ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.10 1979

УДК 513.73

В.И.Ведерников

ПРОСТРАНСТВО ПСЕВДОРЕПЕРОВ

В статье определяется и изучается пространство псевдореперов, элементами которого являются совокупность точки аффинного пространства A_n и n направлений общего положения. Формально это пространство определяется как подпространство в пространстве матриц, и изучаются его полиномиальные морфизмы, устанавливается его редуктивность. После этого вводится понятие сети, понятие связности сети, изучаются свойства этой связности.

I. Рассматривается множество $M(n+1)$ квадратных матриц ($n+1$)-го порядка и в нем вводится структура G-пространства при помощи отображения

$$G \times M(n+1) \longrightarrow M(n+1): \ (a,x) \longrightarrow a x a^{-1}.$$

Здесь G -группа аффинных преобразований, т.е.

$$G = \left\{ a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{a} & T \end{pmatrix} \,\middle|\, T \in GL(n,R) \right\}.$$

В полученном G -пространстве рассматривается орбита элемента

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где $\lambda_i \neq 0, \ i \neq j \Rightarrow \ \lambda_i \neq \lambda_j$.

Для выяснения геометрического смысла элементов этого пространства рассмотрим полиномиальные морфизмы (см. [1]) этого пространства с таким расчетом, чтобы образами были симметрические орбиты. Для этого достаточно рассмотреть (как показано в статье [2]) все полиномиальные морфизмы вида

$$e_i: \ X \longrightarrow e_i(X),$$

для которых $e_i(x)^2 = e_i(x), \ \forall x \in X$.

Так же, как в статье [2], устанавливается, что такие e_i существуют, и их ровно $n+1$, и каждое представляет из себя либо точку, либо совокупность гиперплоскости и одномерного направления. Используя изоморфизм между X и множеством наборов образов симметрии $(e_0(x), \dots, e_n(x))$, получаем: Всякий $x \in X$ геометрически представляет из себя набор точки и n направлений общего положения (см. также [2]). Используя далее расслоение $\xi = (G, \pi, X)$, где $\pi(a) = a \varepsilon a^{-1}$, мы получим (так же, как в [2]) множество реперов, адаптированных элементу x. Каждый из таких реперов есть набор $(p, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$, где p -точка, определенная x, а $\bar{e}_i$ - векторы, имеющие собственные направления соответствующего оператора, т.е. они имеют направления, определенные элементом $x \in X$.

2. Используя отображение $\pi: G \to X$, введенное ранее, и дифференциал этого отображения в $e \in G$, получим касательное пространство

2 Зак. 3728

$$\mathfrak{m} = T_\varepsilon(X) = d\pi_e(\underline{G}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{V} & \omega \end{pmatrix} \middle| \, \omega = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & 0 & \\ * & & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

где $\underline{G}$ -алгебра Ли G .Тогда определится редуктивное разложение алгебры Ли

$$\underline{G} = \underline{H} \oplus \mathfrak{m} .$$

Проверка редуктивности разложения тривиальна,но отсюда следует редуктивность пространства X .Соответственно,полиномиальный морфизм $P\colon X \to P(X)$ также определит дифференциал отображения $dP_\varepsilon\colon T_\varepsilon(X) \to T_{P(\varepsilon)}[P(X)]$ и соответственно определит редуктивное разложение для алгебры Ли,которое показывает редуктивность пространства $P(X)$.В частности, отсюда получаем $\mathfrak{m} = \oplus \sum \mathfrak{m}_i$,где $\mathfrak{m}_i$-редуктивное оснащение для $e_i(X)$.Так как стационарная группа H элемента ε состоит из матриц $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h_1 \end{pmatrix}$,где h_1-диагональная матрица,то легко подсчитать действие группы $Ad(H)$ в $\mathfrak{m}$,и оно приводит к инвариантам вида

$$\varphi_{ik} = \omega_{ik}\, \omega_{ki} ,$$

где $\omega = (\omega_{ik})$, $i \neq k$, $\omega_{ii} = 0$.

3.Так же,как в статье [2],определится главное расслоение

$$\xi' = (X, e_0, A_n),$$

где A_n-аффинное пространство,а e_0-полиномиальный морфизм.

