где $\overline{\Delta}\psi = \overline{g}^{ij}\mathrm{Hess}^{\overline{\nabla}}_{ij}\psi$ - *лапласиан функции* ψ *в метрике* $\overline{g}$, $\overline{H}$ - *средняя кривизна гиперповерхности* $\overline{M}$.

Доказательство. Расписав (6) в координатах и свернув с $\overline{g}^{ij}$, получим (7).

Если M - гиперплоскость, то $A = 0$,

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \overline{b}(X,Y)U, \quad \overline{\Delta}\psi = (n-1)\overline{H}\ell.$$

В частности, если $\overline{M}$ - минимальная гиперповерхность, то функция ψ - горизонтальная и удовлетворяет уравнению Лапласса $\overline{\Delta}\psi = 0$.

Если M - гиперсфера радиуса ρ, то $A = -\frac{1}{\rho}\delta$,

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \omega(X)Y + \omega(Y)X + c(X,Y)U,$$

$$\omega(X) = X\ln|\rho + \psi|, \; c(X,Y) = \frac{\rho}{\rho + \psi}\overline{b}(X,Y),$$

$$\overline{\Delta}\psi = (n-1)\overline{H}\ell + \frac{\rho + \psi}{\rho^2} g_{ij}\overline{g}^{ij}.$$

Библиографический список

1. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т2. 414 с.

M.A. Cheshkova

ON A MAPPING OF A HYPERSURFACE ALONG NORMAL IN THE EUCLIDEAN SPACE

A pair of smooth hypersurface M, $\overline{M}$ and a mapping f:M$\to\overline{M}$ along normal to the hipersurface M in Euclidean space are examined. Function ψ of distance between corresponding points of the hipersurface is considered.

УДК 514.76

ПРИМЕРЫ НЕГОЛОНОМНЫХ ГЛАДКИХ МНОГООБРАЗИЙ

Ю.И. Шевченко

(Калининградский государственный университет)

Голономное и неголономное гладкие многообразия определяются в зависимости от полноты дифференциалов элементов подвижного репера многообразия. Получены формулы, показывающие эквивалентность полноты этих дифференциалов и симметричности базисных векторов касательных пространств высших порядков.

С целью доказательства существования неголономных гладких многообразий приведены их примеры: 1) группа Ли и параллелизуемое многообразие; 2) главное расслоение, расслоения групп Ли и параллелизуемых многообразий; 3) пространство геометрической связности как частный случай составного многообразия; 4) пространство групповой связности как специальное главное расслоение; 5) обобщения пространства групповой связности - расслоения групп Ли и параллелизуемых многообразий со связностями; 6) пространства линейной (аффинной) и центропроективной связности.

Пространства со связностями являются неголономными гладкими многообразиями, что соответствует термину Картана [1] «неголономное пространство с фундаментальной группой». Примеры показывают, что понятие неголономности шире понятия связности.

1. Голономное и неголономное многообразия. Рассмотрим гладкое многообразие V_n размерности n. В каждой точке $A \in V_n$ имеется n-мерное векторное пространство-касательное пространство 1-го порядка $T^1 = T_n$. Отнесем пространство T_n к подвижному реперу $\{e_i\}$, тогда смещение точки A с точностью до бесконечно малых первого порядка записывается деривационной формулой Слебодзинского [2]:

$$dA = \omega^i e_i \quad (i,j,k,p,q,t=\overline{1,n}), \tag{1}$$

где d - символ обычного дифференциала, ω^i- независимые линейные дифференциальные формы. Справедлива цепочка эквивалентностей

$$A = \mathrm{const} \Leftrightarrow dA = 0 \Leftrightarrow \omega^i e_i = 0 \Leftrightarrow \omega^i = 0.$$

Условиями полной интегрируемости системы дифференциальных уравнений $\omega^i = 0$ являются структурные уравнения Лаптева [3]:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \tag{2}$$

где D - символ внешнего дифференциала. Продолжая уравнения (2), получим

$$D\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}, \tag{3}$$

$$\omega^i_{jk} \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0. \tag{4}$$

Для выполнения равенств (4) достаточно условий голономности: $\omega^i_{[jk]} = 0$, но они не являются необходимыми [3]. Равенства (4) могут выполняться, когда формы ω^i_{jk} не симметричны по индексам j,k. Продолжения уравнений (3) приводят к формам $\omega^i_{j_1 \ldots j_p}$, несимметричным по нижним индексам в общем случае [3].

