ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.18 1987

УДК 514.75

О СВЯЗНОСТИ,ИНДУЦИРУЕМОЙ КОНГРУЭНЦИЕЙ π_M

Л.А.Ж а р и к о в а
(Калининградское ВИОЛКУ)

В настоящей работе продолжается изучение конгруэнции π и ее подклассов π_M нецентральных квадратичных элементов F в n-мерном аффинном пространстве,начатое в работе [1].Делается попытка обобщения результатов,полученных в A_3[2], на n-мерный случай.Введено понятие полуплоской связности,найдены условия,когда связность Γ_M ,индуцируемая конгруэнцией π_M , является полуплоской,эквиаффинной;рассмотрены свойства односторонних расслоений.

В работе [1] изучалось индуцированное конгруэнцией π многообразие Φ фигур $K=\{A,\mathcal{D}_1,P_{n-1}\}$,где A -точка пересечения с параболоидом F его диаметра $\mathcal{D}_1$,проходящего через характеристическую точку M гиперплоскости P_{n-1} образующего элемента F конгруэнции π .Рассмотрение велось в репере $R=\{A,\bar{e}_\alpha\}$ ($\alpha,\beta,\gamma,\ldots=1,\ldots,n$),где точка A -вершина репера,векторы $\bar{e}_{\hat{i}}$ ($\hat{i},\hat{j},\hat{k},\ldots=1,\ldots,n-2$) располагались произвольно в гиперплоскости P_{n-1} ,вектор $\bar{e}_{n-1}$ направлялся по диаметру $\mathcal{D}_1$,вектор $\bar{e}_n$ - вне гиперплоскости P_{n-1} .В таком репере уравнения квадрики F и система уравнений Пфаффа,определяющие многообразие π ,принимали соответственно вид:

$$\begin{cases} a_{\hat{i}\hat{j}}x^{\hat{i}}x^{\hat{j}} - a_{\hat{i}}x^{\hat{i}} - x^{n-1} = 0, & \det(a_{\hat{i}\hat{j}}) \neq 0, \\ x^n = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla a_{\hat{i}\hat{j}} + a_{\hat{i}\hat{j}}\omega^{n-1}_{n-1} = a^k_{\hat{i}\hat{j}}\omega_k, \\ \nabla a_{\hat{i}} + a_{\hat{i}}\omega^{n-1}_{n-1} = a^k_{\hat{i}}\omega_k, \\ \omega^i = M^{ij}\omega_j, \quad \omega^n = \Lambda\omega_{n-1}, \quad \omega^{\hat{i}}_n = N^{\hat{i}k}\omega_k. \end{cases}$$

В [1] показано,что с конгруэнцией π ассоциируется главное расслоение,базой которого является конгруэнция π, с типовым слоем-подгруппой стационарности фигуры K .В главном ассоциированном расслоении задана связность по Г.Ф.Лаптеву с помощью объекта связности Γ на базе π .Введено понятие оснащения многообразия Φ .Прямую K_1 ,не принадлежащую гиперплоскости P_{n-1} и проходящую через точку A ,зададим вектором

$$\bar{e} = \bar{e}_n + \lambda^i\bar{e}_i \quad (i,j,k,\ldots = 1,\ldots,n-1).$$

Гиперплоскость K_{n-1},проходящую через прямую K_1 и имеющую с диаметром $\mathcal{D}_1$ параболоида лишь одну общую точку A , определим векторами $\bar{e}$ и $\bar{E}_{\hat{i}} = \bar{e}_{\hat{i}} + \varphi_{\hat{i}}\bar{e}_{n-1}$