О п р е д е л е н и е. Полем элементов пространства X назовем гладкое сечение S в расслоении ξ' .Следуя В.Т.Базылеву [3],это поле также будем называть плоской сетью в аффинном пространстве.

Легко видеть,что при аффинном преобразовании сеть переходит в сеть,ибо при аффинном преобразовании аффинное пространство переходит в себя,и P -морфизм G-пространства.Так же,как в [2] ,определится дифференциал отображения S ,который определяется отображением

$$\vec{A}_n \to \mathfrak{m}\colon \bar{V} \to \omega(\bar{V}).$$

Соответственно определяются квадратичные инвариантные формы

$$\varphi_{ik}(\bar{V}) = \omega_{ik}(\bar{V}) \cdot \omega_{ki}(\bar{V}).$$

Отметим,что для выяснения геометрии сети можно использовать полиномиальные морфизмы e_i ,которые позволяют свести изучение сети к изучению поля основных элементов.

4.По способу,указанному в [2] ,вводится индуцированная связность плоской сети аффинного пространства по формуле

$$\bar{\nabla}_X Y = \sum e_i \nabla_X (e_i Y),$$

где ∇ -каноническая связность аффинного пространства,сводящаяся к простому дифференцированию.Имеет место:

Т е о р е м а. В индуцированной связности направления сети переносятся параллельно.

Доказательство следует непосредственно из определения связности $\bar{\nabla}$.

Если ввести подвижный репер,который можно определить как сечение в расслоении $\xi = (G, \pi, X_0)$,который существует в силу хорошего топологического строения базы X_0 ,где X_0-подмногообразие в X ,определенное в X сечением S ,то можно записать общее выражение для индуцированной связности в терминах коэффициентов уравнений инфинитезимального перемещения репера

$$d\bar{e}_i = \sum \omega_i^k \bar{e}_k .$$

В результате вычислений получим

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - h(X,Y),$$

где

$$h(X,Y) = \sum_{i \neq k} \omega_k^i (X) \eta^k \bar{e}_i ,$$

где положено

$$Y = \sum \eta^k \bar{e}_k .$$

Кручение этой связности

$$T(X,Y) = h(Y,X) - h(X,Y).$$

Отсюда вытекает:

Т е о р е м а. Кручение связности $\bar{\nabla}$ равно нулю тогда и только тогда, когда каждое распределение, определенное площадками, содержащими векторные поля $[\bar{e}_i \bar{e}_j]$, для всяких i,j -инволютивно.

5. Будем называть распределение k-мерных плоскостей распределением, принадлежащим сети, если в каждой точке плоскость распределения имеет в качестве базиса векторы, имеющие направление сети.

О п р е д е л е н и е. Пусть выделены три распределения L_1, L_2, L_3, принадлежащих сети, определенные в окрестности U точки $p \in A_n$ и удовлетворяющие условию

$$L_1(q) \subseteq L_2(q), \ \forall q \in U .$$

Тогда квазифокусом называется точка

$$F = p + \bar{v},$$

где $\bar{v} \in L_1$ и такая, что существует путь

$$F(t) = p(t) + \bar{v}(t)$$

с условиями

$$F(0) = F \quad \text{и} \quad \frac{dF}{dt}\Big|_{t=0} \in L_2 , \quad h = \frac{dp}{dt}\Big|_{t=0} \in L_3 .$$

Легко записываются аналитические условия, которым должен удовлетворять квазифокус, и показывается, что частными случаями квазифокуса являются фокусы и псевдофокусы (см. [3]). Понятие квазифокуса используется для построения канонического репера (в общем случае).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В е д е р н и к о в С.В. Специальные морфизмы G-пространств. - В кн.: Проблемы геометрии (Итоги науки и техники), 1975, с.49-68.

2. В е д е р н и к о в С.В. Геометрия основного пространства. (Печатается в данном сборнике).

3. Б а з ы л е в В.Т. К геометрии плоских многомерных сетей. - Уч.зап.МГПИ им.В.И.ЛЕНИНА, 1965, № 243, с.29-37.