ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.9 1978

УДК 513.73

М.В.Бразевич

К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ НОРМАЛИЗАЦИИ

Задачи внутреннего оснащения линейчатых многообразий, как голономных, так и неголономных, являются трудными задачами классической дифференциальной геометрии. Такие задачи ставились и решались многими геометрами (см.работы [1], [3]-[6], [12]). Так в работе [1] В.И.Близникасом решена задача внутреннего оснащения неголономного комплекса. Поскольку задание неголономного комплекса эквивалентно заданию инвариантной корреляции на всем многообразии Грассмана $Gr(1,3)$, то в указанной задаче по заданной корреляции восстанавливается нормализация многообразия Грассмана.

В данной заметке решается, по сути дела, задача, обратная задаче внутреннего оснащения неголономного комплекса, т.е. по заданной нормализации восстанавливается корреляция на многообразии Грассмана. Чисто аналитическое решение этой задачи приведено в тезисах доклада [7]. В данной заметке даются некоторые геометрические характеристики внутренним корреляциям нормализованного многообразия Грассмана.

Все исследования выполнены единым аналитическим методом дифференциально-геометрических исследований (методом Г.Ф.Лаптева [10]-[11]).

§1. Общие замечания и аналитическое решение задачи

Пусть задано нормализованное многообразие Грассмана, т.е. многообразие Грассмана $Gr(1,3)$, оснащенное полем дифференциально-геометрического объекта следующей структуры:

$$\nabla h^p_\alpha + \omega^p_\alpha = h^{pq}_{\alpha\beta}\,\omega^\beta_q, \tag{1}$$

$$(p,q,\ldots = 1,2;\ \alpha,\beta,\ldots = 3,4).$$

Здесь и в дальнейшем считаем, что проективное пространство P_3 отнесено к подвижному реперу $\{A_\mathcal{I}\}$ ($\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K},\ldots = 1,2,3,4$), деривационные формулы которого имеют вид:

$$dA_\mathcal{I} = \omega^\mathcal{J}_\mathcal{I} A_\mathcal{J}, \tag{2}$$

где компоненты инфинитезимального перемещения этого репера, т.е. 1-формы $\omega^\mathcal{J}_\mathcal{I}$, являются инвариантными 1-формами группы проективных преобразований $PG(3,R)$ и удовлетворяют структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\omega^\mathcal{J}_\mathcal{I} = \omega^\mathcal{K}_\mathcal{I}\wedge\omega^\mathcal{J}_\mathcal{K}. \tag{3}$$

Полагаем также, что прямая $\ell = (A_1A_2)$ описывает многообразие Грассмана Gr (1,3), а соответствующая (нормализующая) прямая ℓ^*, заданная в репере $\{A_\mathcal{I}\}$ уравнениями

$$x^p = h^p_\alpha x^\alpha, \tag{4}$$

описывает многообразие нормалей $\mathfrak{M}(\ell^*)$.

Уравнения геометрических образов в основном будем задавать в другом подвижном репере $\{H_\mathcal{J}\}$, связанным с исходным репером $\{A_\mathcal{J}\}$ следующим образом:

$$H_p = A_p, \quad H_\alpha = A_\alpha + h^p_\alpha A_p. \tag{5}$$

Заметим, что система величин

$$\mathcal{H}^{(1)} = \{h^p_\alpha, h^{pq}_{\alpha\beta}\} \tag{6}$$

образует первый фундаментальный дифференциально-геометрический объект нормализованного многообразия Грассмана. Этот объект имеет следующие подобъекты (тензоры):

1) 16- компонентный тензор $H^{pq}_{\alpha\beta}$, являющийся неголономной ковариантной производной [2] оснащающего объекта h^p_α относительно линейной дифференциально-геометрической связности, индуцируемой этим объектом в главном расслоенном пространстве P или Q (см. [1]). Этот тензор определяется формулами

$$H^{pq}_{\alpha\beta} = h^{pq}_{\alpha\beta} - h^p_\beta h^q_\alpha, \tag{7}$$

и его компоненты удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla H^{pq}_{\alpha\beta} = H^{pqt}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma_t. \tag{8}$$