Дифференцируя уравнение (1) обычным образом, имеем 2-ой дифференциал $d^2A = d\omega^i e_i + \omega^i de_i$, принадлежащий касательному пространству 2-го порядка T^2. Пространство T^2 определяется векторами e_i и их дифференциалами [4] :

$$de_i = \omega_i^j e_j + \omega^j e_{ij} \ , \qquad (5)$$

где $e_{ij} \in T^2$. Касательное пространство 3-го порядка T^3 натянуто на векторы e_i, e_{ij} и дифференциалы [4]:

$$de_{ij} = \omega_{ij}^k e_k + \omega_i^k e_{kj} + \omega_j^k e_{ik} + \omega^k e_{ijk} \quad (e_{ijk} \in T^3). \qquad (6)$$

Дифференцируя уравнение (1) внешним образом с помощью уравнений (2,5), получим

$$DdA = \omega^j \Lambda \omega^i e_{ij} \ , \qquad (7)$$

откуда следует , что равенство $DdA = 0$ эквивалентно следующим:

$$e_{[ij]} = 0. \qquad (8)$$

Аналогично, дифференцируя уравнения (5) с помощью уравнений (2,3,6), найдем

$$Dde_i = \omega^k \wedge \omega^j e_{ijk}, \qquad (9)$$

откуда $Dde_i = 0 \Leftrightarrow e_{i[jk]} = 0$, что вместе с результатом альтернирования уравнений (6) при условиях (8) приводит к симметрии векторов e_{ijk} по всем индексам. Подобно показывается эквивалентность симметричности векторов $e_{i_1 \ldots\ldots i_p}$ и обращения в нуль-вектор внешних дифференциалов от обычных дифференциалов точки A и векторов $e_{i_1,\ldots\ldots,i_{p-2}}$.

Гладкое многообразие V_n, отнесенное к подвижному реперу $\{A, e_i, e_{ij}, e_{ijk}, \ldots\}$, где $A \in V_n$, $e_i \in T^1$, $e_{ij} \in T^2$, $e_{ijk} \in T^3$,... ($T^1 \subset T^2 \subset T^3 \subset \ldots$) , называется голономным [5], если все дифференциалы

$$dA, de_i, de_{ij}, de_{ijk}, \ldots \qquad (10)$$

полные, т.е. внешние дифференциалы от них равны нуль вектору. Согласно формулам (7, 9, ...) это эквивалентно симметрии векторов $e_{ij}, e_{ijk}, \ldots$ по всем индексам. Если же последние векторы не симметричны, т.е. дифференциалы (10) неполные, то V_n называется неголономным гладким многообразием [5].

2. Параллелизуемое многообразие и группа Ли. Пусть Π_r - гладкое многообразие размерности r со структурными уравнениями

$$D\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha \ \ (\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon = \overline{1, r}), \qquad (11)$$

продолжения которых имеют вид

$$D\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \omega^\gamma \wedge \omega_{\beta\gamma}^\alpha \ . \qquad (12)$$

Потребуем, чтобы формы ω_β^α были линейными комбинациями базисных форм ω^γ:

$$\omega_\beta^\alpha = C_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma, \qquad (13)$$

где $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ - некоторые функции на многообразии Π_r. Подставляя выражения (13) в уравнения (11), получим

$$D\omega^{\alpha} = C^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} . \tag{14}$$

Откуда видно, что функции $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ можно считать антисимметричными

$$C^{\alpha}_{(\beta\gamma)} = 0 . \tag{15}$$

Дифференцируя уравнения (14) внешним образом, найдем

$$(dC^{\alpha}_{\beta\gamma} - C^{\alpha}_{\delta\gamma}\omega^{\delta}_{\beta} - C^{\alpha}_{\beta\delta}\omega^{\delta}_{\gamma}) \wedge \omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} = 0. \tag{16}$$