Конгруэнция π порождает оснащение индуцированного многообразия фигур Φ .С помощью компонентов фундаментального объекта первого порядка,определяющего конгруэнцию π ,можно построить охваты квазитензоров λ^i и $\varphi_{\hat{i}}$ следующим образом:

$$\lambda^{\hat{i}} = a_{\hat{j}}N^{\hat{i}\hat{j}} + N^{\hat{i}n-1}, \quad \varphi_{\hat{i}} = -a_{\hat{i}},$$

$$\lambda^{n-1} = -\frac{1}{n-2}\left((n-2)a^{n-1}_{\hat{i}}N^{\hat{i}n-1} + (n-1)a_{\hat{i}}a_{\hat{k}}N^{\hat{i}\hat{k}} + a^{\hat{i}}_{\hat{i}}\right).$$

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией π_M называется конгруэнция π ,обладающая тем свойством,что характеристическая точка M гиперплоскости параболоида принадлежит параболоиду.

Проведем частичную канонизацию репера R .Совместим точку A с точкой M ,векторы $\bar{e}_{\hat{i}}$ поместим в касательную плоскость параболоида F в точке A ,вектор $\bar{e}_{n-1}$ направим по диаметру параболоида,проходящему через точку A ,вектор $\bar{e}_n$ - по направляющему вектору прямой K_1. Тогда

$$a_{\hat{i}} = 0, \quad N^{\hat{i}n-1} = 0, \quad a^{\hat{i}}_{\hat{i}} = 0 \qquad (\text{по } \hat{i} \text{ -суммирование}).$$

Системы уравнений,определяющие образующий элемент конгруэнции π_M и само многообразие π_M,запишутся соответственно

$$a_{\hat{i}\hat{j}}x^{\hat{i}}x^{\hat{j}} - x^{n-1} = 0, \quad x^n = 0;$$

$$\nabla a_{\hat{i}\hat{j}} + a_{\hat{i}\hat{j}}\omega^{n-1}_{n-1} = a^k_{\hat{i}\hat{j}}\omega_k,$$

$$\omega^i = M^{ij}\omega_j \quad (M^{ij} = M^{ji}), \quad \omega^n = 0,$$

$$\omega^{\hat{i}}_{n-1} = N^{\hat{i}\hat{j}}\omega_{\hat{j}}, \quad \omega^{\hat{i}}_n = (N^{\hat{i},n-1,k} + N^{\hat{i}\hat{j}} a^k_{\hat{j}})\,\omega_k,$$

$$\omega^{n-1}_{\hat{i}} = -a^j_{\hat{i}}\,\omega_j,$$

$$\omega^{n-1}_n = -\frac{1}{n-2}\, a^{\hat{i}j}_{\hat{i}}\,\omega_j .$$

Используя частичную канонизацию репера R ,найдем тензор кривизны R^{ike}_j связности Γ_M ,индуцируемой конгруэнцией π_M . Связность Γ_M назовем полуплоской,если $R^{ike}_i = 0$. Справедливы теоремы.

Т е о р е м а 1. Если тензор кривизны R_M связности Γ_M, порожденной полем нормалей N ,равен нулю,то все аффинные нормали поверхности (A) образуют связку параллельных прямых.

Т е о р е м а 2. Три утверждения эквивалентны: 1)тензор кривизны связности,определенной в многообразии направлений прямых K_1 путем проектирования смежных с K_1 направлений на исходное параллельно гиперплоскости P_{n-1} ,равен нулю; 2) существует расслоение от конгруэнции $[A, K_1]$ к конгруэнции гиперплоскостей P_{n-1} ; 3) связность Γ_M является полуплоской.

Связность Γ_M является эквиаффинной,если $R^{ikj}_{Mj} = 0$. Условия эквиаффинности связности Γ_M имеют вид:

$$(n-3)(N^{\hat{i},n-1,\hat{k}} - N^{\hat{k},n-1,\hat{i}}) + (n-2)(a^{\hat{k}}_{\hat{j}} N^{\hat{i}\hat{j}} - a^{\hat{i}}_{\hat{j}} N^{\hat{k}\hat{j}}) = 0,$$

$$a^{n-1}_{\hat{j}}((n-1)N^{\hat{i}\hat{j}} - N^{\hat{j}\hat{i}}) + (n-2)N^{\hat{i},n-1,n-1} + a^{\hat{j}\hat{i}}_{\hat{j}} = 0 .$$

Полуплоская связность является эквиаффинной,если $N^{\hat{i}\hat{j}} = N^{\hat{j}\hat{i}}$, $N^{\hat{i},n-1,\hat{k}} = N^{\hat{k},n-1,\hat{i}}$.