2) Симметричный по парам индексов тензор $S^{pq}_{\alpha\beta}$, определенный формулами

$$S^{pq}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sigma_{st}\sigma^{\gamma\varepsilon}H^{sp}_{\gamma\alpha}H^{tq}_{\varepsilon\beta}. \tag{9}$$

Здесь и в дальнейшем применяемые обобщенные символы Кронекера $\sigma_{pq}, \sigma^{pq}, \sigma_{\alpha\beta}, \sigma^{\alpha\beta}$ определим равенствами

$$\begin{Vmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}\sigma^{11} & \sigma^{12}\\ \sigma^{21} & \sigma^{22}\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}\sigma_{33} & \sigma_{34}\\ \sigma_{43} & \sigma_{44}\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}\sigma^{33} & \sigma^{34}\\ \sigma^{43} & \sigma^{44}\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{Vmatrix}$$

Компоненты тензора (9) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\nabla S^{pq}_{\alpha\beta} + S^{pq}_{\alpha\beta}(\omega^t_t - \omega^\gamma_\gamma) = S^{pqt}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma_t. \tag{10}$$

3) Симметричный по парам индексов тензор $P^{pq}_{\alpha\beta}$, определенный равенствами

$$P^{pq}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(H^{pq}_{\alpha\beta} + H^{qp}_{\beta\alpha}), \tag{11}$$

а его компоненты удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla P^{pq}_{\alpha\beta} = P^{pqt}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma_t. \tag{12}$$

4) Кососимметричный по парам индексов тензор $G^{pq}_{\alpha\beta}$, определенный равенствами

$$G^{pq}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(H^{pq}_{\alpha\beta} - H^{qp}_{\beta\alpha}). \tag{13}$$

Его компоненты удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla G^{pq}_{\alpha\beta} = G^{pqt}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma_t. \tag{14}$$

Пусть $B^{pq}_{\alpha\beta}$ - произвольный тензор, охваченный объектом $\mathcal{H}^{(1)}$. Из компонент этого тензора можно построить две, в общем случае, различные матрицы четвертого порядка

$$B=\begin{Vmatrix} B^{12}_{34} & B^{12}_{33} & B^{11}_{34} & B^{11}_{33} \\ -B^{12}_{44} & -B^{12}_{43} & -B^{11}_{44} & -B^{11}_{43} \\ -B^{22}_{34} & -B^{22}_{33} & -B^{21}_{34} & -B^{21}_{33} \\ B^{22}_{44} & B^{22}_{43} & B^{21}_{44} & B^{21}_{43} \end{Vmatrix}, \quad B^{*}=\begin{Vmatrix} B^{21}_{43} & B^{21}_{33} & B^{11}_{43} & B^{11}_{33} \\ -B^{21}_{44} & -B^{21}_{34} & -B^{11}_{44} & -B^{11}_{34} \\ -B^{22}_{43} & -B^{22}_{33} & -B^{12}_{43} & -B^{12}_{33} \\ B^{22}_{44} & B^{22}_{34} & B^{12}_{44} & B^{12}_{34} \end{Vmatrix},$$

имеющие один и тот же характеристический полином

$$\lambda^4+b_1\lambda^3+b_2\lambda^2+b_3\lambda+b_4. \tag{15}$$

Коэффициенты этого полинома b_J являются относительными инвариантами веса J нормализованного многообразия Грассмана, следовательно, корни полинома (15), обозначим их $\underset{J}{\lambda}$, являются относительными инвариантами веса 1. Собственные вектора матриц B и B^* $\underset{J}{\lambda}{}^{\alpha}_{p}(B)$ и $\underset{J}{\lambda}{}^{\alpha}_{p}(B^*)$ определяются из линейных систем

$$(B^{pq}_{\alpha\beta}-\underset{J}{\lambda}\,\sigma_{pq}\,\sigma^{\alpha\beta})\,\underset{J}{\lambda}{}^{\beta}_{q}(B)=0, \tag{16}$$

$$(B^{pq}_{\alpha\beta}-\underset{J}{\lambda}\,\sigma_{pq}\,\sigma^{\alpha\beta})\,\underset{J}{\lambda}{}^{\alpha}_{p}(B^*)=0 \tag{17}$$