Предположим , что функции $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ образуют на многообразии Π_r тензор с уравнениями

$$\Delta\, C^{\alpha}_{\beta\gamma} \overset{\mathrm{def}}{=} dC^{\alpha}_{\beta\gamma} - C^{\alpha}_{\beta\delta}\omega^{\delta}_{\gamma} - C^{\alpha}_{\delta\gamma}\omega^{\delta}_{\beta} + C^{\delta}_{\beta\gamma}\omega^{\alpha}_{\delta} = C^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}\omega^{\delta} , \tag{17}$$

причем согласно соотношениям (15)

$$C^{\alpha}_{(\beta\gamma)\delta} = 0. \tag{18}$$

С учетом выражений (13) из уравнений (17) получим

$$dC^{\alpha}_{\beta\gamma} = \hat{C}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}\omega^{\delta}, \tag{19}$$

$$\hat{C}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = C^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} + C^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}C^{\varepsilon}_{\beta\delta} + C^{\alpha}_{\beta\varepsilon}C^{\varepsilon}_{\gamma\delta} - C^{\varepsilon}_{\beta\gamma}C^{\alpha}_{\varepsilon\delta}, \tag{20}$$

т.е. каждая из функций $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ является относительным инвариантом.

Преобразуем равенства (16) с помощью уравнений (17) и выражений (13):

$$(C^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} - C^{\varepsilon}_{\beta\gamma}C^{\alpha}_{\varepsilon\delta})\omega^{\delta} \wedge \omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} = 0 ,$$

откуда $C^{\alpha}_{[\beta\gamma\delta]} - C^{\varepsilon}_{[\beta\gamma}C^{\alpha}_{|\varepsilon|\delta]} = 0$. С учетом соотношений (15,18) найдем обобщенные тождества Якоби

$$C^{\alpha}_{\{\beta\gamma\delta\}} = C^{\varepsilon}_{\{\beta\gamma}C^{\alpha}_{|\varepsilon|\delta\}}, \tag{21}$$

где фигурные скобки обозначают циклирование. Такое многообразие Π_r называется параллелизуемым с тензором кручения $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ [2] или обладающим структурой абсолютного параллелизма [6].

Дифференцируя внешним образом формы (13), получим

$$D\omega^{\alpha}_{\beta} = dC^{\alpha}_{\beta\gamma} \wedge \omega^{\gamma} + C^{\alpha}_{\beta\gamma}C^{\gamma}_{\delta\varepsilon}\omega^{\delta} \wedge \omega^{\varepsilon} .$$

Используем уравнения (17) :

$$D\omega^{\alpha}_{\beta} = (C^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}\omega^{\delta} + C^{\alpha}_{\delta\gamma}\omega^{\delta}_{\beta} - C^{\delta}_{\beta\gamma}\omega^{\alpha}_{\delta}) \wedge \omega^{\gamma}. \tag{22}$$

Внешнее произведение $\omega^{\gamma}_{\beta} \wedge \omega^{\alpha}_{\gamma} = \omega^{\delta}_{\beta} \wedge C^{\alpha}_{\delta\gamma}\omega^{\gamma}$ совпадает со 2-м слагаемым в формуле (22) после раскрытия скобок, поэтому ее можно представить в виде (12), где

$$\omega^{\alpha}_{\beta\gamma} = C^{\delta}_{\beta\gamma}\omega^{\alpha}_{\delta} - C^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}\omega^{\delta} . \tag{23}$$

В силу соотношений (15,18) формы $\omega^{\alpha}_{\beta\gamma}$ антисимметричны по индексам β,γ.

Теорема 1. Параллелизуемое многообразие Π_r неголономно.

Тензор $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ назовем абсолютным (ср.[7]), если правые части дифференциальных уравнений (17) равны нулю, т.е.

$$C^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = 0. \tag{24}$$

Теорема 2. Параллелизуемое многообразие Π_r с абсолютным тензором $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ является группой Ли.

Доказательство. С учетом условий (24) соотношения (21) принимают вид:

$$C^{\varepsilon}_{\{\beta\gamma}C^{\alpha}_{|\varepsilon|\delta\}} = 0. \tag{25}$$

Подставляя условия (24) в выражения (20), найдем $\hat{C}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = 3C^{\alpha}_{\{\beta|\varepsilon|}C^{\varepsilon}_{\gamma\delta\}}$, откуда с помощью равенств (25) получим $\hat{C}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = 0$. Тогда упрощаются уравнения (19): $dC^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0 \Leftrightarrow C^{\alpha}_{\beta\gamma} = \mathrm{const}$, т.е. относительные инварианты стали абсолютными. Итак, постоянные $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$, удовлетворяющие условию антисимметрии (15) и тождествам Якоби (25), определяют r-членную группу Ли G_r со структурными уравнениями (14).

