УДК 514.76

*Ю. И. Шевченко*

# ПОЛУГОЛОНОМНЫЕ, ГОЛОНОМНЫЕ И ТРИВИАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ



*В n-мерном пространстве аффинной связности $A_{n,n}$ со структурными уравнениями Картана получены тождества Риччи и Бианки, показана их инвариантность. При продолжении структурных уравнений гладкого многообразия с помощью леммы Лаптева определены полуголономные, голономные и тривиальные многообразия. Тождества Риччи позволили доказать полуголономность пространства $A_{n,n}$, которая сохраняется в пространстве без кручения $A'_{n,n}$ и в пространстве без кривизны $'A_{n,n}$, причем локально аффинное пространство $'A'_{n,n}$ тривиально. Введен тензор неголономности пространства $A_{n,n}$, при обращении которого в нуль пространство становится голономным $A^H_{n,n}$, и тензор кривизны присоединенного пространства аффинной связности без кручения $A'_{n,n}$, равенство нулю которого характеризует тривиальное пространство аффинной связности $A^T_{n,n}$.*

*In n-dimensional space of affine connection $A_{n,n}$ with Cartan's structure equations Ricci's and Bianchi's identities were received. Their invariance has been shown. After prolongation of the structure equations using Laptev's lemma semiholonomical, holonomical and trivial manifolds are defined. The Ricci's identities allowed us to prove semiholonomicity of the space $A_{n,n}$. This semiholonomicity preserves in the space without torsion $A'_{n,n}$ and in the space without curvature $'A_{n,n}$, besides the locally affine space $'A'_{n,n}$ is trivial. Tensor of non-holonomicity of the space $A_{n,n}$ is introduced. Vanishing of this tensor makes the space holonomic $A^H_{n,n}$. Also curvature tensor of associated space of affine connection without torsion $A'_{n,n}$ was introduced. It's vanishing characterizes trivial space of affine connection $A^T_{n,n}$.*

**Ключевые слова:** аффинная связность, тождества Риччи, тождества Бьянки, лемма Лаптева, голономность, полуголономность.

**Key words:** affine connection, Ricci's identities, Bianchi's identities, Laptev's lemma, holonomicity, semi-holonomicity.

## 1. Тождества Риччи и Бьянки в пространстве аффинной связности

Пространство аффинной связности $A_{n,n}$ имеет размерность $n$ как гладкое многообразие и размерность $n(n+1)$ как расслоение некасательных линейных реперов со связностью. Структурные уравнения Картана [1] для пространства $A_{n,n}$ запишем в виде

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i + S_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k,\ D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l, \qquad (1)$$

где $i, \ldots = \overline{1,n}$; тензоры кручения и кривизны $S_{jk}^i$, $R_{jkl}^i$ антисимметричны по двум индексам: $S_{(jk)}^i = 0$, $R_{j(kl)}^i = 0$.

Продифференцируем структурные уравнения (1) внешним образом, приведем подобные, вынесем произведения базисных форм и используем оператор ковариантного дифференцирования $\nabla$:

$$\begin{aligned}&[\nabla S_{jk}^i - (R_{jkl}^i + S_{mk}^i S_{jl}^m + S_{jm}^i S_{kl}^m)\omega^l] \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0,\\ &[\nabla R_{jkl}^i - (R_{jpl}^i S_{km}^p + R_{jkp}^i S_{lm}^p)\omega^m] \wedge \omega^k \wedge \omega^l = 0.\end{aligned} \qquad (2)$$

Эти кубичные уравнения приводят к следующим уравнениям:

$$\nabla S_{jk}^i = S_{jkl}^i \omega^l,\ \nabla R_{jkl}^i = R_{jklm}^i \omega^m, \qquad (3)$$

причем ковариантные производные компонент тензоров кручения и кривизны антисимметричны по двум индексам $S_{(jk)l}^i = 0$, $R_{j(kl)m}^i = 0$.

Подставим дифференциальные уравнения (3) в кубичные уравнения (2), вынесем базисные формы и проальтернируем по трем индексам

$$\begin{aligned}&[S_{[jkl]}^i - R_{[jkl]}^i - S_{m[k}^i S_{jl]}^m - S_{[kl}^m S_{j]m}^i] \wedge \omega^j \wedge \omega^k \wedge \omega^l = 0,\\ &[R_{j[klm]}^i - R_{jp[l}^i S_{km]}^p + R_{jp[k}^i S_{lm]}^p] \wedge \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega^m = 0.\end{aligned}$$

Коэффициенты при внешних произведениях базисных форм должны обратиться в нуль. Учитывая антисимметрии по двум индексам, преобразуем альтернированные коэффициенты в циклированные, тогда

$$S_{\{jkl\}}^i - R_{\{jkl\}}^i - S_{m\{k}^i S_{jl\}}^m - S_{\{kl}^m S_{j\}m}^i = 0,\ R_{j\{klm\}}^i - R_{jp\{l}^i S_{km\}}^p + R_{jp\{k}^i S_{lm\}}^p = 0.$$