и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla\underset{J}{\lambda}{}^{\alpha}_{p}+\underset{J}{\lambda}{}^{\alpha}_{p}\,\underset{J}{\omega}=\underset{J}{\lambda}{}^{\alpha q}_{p\beta}\,\omega^{\beta}_{q}, \tag{18}$$

где 1-формы $\underset{J}{\omega}$ зависят от выбора корня $\underset{J}{\lambda}$ и являются полными дифференциалами, т.е. $\mathcal{D}\underset{J}{\omega}=0$.

Из формул (18) следует, что собственные вектора матриц B и B^* определяют тензорные поля на многообразии Грассмана. Эти поля и порождают инвариантные корреляции на многообразии $G\tau(1,3)$.

Действительно, легко проверить, что при фиксации луча $\ell\in G\tau(1,3)$ и точки $M=t^pH_p$ на этом луче, фиксируется плоскость

$$\sigma_{\alpha\beta}\,\lambda^{\alpha}_{p}\,t^p x^{\beta}=0. \tag{19}$$

Кроме того, дифференциально-геометрический объект λ^{α}_{p} структуры (18) при наличии тензора $C^{pq}_{\alpha\beta}$ индуцирует дифференциально-геометрические объекты

$${}'\lambda^{p}_{\alpha}=C^{pq}_{\alpha\beta}\,\lambda^{\beta}_{q},\quad {}''\lambda^{p}_{\alpha}=C^{qp}_{\beta\alpha}\,\lambda^{\beta}_{q}. \tag{20}$$

Компоненты этих объектов, в силу (18) и дифференциальных уравнений тензора $C^{pq}_{\alpha\beta}$, удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\nabla\lambda^{p}_{\alpha}+\lambda^{p}_{\alpha}\,\omega=\lambda^{pq}_{\alpha\beta}\,\omega^{\beta}_{q}, \tag{21}$$

где $\lambda^{pq}_{\alpha\beta}\neq\lambda^{qp}_{\beta\alpha}$, и, следовательно, опять определяют инвариантные корреляции на многообразии Грассмана, т.е. при фиксации луча $\ell\in G\tau(1,3)$ и точки $M=t^pH_p$ на этом луче, фиксируется плоскость

$$\sigma_{pq}\,\lambda^{p}_{\alpha}\,t^q x^{\alpha}=0. \tag{22}$$

Заметим также, что дифференциально-геометрический объект λ^{α}_{p} структуры (18) и индуцируемые им объекты (20) в случае, когда многообразие нормалей $\mathcal{M}(\ell^*)=Gr(1,3)$, определяют инвариантные корреляции не только на исходном многообразии Грассмана $Gr(1,3)$, но и на многообразии $\mathcal{M}(\ell^*)$. Для совпадения многообразия нормалей со всем многообразием Грассмана достаточно, чтобы относительный инвариант

$$H=\det\|H^{pq}_{\alpha\beta}\|,\ dH+4H(\omega^t_t-\omega^\gamma_\gamma)=H^q_\beta\,\omega^\beta_q \tag{23}$$

был отличен от нуля. В случае, когда $H\neq 0$, легко проверить, что при фиксации луча ℓ^* и точки $M=t^\alpha H_\alpha$ на этом луче фиксируются плоскости

$$\sigma_{\alpha\beta}\,\lambda^\alpha_p\,t^\beta x^p=0, \tag{24}$$

$$\sigma_{pq}\,\lambda^p_\alpha\,t^\alpha x^q=0. \tag{25}$$

Указанное замечание позволяет обобщить понятие пар голономных линейчатых многообразий трехмерного пространства на неголономные. Эти обобщения даны в работе автора [8].