Теорема 3. Параллелизуемое многообразие Π_r, относительные инварианты которого являются абсолютными, есть группа Ли G_r.

Доказательство. В случае $C^{\alpha}_{\beta\gamma} = \mathrm{const}$ из уравнений (19) имеем $\hat{C}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = 0$. Используя выражения (20), найдем $C^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = 3C^{\varepsilon}_{\{\beta\gamma}C^{\alpha}_{|\varepsilon|\delta\}}$. Циклируя эти равенства и сопоставляя результат с условиями (21), получим тождества Якоби (25), характеризующие группу Ли G_r.

Теорема 4. Группа Ли G_r является неголономным многообразием.

Действительно, для группы Ли G_r формы (23) принимают вид: $\omega^{\alpha}_{\beta\gamma} = C^{\delta}_{\beta\gamma}\omega^{\alpha}_{\delta}$, но остаются антисимметричными.

3. Главное расслоение и его обобщения. Рассмотрим (n+r)-мерное гладкое многообразие V_{n+r} специального строения со структурными уравнениями (2) и следующими

$$D\omega^{\alpha} = \omega^{\beta} \wedge \omega^{\alpha}_{\beta} + \omega^{i} \wedge \omega^{\alpha}_{i} \quad (\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon = \overline{n+1, n+r}). \tag{26}$$

Вполне интегрируемая система дифференциальных уравнений $\omega^{i} = 0$ фиксирует точку многообразия V_n. Из уравнений (26) следуют уравнения

$$D\overline{\omega}^{\alpha} = \overline{\omega}^{\beta} \wedge \overline{\omega}^{\alpha}_{\beta} \quad (\overline{\omega} = \omega|_{\omega^{i}=0}),$$

являющиеся структурными уравнениями r - мерного подмногообразия $M_r \subset V_{n+r}$. Используют следующие названия [8-10]: V_{n+r} - составное многообразие или расслоение, V_n - база расслоения, M_r - типовой слой, слой. Удобно применять обозначение Вагнера [8]: $V_{n+r} = M_r(V_n)$, а базу V_n представлять как фактор-многообразие V_{n+r}/M_r, т.е. многообразие слоев расслоения V_{n+r}.

Продолжая уравнения (26), найдем

$$D\omega^{\alpha}_{\beta} = \omega^{\gamma}_{\beta} \wedge \omega^{\alpha}_{\gamma} + \omega^{i} \wedge \omega^{\alpha}_{\beta i} + \omega^{\gamma} \wedge \omega^{\alpha}_{\beta\gamma}, \quad (27)$$

$$D\omega^{\alpha}_{i} = \omega^{j}_{i} \wedge \omega^{\alpha}_{j} + \omega^{\beta}_{i} \wedge \omega^{\alpha}_{\beta} + \omega^{j} \wedge \omega^{\alpha}_{ij} + \omega^{\beta} \wedge \omega^{\alpha}_{i\beta}, \quad (28)$$

$$\omega^{\alpha}_{ij} \wedge \omega^{i} \wedge \omega^{j} + (\omega^{\alpha}_{i\beta} - \omega^{\alpha}_{\beta i}) \wedge \omega^{i} \wedge \omega^{\beta} + \omega^{\alpha}_{\beta\gamma} \wedge \omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} = 0 .$$

Последние условия выполняются, когда многообразие V_{n+r} голономно, т.к. тогда

$$\omega^{i}_{[jk]} = 0, \ \omega^{\alpha}_{[ij]} = 0, \ \omega^{\alpha}_{[i\beta]} = 0, \ \omega^{\alpha}_{[\beta\gamma]} = 0, \quad (29)$$

что дает условия голономности 1-го порядка расслоения $M_r(V_n)$. В частности, $\overline{\omega}^{\alpha}_{[\beta\gamma]} = 0$ - необходимое условие голономности типового слоя M_r.