Библиографический список

1.Ж а р и к о в а Л.А. Об оснащении многообразия фигур, индуцированного конгруэнцией нецентральных квадратичных элементов в A_n//Тезисы докл.VI Прибалтийской геом.конф.Таллин, 1984.С.43.

2.Ж а р и к о в а Л.А. О некоторых геометрических свойствах конгруэнции парабол//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1986.Вып.17.С.30-33.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.18 1987

УДК 514.76

ОБ ОДНОМ ОСНАЩЕНИИ АФФИННОГО РАССЛОЕНИЯ $A_{m,n}$ ($m < n$)

Е.Т. И в л е в
(Томский политехнический институт)

В статье строится одно аффинно-инвариантное поле нормалей P_I в смысле А.П.Нордена [1,с.197-198] расслоенного пространства $A_{m,n}$ с аффинной связностью C ,базой которого служит m-мерное дифференцируемое многообразие $\mathfrak{M}_m$,а слоем,отвечающим точке $(u) \in \mathfrak{M}_m$,является n-мерное аффинное пространство A_n.

Все встречающиеся в работе функции предполагаются аналитическими.

1.Рассмотрим пространство $A_{m,n}$ аффинной связности C с точечным образующим элементом,которое представляет собой $(m+n)$-мерное расслоенное пространство с m-мерной дифференцируемой базой $\mathfrak{M}_m$ и n-мерными аффинными слоями A_n с заданным сечением: каждой точке $(u) \in \mathfrak{M}_m$ в слое $A_n(u)$ отвечает точка $A(u)$. Предполагается,что слой $A_n(u)$ отнесен к аффинному реперу $E = \{\bar{A}(u), \bar{e}_i(u)\}$ ($i,j,k,\ell = \overline{1,n}$),где $\bar{A}(u)$ -радиус-вектор точки $A(u)$ в слое $A_n(u)$,соответствующей точке $(u) \in \mathfrak{M}_m$.С помощью связности C слой $A_n(u+du)$ точки $(u+du) \in \mathfrak{M}_m$ отображается на исходный слой $A_n(u)$ точки $(u) \in \mathfrak{M}_m$ при помощи следующего отображения аффинных реперов:

$$\begin{cases} \bar{A}(u+du) \longrightarrow \bar{A}(u,du) \doteq \bar{A}(u) + \omega^k \bar{e}_k(u), \\ \bar{e}_i(u+du) \longrightarrow \bar{e}_i(u,du) \doteq \bar{e}_i(u) + \omega^k_i \bar{e}_k(u). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь 1-формы ω^k и ω^k_i зависят от m главных $u^1, u^2, \ldots, u^m$ и n^2 вторичных параметров и удовлетворяют структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j + R^i_{0\alpha\beta}\,\omega^\alpha \wedge \omega^\beta, \quad \mathcal{D}\omega^j_i = \omega^k_i \wedge \omega^j_k + R^j_{i\alpha\beta}\,\omega^\alpha \wedge \omega^\beta. \tag{2}$$

Здесь компоненты $R^{\mathcal{K}}_{\mathcal{I}\alpha\beta}$ $(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K} = \overline{0,n})$ тензора кручения-кривизны,кососимметричные по α и β ,удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla R^i_{0\alpha\beta} = R^i_{0\alpha\beta\gamma}\,\omega^\gamma, \quad \nabla R^j_{i\alpha\beta} = R^j_{i\alpha\beta\gamma}\,\omega^\gamma \quad (\alpha, \beta, \ldots = \overline{1,m}). \tag{3}$$