Отметим только, что дифференциально-геометрический объект λ^α_p структуры (18) порождает всего лишь следующие две пары неголономных многообразий:

$$NGr(1,3,1;\lambda^\alpha_p)-NGr^*(1,3,1;\lambda^p_\alpha=H^{pq}_{\alpha\beta}\lambda^\beta_q), \tag{26}$$

$$NGr(1,3,3;\lambda^p_\alpha=H^{qp}_{\beta\alpha}\lambda^\beta_q)-NGr^*(1,3,3;\lambda^\alpha_p). \tag{27}$$

Заметим также, что пару неголономных комплексов (27) мы

можем представить в виде

$$NGr(1,3,3;\lambda^p_\alpha)-NGr^*(1,3,3;\lambda^\alpha_p=H^{\alpha\beta}_{pq}\lambda^q_\beta), \tag{28}$$

где $H^{\alpha\beta}_{pq}$ – тензор, обратный к тензору $H^{pq}_{\alpha\beta}$, и считать, что пару (28) определяет дифференциально-геометрический объект λ^p_α структуры (21).

Каждая из отмеченных пар неголономных линейчатых многообразий индуцирует проективные преобразования на луче ℓ и ℓ^* в силу следующей схемы:

$$\forall M=t^p H_p\to N=\pi(M)\cap\ell^*\to\widetilde{M}=\sigma(N)\cap\ell, \tag{29}$$

$$\forall N=t^\alpha H_\alpha\to M=\sigma(N)\cap\ell\to\widetilde{N}=\pi(M)\cap\ell^*, \tag{30}$$

где $\pi(M)$ и $\sigma(N)$ – плоскости, соответствующие точкам M и N в корреляциях, определяемых соответственно первым и вторым неголономным многообразием из рассматриваемой пары. Например, плоскости $\pi(M)$ и $\sigma(N)$ в формулах (29) для пары (26) определяются уравнениями (19) и (25), а для пары (27) - уравнениями (22) и (24).

§ 2. Некоторые геометрические интерпретации

Матрицы, составленные из компонент тензоров $H^{pq}_{\alpha\beta}$, $S^{pq}_{\alpha\beta}$ и $P^{pq}_{\alpha\beta}$, также, как матрицы B и B^* из компонент тензора $B^{pq}_{\alpha\beta}$, будем обозначать $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^*$, S, S^*, P, P^*. Заметим, что в силу симметричности тензоров $S^{pq}_{\alpha\beta}$ и $P^{pq}_{\alpha\beta}$

$$S = S^*, \quad P = P^*.$$

Дадим некоторые геометрические характеристики внутренним корреляциям многообразия Грассмана, определяемым собственными векторами матриц $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^*$, S и P.

1) Если искать такое внутреннее оснащение исходного многообразия Грассмана дифференциально-геометрическим объектом λ^{α}_{p} структуры (18), чтобы этот объект и индуцируемый им объект

$$\lambda^{p}_{\alpha} = H^{pq}_{\alpha\beta}\lambda^{\beta}_{q} \tag{31}$$

определяли одну и ту же корреляцию на многообразии Грассмана, то мы и придем к собственным векторам матрицы $\mathcal{H}$. Отсюда совершенно очевидно, что проективные преобразования (29) и (30), индуцируемые парой неголономных многообразий (26), будут тождественными тогда и только тогда, когда дифференциально-геометрический объект λ^{α}_{p} является собственным вектором матрицы $\mathcal{H}$.

Аналогично, дифференциально-геометрический объект λ^{α}_{p} структуры (18) и индуцируемый им объект

$$\lambda^{p}_{\alpha} = H^{qp}_{\beta\alpha}\lambda^{\beta}_{q} \tag{32}$$

определяют одну и ту же корреляцию на многообразии Грассмана, а также проективные преобразования (29) и (30), порождаемые парой неголономных комплексов (27), будут тождественные тогда и только тогда, когда дифференциально-геометрический объект λ^{α}_{p} будет собственным вектором матрицы $\mathcal{H}^*$.