Теорема 5. Неголономность базы V_n или типового слоя M_r составного многообразия $M_r(V_n)$ влечет неголономность самого многообразия.

Пусть $\omega^{\alpha}_{\beta} = C^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}$, где $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ - антисимметричные по нижним индексам функции на расслоении $M_r(V_n)$. Тогда уравнения (26) принимают вид:

$$D\omega^{\alpha} = C^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} + \omega^{i} \wedge \omega^{\alpha}_{i}, \quad (30)$$

а при фиксации точки базы V_n имеем:

$$D\overline{\omega}^{\alpha} = \overline{C}^{\alpha}_{\beta\gamma}\overline{\omega}^{\beta} \wedge \overline{\omega}^{\gamma}, \ \overline{C}^{\alpha}_{\beta\gamma} = C^{\alpha}_{\beta\gamma}|_{\omega^i=0} .$$

Выделим четыре случая.

1) Функции $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ образуют тензор на расслоении $M_r(V_n)$:

$$\Delta C^{\alpha}_{\beta\gamma} = C^{\alpha}_{\beta\gamma i}\omega^{i} + C^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}\omega^{\delta} \Leftrightarrow dC^{\alpha}_{\beta\gamma} = C^{\alpha}_{\beta\gamma i}\omega^{i} + \hat{C}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}\omega^{\delta},$$

причем величины $\hat{C}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ находятся по формуле (20). Предполагая, что функции $\overline{C}^{\alpha}_{\beta\gamma}, \overline{C}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ удовлетворяют обобщенным тождествам Якоби (21), получим $M_r = \Pi_r$. Расслоение $\Pi_r(V_n)$ назовем расслоением параллелизуемых многообразий, т.к. в каждой точке базы V_n есть свое параллелизуемое многообразие Π_r.

2) Функции $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ составляют тензор на базе V_n:

$$\Delta C^{\alpha}_{\beta\gamma} = C^{\alpha}_{\beta\gamma i}\omega^{i} \Leftrightarrow dC^{\alpha}_{\beta\gamma} = C^{\alpha}_{\beta\gamma i}\omega^{i} + 3C^{\varepsilon}_{\{\beta\gamma}C^{\alpha}_{\delta\}\varepsilon}\omega^{\delta} .$$

Требуя, чтобы величины $\overline{C}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ удовлетворяли тождествам Якоби (25), получим $d\overline{C}^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0 \Leftrightarrow \overline{C}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \mathrm{const}$, т.е. $\Pi_r = G_r$. Расслоение $G_r(V_n)$ назовем расслоением групп Ли (ср. [11]).

3) Функции $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ образуют абсолютный тензор:

$$\Delta C^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0 \Leftrightarrow dC^{\alpha}_{\beta\gamma} = 3C^{\varepsilon}_{\{\beta\gamma}C^{\alpha}_{\delta\}\varepsilon}\omega^{\delta}.$$

Предполагая выполнение тождеств (25) для величин $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$, обнаружим, что они являются структурными постоянными группы Ли G_r, одной и той же для всех точек базы V_n. В этом случае имеем главное расслоение $G^{o}_{r}(V_n)$, в обозначении которого нулик обычно не пишется.

4) Функции $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ постоянны на каждом слое , т.е. являются функциями на базе V_n: $dC^{\alpha}_{\beta\gamma} = C^{\alpha}_{\beta\gamma i}\omega^{i}$. Это частный случай 2-го случая при выполнении тождеств Якоби (25) для функций $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$. Здесь также возникает расслоение групп Ли.

Итак, главное расслоение, расслоения групп Ли и параллелизуемых многообразий имеют одинаковые по виду структурные уравнения (2,30), но входящие в них величины $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ отличаются по смыслу. Их можно считать постоянными , функциями на базе, либо на расслоении. Из теорем 1,4 и 5 следует

Теорема 6. Главное расслоение, расслоения групп Ли и параллелизуемых многообразий неголономны .

