейство линий Дарбу. Верно и обратное утверждение.

Тензор кривизны связности ∇ , индуцируемой оснащением $[M, \vec{e}_{n+1}]$, имеет вид : $R^1_{jj1} = c^1_1 b_{jj}$, а его тензор Риччи $R_{jj} = c^1_1 b_{jj}$. Следовательно , связность ∇ - эквиаффинная , и направления касательных к линиям сети Σ_n сопряжены относительно конуса Риччи этой связности.

В частности , если фокус $\vec{F}$ бесконечно удалён ($c^1_1 = 0$) , то сеть Σ_n лежит на аффинной сфере.

Список литературы

I .Б а з ы л е в В.Т.О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства.-"Известия вузов.Математика", №2,5I,1966,с.9-I9.

2. Б а з ы л е в В.Т.Об одном классе многомерных поверхностей.-"Изв.вузов.Математика",№I,20,I96I,с.27-33.

3. Б а з ы л е в В.Т.Сети на многообразиях.-"Труды геом. семинара ВИНИТИ",I974,6,с.I89-206.

4.А л ш и б а я Э.Д.К геометрии распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве.-"Тр.геом.семинара ВИНИТИ",I973,5,с.I69-I93.