Доказательства этих результатов приведены в работе автора [8].

2) В работе [1] В.И.Близникасом введено понятие особой линейчатой поверхности неголономного комплекса. Когда луч ℓ описывает особую линейчатую поверхность первого неголономного комплекса $NGr(1,3,3;\{\lambda^{p}_{\alpha}\})$ из пары (28), то соответствующий луч ℓ^* опишет, так называемую присоединенную линейчатую поверхность, которая в общем случае, не будет особой для второго неголономного комплекса $NGr\ (1,3,3;\{\lambda^{\alpha}_{p}\})$ из пары (28).

Оказывается, что присоединенная линейчатая поверхность для особой линейчатой поверхности первого неголономного комплекса из пары (28) будет особой для второго неголономного комплекса этой пары тогда и только тогда, когда дифференциально-геометрический объект λ^{p}_{α}, порождающий пару (28), определяется формулой

$$\lambda^{p}_{\alpha} = \rho\, \sigma^{pq}\sigma_{\alpha\beta}\xi^{\beta}_{q}, \tag{33}$$

где ξ^{β}_{q} - собственный вектор матрицы S.

Действительно, зададим линейчатые поверхности, описываемые лучом ℓ и ℓ^*, следующими дифференциальными уравнениями (см. [8]):

$$\omega^{\alpha}_{p} = \xi^{\alpha}_{p}\theta, \quad \nabla\xi^{\alpha}_{p}\wedge\theta = 0, \quad \mathcal{D}\theta = 0; \tag{34}$$

$$\theta^{p}_{\alpha} = \xi^{p}_{\alpha}\theta, \quad \nabla\xi^{p}_{\alpha}\wedge\theta = 0, \quad \mathcal{D}\theta = 0, \tag{35}$$

где

$$\Theta^p_\alpha = H^{pq}_{\alpha\beta}\,\omega^\beta_q. \tag{36}$$

Поверхность (34) будет особой для неголономного комплекса $NG\tau(1,3,3;\ \{\lambda^p_\alpha\})$ тогда и только тогда, когда выполняются равенства (см. [1])

$$\xi^\alpha_1 \xi^2_\alpha = \xi^\alpha_2 \xi^1_\alpha = \xi^\alpha_1 \xi^1_\alpha - \xi^\alpha_2 \xi^2_\alpha = 0. \tag{37}$$

Аналогично поверхность (35) будет особой для неголономного комплекса $NG\tau$ (1,3,3; $\{\lambda^\alpha_p\}$) из пары (28) при выполнении условий

$$\xi^p_3 \xi^4_p = \xi^p_4 \xi^3_p = \xi^p_3 \xi^3_p - \xi^p_4 \xi^4_p = 0. \tag{38}$$

Из (37) и (38), учитывая, что $\lambda^p_\alpha = H^{qp}_{\beta\alpha}\lambda^\beta_q$, и принимая во внимание, что поверхность (35) будет присоединенной к поверхности (34), только при выполнении равенств

$$\xi^p_\alpha = H^{pq}_{\alpha\beta}\,\xi^\beta_q, \tag{39}$$

мы приходим к системе уравнений, определяющих дифференциально-геометрический объект ξ^β_q:

$$(S^{pq}_{\alpha\beta} - \lambda\,\sigma^{pq}\sigma_{\alpha\beta})\,\xi^\beta_q = 0, \tag{40}$$

где λ – корни характеристического уравнения

$$\det \| S^{pq}_{\alpha\beta} - \lambda\,\sigma^{pq}\sigma_{\alpha\beta} \| = 0. \tag{41}$$

После чего получение формул (33) не представляет труда.

3) Пусть на многообразии Грассмана заданы четыре различные инвариантные корреляции. Назовем четверку корреляций гармонической, если плоскости, соответствующие этим корреляциям в каждой точке луча $\ell \in G\tau$ (1,3), образуют гармоническую четверку.