4. Пространства геометрической и групповой связности. Специальным случаем расслоения $M_r(V_n)$ является пространство с линейной дифференциально-геометрической связностью [8-10] или пространство геометрической связности $M_{r,n}$ со структурными уравнениями (2) и следующими

$$D\omega^{\alpha} = \omega^{\beta} \wedge \omega^{\alpha}_{\beta} + \Re^{\alpha}_{ij}\omega^{i} \wedge \omega^{j}. \tag{31}$$

В простейшем случае объект кривизны $\Re^{\alpha}_{ij}$ образует [5] тензор на пространстве $M_{r,n}$:

$$d\Re^{\alpha}_{ij} - \Re^{\alpha}_{ik}\omega^{k}_{j} - \Re^{\alpha}_{kj}\omega^{k}_{i} + \Re^{\beta}_{ij}\omega^{\alpha}_{\beta} = \Re^{\alpha}_{ijk}\omega^{k} + \Re^{\alpha}_{ij\beta}\omega^{\beta}, \tag{32}$$

$$\Re^{\alpha}_{(ij)} = 0 , \; \Re^{\alpha}_{(ij)k} = 0 , \; \Re^{\alpha}_{(ij)\beta} = 0 . \tag{33}$$

Выясним голономность такого пространства $M_{r,n}$. Запишем уравнения (31) в виде (26), тогда $\omega^{\alpha}_{i} = \Re^{\alpha}_{ij}\omega^{j}$. Их внешние дифференциалы

$$D\omega^{\alpha}_{i} = (d\Re^{\alpha}_{ij} - \Re^{\alpha}_{ik}\omega^{k}_{j}) \wedge \omega^{j}$$

преобразуем с помощью уравнений (32):

$$D\omega_i^\alpha = (\Re_{kj}^\alpha \omega_i^k - \Re_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha + \Re_{ijk}^\alpha \omega^k + \Re_{ij\beta}^\alpha \omega^\beta) \wedge \omega^j.$$

Раскрывая скобки, получим уравнения (28), в которых

$$\omega_{ij}^\alpha = -\Re_{ijk}^\alpha \omega^k,\ \omega_{i\beta}^\alpha = \Re_{ij\beta}^\alpha \omega^j. \tag{34}$$

Можно также считать, что

$$\omega_{ij}^\alpha = -\Re_{ijk}^\alpha \omega^k - \Re_{ij\beta}^\alpha \omega^\beta,\ \omega_{i\beta}^\alpha = 0\ . \tag{35}$$

Из выражений (34), (35) в силу соотношений (33) следует антисимметричность форм ω_{ij}^α по нижним индексам в каждом случае. Кроме того, формы $\omega_{\beta i}^\alpha$ в уравнениях (27), вообще говоря, не совпадают с формами $\omega_{i\beta}^\alpha$ (34), (35). Значит, условия голономности (29) не выполняются вне зависимости от голономности базы V_n и типового слоя M_r.

Теорема 7. Пространство геометрической связности $M_{r,n}$, объектом кривизны которого служит тензор, неголономно.

Пространство с фундаментально-групповой связностью в узком смысле [1, 3, 4, 6, 9, 11, 12] или пространство групповой связности $G_{r,n}$, являющееся специальным главным расслоением $G_r(V_n)$, имеет структурные уравнения (2) и следующие

$$D\omega^\alpha = C_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \wedge \omega^\gamma + R_{ij}^\alpha \Omega^i \wedge \omega^j\ . \tag{36}$$

В голономном случае [5] объект кривизны R_{ij}^α образует тензор на базе V_n:

$$dR_{ij}^\alpha - R_{ik}^\alpha \omega_j^k - R_{kj}^\alpha \omega_i^k + R_{ij}^\beta \Omega_\beta^\alpha = R_{ijk}^\alpha \omega^k,$$

$$\Omega_\beta^\alpha = 2C_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma,\ R_{(ij)}^\alpha = 0\ ,\ R_{(ij)k}^\alpha = 0\ .$$

Специальные расслоения групп Ли и параллелизуемых многообразий со структурными уравнениями (2,36), обобщающие пространство групповой связности $G_{r,n}$, назовем расслоениями со связностью.

Теорема 8. Пространство групповой связности $G_{r,n}$, расслоения групп Ли и параллелизуемых многообразий со связностями неголономны.