Приводя подобные, получим тождества Риччи и Бьянки (см. [2]):

$$I_{jkl}^i \overset{def}{=} S_{\{jkl\}}^i - R_{\{jkl\}}^i - 2S_{\{kl}^m S_{j\}m}^i = 0,\ II_{jklm}^i \overset{def}{=} R_{j\{klm\}}^i + 2R_{jp\{k}^i S_{lm\}}^p = 0. \qquad (4)$$

Для продолжения дифференциальных уравнений (3) раскроем в них действие оператора $\nabla$, продифференцируем с помощью структурных уравнений (1) и вынесем базисные формы

$$[\nabla S_{jkl}^i - (\ldots)_{jklm}^i \omega^m] \wedge \omega^l = 0,\quad [\nabla R_{jklm}^i - (\ldots)_{jklmp}^i \omega^p] \wedge \omega^m = 0.$$

Разрешим эти квадратичные уравнения по лемме Картана, запишем результат в виде сравнений по модулю базисных форм и опустим невыписанные слагаемые

$$\nabla S_{jkl}^i \cong 0,\ \nabla R_{jklm}^i \cong 0. \qquad (5)$$

Процилируем эти дифференциальные сравнения по трем индексам $\nabla S_{\{jkl\}}^i \cong 0$, $\nabla R_{j\{klm\}}^i \cong 0$, откуда с учетом уравнений (3) следует, что величины $I_{jkl}^i$, $II_{jklm}^i$ удовлетворяют сравнениям $\nabla I_{jkl}^i \cong 0$, $\nabla II_{jklm}^i \cong 0$, то есть это — тензоры, поэтому справедливо

**Утверждение**. *Тождества Риччи и Бьянки (4) инвариантны в пространстве аффинной связности $A_{n,n}$.*

## 2. Полуголономность пространства аффинной связности

Рассмотрим $n$-мерное гладкое многообразие $M_n$ со структурными уравнениями Лаптева [3]:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \theta^i_j . \tag{6}$$

Продолжая их, получим

$$D\theta^i_j = \theta^k_j \wedge \theta^i_k + \omega^k \wedge \theta^i_{jk} , \tag{7}$$

причем согласно лемме Лаптева [3] выполняется условие

$$\theta^i_{jk} \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta^i_{[jk]} \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0 ,$$



которое расшифровывается следующим образом:

$$\theta^i_{[jk]} = \lambda^i_{jkl}\omega^l ; \ \lambda^i_{(jk)l} = 0 , \ \lambda^i_{[jkl]} = 0 \ \Rightarrow \ \lambda^i_{\{jkl\}} = 0 , \tag{8}$$

где квадратные скобки обозначают альтернирование, круглые скобки — симметрирование, фигурные — циклирование.

В общем случае, когда $\lambda^i_{jkl} \neq 0$, то есть формы $\theta^i_{jk}$ несимметричны: $\theta^i_{[jk]} \neq 0$, будем говорить о полуголономном многообразии $M_n$ (ср. [4; 5]). В особом случае $\lambda^i_{jkl} = 0 \Leftrightarrow \theta^i_{[jk]} = 0$ назовем $M_n$ голономным гладким многообразием $M^H_n$. Наконец, если $\theta^i_{jk} = 0$, будем называть $M_n$ тривиальным гладким многообразием $M^T_n$.

Преобразуем структурные уравнения ($1_1$) к виду (6), тогда

$$\theta^i_j = \omega^i_j + S^i_{jk}\omega^k . \tag{9}$$

Найдем их внешние дифференциалы с помощью уравнений (1):

$$D\theta^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + (dS^i_{jk} - S^i_{jl}\omega^l_k) \wedge \omega^k + (R^i_{jkl} + S^i_{jm}S^m_{kl})\omega^k \wedge \omega^l . \tag{10}$$

Подставим выражения форм $\omega^i_j$ из обозначения (9) в 1-е слагаемое

$$\omega^m_j \wedge \omega^i_m = \theta^m_j \wedge \theta^i_m - S^m_{jk}\omega^k \wedge \theta^i_m - \theta^m_j \wedge S^i_{ml}\omega^l + S^m_{jk}\omega^k \wedge S^i_{ml}\omega^l .$$