Оказывается, что четверка корреляций исходного многообразия Грассмана, определяемая дифференциально-геометрическими объектами

$$\lambda^\alpha_p,\ {}'\lambda^p_\alpha = H^{pq}_{\alpha\beta}\lambda^\beta_q,\ {}''\lambda^p_\alpha = P^{pq}_{\alpha\beta}\lambda^\beta_q,\ {}'''\lambda^p_\alpha = G^{pq}_{\alpha\beta}\lambda^\beta_q, \tag{42}$$

будет гармонической тогда и только тогда, когда дифференциально-геометрический объект λ^α_p является собственным вектором матрицы P.

Для доказательства достаточно взять произвольную точку $M = t^p H_p$ на луче ℓ и потребовать, чтобы сложное отношение четырех плоскостей, соответствующих этой точке в корреляциях, определяемых объектами (42), равнялось -1.

В заключение отметим, что в случае гармонической нормализации многообразия Грассмана (этот случай совпадает с вырождением нормализованного многообразия Грассмана в комплекс коррелятивных элементов К.И.Гринцевичуса и аналитически выделяется условиями $H^{pq}_{\alpha\beta} = H^{qp}_{\beta\alpha}$, см. [9]) имеем следующие соотношения между рассматриваемыми матрицами:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^* = P, \quad S = \tfrac{1}{2}\mathcal{H}^2. \tag{43}$$

Из (43) следует, что собственные векторы всех матриц совпадают и сохраняются только геометрические характеристики,данные в пп. I и 2.

Автор пользуется случаем,чтобы выразить свою благодарность профессору В.И.Близникасу за постановку задачи и ценные советы.

Список литературы

I.Б л и з н и к а с В.И. Некоторые вопросы теории неголономных комплексов.-"Тр.геометрич.семинара,ВИНИТИ АН СССР", I974,№5,с.69-96.

2.Б л и з н и к а с В.И. Неголономное дифференцирование и линейные связности в пространстве опорных элементов.-"Лит.мат.сб.",I966,6,№2,с.I4I-208.

3.Б л и з н и к а с В.И.,Г р и г е л и о н и с С.И. О внутренних оснащениях неголономного гиперкомплекса $\mathcal{N}Gr$ (I,4,5)-"Тр.геометрич.семинара,ВИНИТИ АН СССР",I973,4,с.I2I - I54.

4.Б л и з н и к а с В.И.Л у п е й к и с З.Ю.О внутренних оснащениях линейчатого комплекса.-"Тр.геом.семинара, ВИНИТИ АН СССР ",I973,4,с.I55-I68.

5.Б л и з н и к а с В.И.Некоторые вопросы геометрии гиперкомплекса прямых.-"Тр.геометрич.семинара,ВИНИТИ АН СССР I974,6,с.43-III.

6.Б л и з н и к е н е И.В. О геометрии неголономной конгруэнции первого рода.-"Тр.геометрич.семинара,ВИНИТИ АН СССР",I97I,3,с.I25-I48.

7.Б р а з е в и ч М.В. О внутренних корреляциях нормализованного многообразия Грассмана.-В кн.: I50 лет геометрии Лобачевского,М.,ВИНИТИ,I976,с.33.

8.Б р а з е в и ч М.В.Некоторые вопросы геометрии нормализованного многообразия Грассмана.М.,ВИНИТИ,I975,28 с., № 355-376 Деп.

9.Б р а з е в и ч М.В. К дифференциальной геометрии нормализованного многообразия Грассмана Gr (I.3).-В кн.: Шестая Всесоюзн.геометрич.конф. по современным проблемам геометрии.Вильнюс,I975,с.40-43.

IO.Л а п т е в Г.Ф.Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-"Тр.Моск.матем.о-ва",I953,№2,с.275-385.

II.Л а п т е в Г.Ф.Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований.-"Тр.3-го Всесоюзн.Мат. съезда",I958,т.3,с.409-4I8.

I2.О с т и а н у Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве.-"Тр.геометрич.семинара,ВИНИТИ АН СССР,I973,4,с.7I-I20.