5. Пространства линейной (аффинной) и центропроективной связности. Частным случаем пространства групповой связности $G_{r,n}$ является пространство линейной (в классической терминологии - аффинной) связности $L_{n^2,\,n}$ со структурными уравнениями

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i + S_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k\ , \tag{37}$$

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + R_{jpq}^i \omega^p \wedge \omega^q\ . \tag{38}$$

В простейшем случае [12] объекты кручения S^i_{jk} и кривизны R^i_{jpq} являются тензорами:

$$\nabla S^i_{jk} = S^i_{jk|t}\omega^t \ , \ \nabla R^i_{jpq} = R^i_{jpq|t}\omega^t , \tag{39}$$

$$S^i_{(jk)} = 0 \ , \ S^i_{(jk)|t} = 0 \ , \ R^i_{j(pq)} = 0 \ , \ R^i_{j(pq)|t} = 0 \ . \tag{40}$$

Ковариантный дифференциал ∇ действует обычным образом :

$$\nabla S^i_{jk} = dS^i_{jk} - S^i_{jt}\omega^t_k - S^i_{tk}\omega^t_j + S^t_{jk}\omega^i_t \ . \tag{41}$$

Неголономность пространства $L_{n^2,\ n}$ следует из теоремы 8, но мы покажем ее непосредственно. Уравнения (37) запишем в виде :

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \theta^i_j , \tag{42}$$

$$\theta^i_j = \omega^i_j + S^i_{jk}\omega^k. \tag{43}$$

Получили структурные уравнения (42) гладкого многообразия V_n, являющегося базой пространства $L_{n^2,\ n}$. С учетом формулы (43) уравнения (39) запишем иначе :

$$\Delta S^i_{jk} = S^i_{jkt}\omega^t \ , \ \Delta R^i_{jpq} = R^i_{jpqt}\omega^t \ ; \tag{44}$$

$$\begin{gathered} S^i_{jkt} = S^i_{jk|t} - S^i_{jp}S^p_{kt} - S^i_{pk}S^p_{jt} + S^p_{jk}S^i_{pt} , \\ R^i_{jpqt} = R^i_{jpq|t} - R^i_{jpk}S^k_{qt} - R^i_{jkq}S^k_{pt} - R^i_{kpq}S^k_{jt} + R^k_{jpq}S^i_{kt} . \end{gathered} \tag{45}$$

Дифференциальный оператор Δ действует по формуле (41), в которой вместо ω надо писать θ. В силу соотношений (40) и обозначений (45) выполняются равенства $S^i_{(jk)t} = 0,\ R^i_{j(pq)t} = 0$.

Найдем внешние дифференциалы форм θ^i_j :

$$D\theta^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + (dS^i_{jk} - S^i_{jt}\theta^t_k - R^i_{jkt}\omega^t) \wedge \omega^k .$$

Подставим выражения форм ω^i_j из формулы (43):

$$D\theta^i_j = \theta^k_j \wedge \theta^i_k + [\Delta S^i_{jk} + (S^p_{jtj}S^i_{pk} - R^i_{jkt})\omega^t] \wedge \omega^k .$$

Учитывая уравнения (44), получим

$$D\theta^i_j = \theta^k_j \wedge \theta^i_k + \omega^k \wedge \theta^i_{jk} \ , \ \theta^i_{jk} = (R^i_{jkt} - S^i_{jkt} - S^p_{jt}S^i_{pk})\omega^t \ .$$

Формы θ^i_{jk} несимметричны по нижним индексам, т.е. база V_n неголономна, поэтому справедлива

Теорема 9. Пространство линейной (аффинной) связности $L_{n^2,\ n}$, кручение и кривизна которого являются тензорами, неголономно.

Исключением служит пространство $L_{n^2,\ n}$ без кручения и кривизны, потому что система (37,38) принимает вид :

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i\,,\ D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i\,, \tag{46}$$

а это уравнения структуры аффинного пространства A_n, которое голономно.