Здесь во 2-м и 3-м слагаемых используем обозначение (9) непосредственно $\omega^k_j \wedge \omega^i_k = \theta^k_j \wedge \theta^i_k - S^m_{jk}\omega^k \wedge \omega^i_m - \omega^m_j \wedge S^i_{ml}\omega^l - S^m_{jk}\omega^k \wedge S^i_{ml}\omega^l$. Внесем это выражение в формулу (10) и проальтернируем по индексам $k$, $l$:

$$D\theta^i_j = \theta^k_j \wedge \theta^i_k + \nabla S^i_{jk} \wedge \omega^k + (R^i_{jkl} - S^i_{mj}S^m_{kl} + S^m_{j[k}S^i_{l]m})\omega^k \wedge \omega^l .$$

Воспользуемся уравнениями ($3_1$) и представим результат в виде (7), где

$$\theta^i_{jk} = \Re^i_{jkl}\omega^l , \tag{11}$$

$$\Re^i_{jkl} = R^i_{jkl} - S^i_{mj}S^m_{kl} + S^m_{j[k}S^i_{l]m} - S^i_{j[kl]} . \tag{12}$$

Проальтернируем формы (11) с коэффициентами (12):

$$\theta^i_{[jk]} = \Re^i_{[jk]l}\omega^l , \tag{13}$$

$$\Re^i_{[jk]l} = R^i_{[jk]l} - S^i_{m[j}S^m_{k]l} + S^m_{[j[k]}S^i_{l]m} - S^i_{[j[k]l]} , \tag{14}$$

где альтернирование производится по индексам $j$, $k$ и по $k$, $l$. Проциклируем коэффициенты (14) форм (13):

$$\Re^i_{\{[jk]l\}} = R^i_{\{[jk]l\}} - S^i_{m\{[j}S^m_{k]l\}} + S^m_{\{[j[k]}S^i_{l]\}m} - S^i_{\{[j[k]l]\}}.$$

Поскольку в каждых фигурных скобках по паре индексов $j$, $k$ производится альтернирование, а по паре $k$, $l$ величины антисимметричны, либо альтернируются, альтернирования внутри циклирований можно опустить: $\Re^i_{\{jkl\}} = R^i_{\{jkl\}} - S^i_{m\{j}S^m_{kl\}} + S^m_{\{jk}S^i_{l\}m} - S^i_{\{jkl\}}$.

Приводя подобные, получим

$$\Re^i_{\{jkl\}} = R^i_{\{jkl\}} + 2S^m_{\{jk}S^i_{l\}m} - S^i_{\{jkl\}} = -I^i_{jkl} = 0, \tag{15}$$



то есть условие ($8_4$) выполняется в силу тождеств Риччи.

**Теорема 1**. *Пространство аффинной связности $A_{n,n}$ является полуголономным $n$-мерным гладким многообразием.*

Подставим формы (11) в структурные уравнения (7):

$$D\theta^i_j = \theta^k_j \wedge \theta^i_k + \Re^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l. \tag{16}$$

Из дифференциальных соотношений ($3, 5_1$) получим сравнения для величин (12):

$$\nabla\Re^i_{jkl} \cong 0. \tag{17}$$

**Теорема 2**. *К пространству аффинной связности $A_{n,n}$ с тензорами кручения и кривизны $S^i_{jk}$, $R^i_{jkl}$ присоединяется пространство аффинной связности без кручения $\mathcal{A}'_{n,n}$ с базисными структурными уравнениями (6), в которые входят новые слоевые формы (9), являющиеся преобразованиями исходных слоевых форм с помощью линейных комбинаций базисных форм, причем коэффициентами комбинаций служат компоненты тензора кручения $S^i_{jk}$. Преобразованные слоевые формы удовлетворяют структурным уравнениям (16) с тензором кривизны $\Re^i_{jkl}$, компоненты которого подчиняются дифференциальным сравнениям (17) и выражаются по формуле (12) через компоненты тензоров кручения и кривизны, а также через ковариантные производные $S^i_{jkl}$ тензора кручения $S^i_{jk}$.*

## 3. Классификация пространств аффинной связности

Альтернирование дифференциальных сравнений (17) по первым двум нижним индексам дает $\nabla\Re^i_{[jk]l} \cong 0$, то есть $\Re^i_{[jk]l}$ — тензор, который назовем тензором неголономности пространства аффинной связности $A_{n,n}$.

**Теорема 3**. *Если тензор неголономности $\Re^i_{[jk]l}$ обращается в нуль, что эквивалентно выражению альтернированных компонент тензора кривизны $R^i_{[jk]l}$ через компоненты тензора кручения и их ковариантные производные по формуле*

$$R^i_{[jk]l} = S^i_{[j[k]l]} + S^i_{m[j}S^m_{k]l} - S^m_{[j[k]}S^i_{l]m},$$

*то пространство $A_{n,n}$, рассматриваемое как $n$-мерное многообразие, становится голономным пространством аффинной связности $A^H_{n,n}$.*