Структурные уравнения пространства центропроективной связности $C_{n(n+1),n}$ состоят [10,13,14] из уравнений (37,38) и следующих

$$\begin{aligned} D\omega_i &= \omega_i^j \wedge \omega_j + R_{ijk}\omega^j \wedge \omega^k, \\ D\omega &= \omega^i \wedge \omega_i + S_{ij}\omega^i \wedge \omega^j, \end{aligned} \tag{47}$$

причем последнее уравнение играет вспомогательную роль. В голономном случае [14] компоненты объектов центропроективных кручения $\{S_{jk}^i, S_{ij}\}$ и кривизны $\{R_{jpq}^i, R_{ijk}\}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям (39),

$$\nabla S_{ij} + S_{ij}^k \omega_k = S_{ij|k}\omega^k,\ \nabla R_{ijk} + R_{ijk}^t \omega_t = R_{ijk|t}\omega^t.$$

Пространство центропроективной связности $C_{n(n+1),n}$, с одной стороны, обобщает пространство линейной связности $L_{n^2,\ n}$, с другой стороны, является частным случаем пространства групповой связности $G_{r,n}$.

Теорема 10. Пространство центропроективной связности $C_{n(n+1),n}$, линейное кручение S_{jk}^i и центропроективная кривизна $\{R_{jpq}^i, R_{ijk}\}$ которого являются тензорами, неголономно.

Если линейное кручение и центропроективная кривизна равны нулю, то из уравнений (37,38,47) получаем (46), $D\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j$ - уравнения структуры центропроективного пространства, которое голономно.

Работа выполнена по теме гранта Минобразования РФ (СПкКЦ).

Библиографический список

1. Картан Э. Группы голономии обобщенных пространств. VIII Междунар. конкурс на соиск. премии им. Н.И.Лобачевского: Отчет. Казань, 1937. С. 63-110.

2. Slebodzinski W. Formes exterieures et leurs applications. Warszawa, 1963. Vol. 2.

3. Лаптев Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т.1. С. 139-189.

4. Акивис М.А. Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, 1977. 84 с.

5. Шевченко Ю.И. Связности голономных и неголономных дифференцируемых многообразий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1994. Вып. 25. С. 110-121.

6. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии . М., 1970. 412 с.

7. Лумисте Ю.Г. Параллельное перенесение. Математическая энциклопедия. М., 1984. Т. 4. С. 206-208.

8. Вагнер В.В. Теория составного многообразия // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу. М.; Л., 1950. Вып. 8. С. 11-72.

9. Ehresmann C. Les connexions infinitesimales dans un espace fibre differentiable // Colloque de Topologie . Bruxelles, 1950 . P. 29-55.

10. Близникас В.И. О геометрии некоторых классов оснащенных расслоенных пространств: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Вильнюс, 1970. 339 с.

11. Лаптев Г.Ф. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. 3-го Всесоюз. Мат. съезда. М., 1958 Т. 3. С. 409-418.

12. Шевченко Ю.И. Связность в продолжении главного расслоения // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1991. Вып. 22 . С.117-127.

13. Лемлейн В.Г. Локальные центропроективные пространства и связности в дифференцируемом многообразии // Литовский мат. сб. 1964. Т. 4. N1. С. 41-132.

14. Шевченко Ю.И. Связности голономных и неголономных центропроективных многообразий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1996. Вып. 27. С.122-135.

Yu.I. S h e v c h e n k o

EXAMPLES OF NONHOLONOMIC SMOOTH MANIFOLDS

Holonomic and nonholonomic shmooth manifolds are defined depending on the completeness of differentials of elements of the moving frame of the manifold. Formulas are obtained, showing the equivalence of the completeness of these differentials and the symmetry of base vectors of tangent spaces of higher orders.

With the purpose of existence proof of nonholonomic smooth manifolds their examples are brought: 1) Lie group and parallelizable manifold; 2) main fibering, fiberings of Lie groups and parallelizable manifolds; 3) space of geometric connection as a special case of composite manifold; 4) space of grouped connection as a special main fibering; 5) generalizations of space of grouped connection i.e. fiberings of Lie groups and parallelizable manifolds with connections; 6) spaces of linear (affine) and centroproective connection.

Spaces with connections are nonholonomic smooth manifolds what correspond to Cartan term «nonholonomic space with a fundamental group». Examples shows, that the notion of nonholonomy is wider then the notion of connection.

УДК 514.75

СОПРИКАСАЮЩИЕСЯ ГИПЕРКВАДРИКИ ГИПЕРПОЛОСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

С.Н. Ю р ь ев а

(*Калининградский государственный университет*)

Рассматриваются поля соприкасающихся гиперквадрик, внутренним инвариантным образом присоединенных в окрестностях 2-го и 3-го порядка к гиперпо-