**Теорема 4**. *Если тензор кривизны* $\mathfrak{R}^i_{jkl}$ *присоединенного пространства* $\mathcal{A}'_{n,n}$ *равен нулю, то есть тензор кривизны* $R^i_{jkl}$ *исходного пространства* $A_{n,n}$ *определяется тензором кручения* $S^i_{jk}$ *и его ковариантными производными* $S^i_{jkl}$ *по формуле*

$$R^i_{jkl} = S^i_{j[kl]} + S^i_{mj}S^m_{kl} - S^m_{j[k}S^i_{l]m},$$

*то пространство* $\mathcal{A}'_{n,n}$ *превращается в локально аффинное пространство* $'\mathcal{A}'_{n,n}$ *с уравнениями структуры (6) и следующими*

$$D\theta^i_j = \theta^k_j \wedge \theta^i_k, \tag{18}$$

*иначе говоря, исходное пространство* $A_{n,n}$, *представляемое как n-мерное многообразие, становится тривиальным пространством аффинной связности* $A^T_{n,n}$.



Рассмотрим традиционные классы пространств аффинной связности. В пространстве аффинной связности без кручения $A'_{n,n}$ тензор кручения $S^i_{jk}$ обращается в нуль

$$S^i_{jk} = 0; \tag{19}$$

структурные уравнения ($1_1$) принимают вид

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j; \tag{20}$$

из дифференциальных уравнений ($3_1$) следует

$$S^i_{jkl} = 0; \tag{21}$$

тождества Риччи и Бьянки принимают простейший вид $R^i_{\{jkl\}} = 0$, $R^i_{j\{klm\}} = 0$; обозначение (9) становится переобозначением: $\theta^i_j = \omega^i_j$, поэтому $\mathcal{A}'_{n,n} \equiv A'_{n,n}$; подставляя равенства (19, 21) в формулу (12), естественно получаем $\mathfrak{R}^i_{jkl} = R^i_{jkl}$; поскольку условие (15) выполняется в виде $\mathfrak{R}^i_{\{jkl\}} = R^i_{\{jkl\}} = 0$, из теоремы 1 вытекает

**Следствие 1**. *Пространство аффинной связности без кручения* $A'_{n,n}$, *совпадающее с присоединенным к нему пространством* $\mathcal{A}'_{n,n}$, *полуголономно.*

В пространстве аффинной связности без кривизны $\acute{A}_{n,n}$ тензор кривизны $R^i_{jkl}$ равен нулю

$$R^i_{jkl} = 0; \tag{22}$$

структурные уравнения ($1_2$) принимают вид

$$D\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k; \tag{23}$$

из дифференциальных уравнений ($3_2$) следует

$$R^i_{jklm} = 0; \tag{24}$$

в силу равенств (22, 24) тождество Риччи ($4_1$) упрощается: $S^i_{\{jkl\}} = 2S^m_{\{jk}S^i_{l\}m}$, а тождество Бьянки ($4_2$) исчезает; теорема 1 и формула (12) дают

**Следствие 2**. *Пространство аффинной связности без кривизны* $\acute{A}_{n,n}$ *полуголономно, причем присоединенное пространство* $\mathcal{A}'_{n,n}$ *имеет тензор кривизны* $\mathfrak{R}^i_{jkl} = S^i_{jm}S^m_{kl} + S^m_{j[k}S^i_{l]m} - S^i_{j[kl]}$.

В локально аффинном пространстве $\acute{A}'_{n,n}$ нет ни кручения, ни кривизны, поэтому оно имеет уравнения структуры (20, 23), которые совпадают с уравнениями (6, 18) и являются структурными уравнениями аффинной группы $GA(n)$, действующей в аффинном пространстве $A_n$. Поскольку исчезают формы (11), справедливо

**Следствие 3**. *Локально аффинное пространство $\acute{A}'_{n,n}$ и аффинное пространство $A_n$ являются тривиальными гладкими многообразиями.*

Изобразим рассмотренные классы пространств аффинной связности $A_{n,n}$ на коммутативной схеме

$$
\begin{tikzcd}
 & & A'_{n,n} \arrow[dr] & & \\
A_{n,n} \arrow[urr] \arrow[r] \arrow[drr] & A^{H}_{n,n} \arrow[r] & A^{T}_{n,n} \arrow[r] & \acute{A}'_{n,n} \arrow[r] & A_n \\
 & & \acute{A}_{n,n} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

где стрелка показывает переход к особому случаю предшествующего пространства.

## Список литературы


1. *Картан Э.* Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Казань, 1962.
2. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. М., 2003.
3. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.
4. *Лумисте Ю. Г.* Матричное представление полуголономной дифференциальной группы и структурные уравнения расслоения $p$-кореперов // Там же. 1974. Т. 5. С. 239—257.
5. *Шевченко Ю. И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.


## Об авторе


Юрий Иванович Шевченко — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: EScrydlova@kantiana.ru


## About the author


Dr Yuri Shevchenko — Ass. Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: EScrydlova@kantiana.ru