3. *Чешкова М. А.* Дважды каналовые гиперповерхности в евклидовом пространстве E^n // Мат.сб. 2000. Т.191. № 6. С.155-160.
4. *Атанасян Л.С., Базылев В.Т.* Геометрия. М.: Просвещение, 1986. Ч.2. 336 с.

S. Golysheva

SOME PROPERTIES OF TWICE CANAL HYPERSURFACES IN THE EUCLIDEAN SPACE E^n

Twice canal hypersurfaces M^{n-1} in the Euclidean space E^n envelope to one-parametr and (n-2)-parametr families of hyperspheres.

УДК 514.76

А.И. Долгарев

(Пензенский государственный педагогический университет)

НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЙ ОДУЛЬ

Наличие внешней операции на одуле (обобщении модуля) позволяет определить дифференцирование одулярных функций, как обобщение дифференцирования векторных функций. Возникает дифференциальная одулярная (нелинейная) геометрия с касательным отображением в одуль. Оказывается, не для всякого одуля одулярные функции дифференцируемы. В заметке приведен пример такого одуля.

Одуль определяется на алгебраической структуре с внутренней бинарной операцией посредством введения внешней операции. В частности, одуль может быть модулем и линейным пространством. Одули введены Л.В. Сабининым [1], в 1977 году в общем случае они определены на квазигруппах.

Операции на линейном пространстве **L** над полем **F** позволяют ввести дифференцирование векторных функций. Внутренняя операция используется для нахождения приращения $\Delta\vec{r}$ функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$, с использованием внешней операции находится отношение приращения функции к приращению аргумента h: $\frac{1}{h}\Delta\vec{r}$. Аналогично определяется производная одулярной функции, далее строится дифференциальная геометрия одулярных пространств. Начала одулярной дифференциальной геометрии заложены в [2-5].

1. ОДУЛИ. Рассматривается алгебраическая структура Ω=(Ω,+), ее внутренняя операция называется сложением, коммутативности не требуется.

Задана внешняя операция $\omega_K(+)$ умножения элементов структуры Ω на скаляры из кольца **K**=$(\mathbf{K},+,\cdot)$:

$$\omega_K(+):\ \mathbf{K}\times\Omega \ni (t,\omega)\to t\omega\in\Omega,$$

удовлетворяющая аксиомам (для всех $\omega\in\Omega$, $t,s\in\mathbf{K}$):

$$(t+s)\omega = t\omega + s\omega,\ \ s(t\omega)=(st)\omega.$$

Структура $\Omega=$ $(\Omega,+,\omega_K(+))$ называется **K**-*одулем* [1], элементы одуля называются *одулярами*. Мы рассматриваем одули на группах Ли над полем **R** действительных чисел, используем термин *одуль*.

Экспоненциальное отображение действительной алгебры Ли в ее группу Ли определяет на группе Ли внешнюю операцию, т.е. задет на группе Ли полный **R**-одуль, [6]. Последнее время группы Ли на многообразиях $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{R}^4$ задаются явными операциями на кортежах чисел, см., например, [7-9]. Мы определяем внешние операции на этих группах Ли и получаем одули на группах Ли [2,3,10]. Заменяя линейное пространство одулем в аксиоматике Г. Вейля аффинного пространства, имеем вейлевское одулярное пространство, кратко ВО-пространство [2]. Если определено дифференцирование одулярных функций, то определено и касательное отображение ВО-пространства в одуль. Такие пространства на двух одулях изучаются в [2-5].

В [10] приведена схема определения дифференцирования одулярных функций, она реализована на двух одулях, найдены производные растранных и сибсонных функций. В настоящей заметке приведен пример одуля на многообразии $\mathbf{R}^3$, одулярные функции на котором не дифференцируемы.

2. **Осцилляторный одуль**. В [9, с.34] приведена операция на $\mathbf{R}^3$, определяющая 3-мерную осцилляторную группу Ли, запишем ее в виде:

$$(x,y,z)+(u,v,w)=(x+u, v+y\cos u - z\sin u, w+y\sin u+z\cos u).$$

Нулевой элемент: $\vartheta=(0,0,0)$, элемент, противоположный элементу $\omega=(x,y,z)$, равен $-\omega=(-x,-y\cos x - z\sin x, y\sin x - z\cos u)$. Внешнюю операцию на осцилляторной группе зададим равенством

$$t(x,y,z)=(xt,p,q),$$

где

$$q = z + \frac{\sin\frac{t-1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\left(y\sin\frac{xt}{2} + z\cos\frac{xt}{2}\right);$$

$$t(0,y,z) = (0,yt,zt);\ t \in \mathbf{R}.$$

При этом: $1(x,y,z) = (x,y,z)$ и $(-1)(x,y,z) = -(x,y,z)$. Аксиомы одуля из п.1 выполняются. Полученный *осцилляторный одуль* обозначаем Ω^3.

3. **О дифференцировании**. Рассматриваем одулярные функции $\omega(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I \subseteq \mathbf{R}$, заданные на интервале **I** из поля **R** со значениями в осцилляторном одуле Ω^3. Всякая такая функция определяется тремя действительными функциями x(t), (y), z(t) действительного аргумента *t*. Считаем функции непрерывными на интервале **I**. Согласно [10] предел одулярной функции вычисляется покомпонентно. Аргументу t непрерывной одулярной функции ω(t) дадим приращение h. Значение функции в точке t обозначим ω(t)=(x,y,z), значение в точке t+h обозначим ω(t+h)=(x(t+h),y(t+h),z(t+h)). Функция получает приращение $\Delta\omega$:

$$\omega(t+h) = \omega(t) + \Delta\omega,$$

откуда:

$$\Delta\omega = -\omega(t) + \omega(t+h).$$

Ввиду некоммутативности внутренней операции на одуле Ω^3, слагаемые -ω(t) и ω(t+h) переставить нельзя. Вычислим Δ ω и $\frac{\Delta\omega}{h}$, используя операции на одуле, из п. 2. Приращение функции равно:

$$\Delta\omega = -\omega + \omega(t+h) = \qquad ,$$

где $x(t+h) - x(t) = u$. Отношение приращения функции к приращению аргумента равно

$$= \frac{1}{h}\Delta\omega = (\frac{u}{h}, y(t+h) - y\cos u + z\sin u +$$

$$+ \frac{\sin\frac{(\frac{1}{h}-1)u}{2}}{\sin\frac{h}{2}}((y(t+h) - y\cos u + z\sin u)\cos\frac{u}{2h} - (z(t+h) - y\sin u - z\cos u)\sin\frac{u}{2h}),$$

$$z(t+h)-y\sin u-z\cos u+\frac{\sin\dfrac{(\frac{1}{h}-1)u}{2}}{\sin\dfrac{h}{2}}((y(t+h)-y\cos u+z\sin u)\sin\frac{u}{2h}+$$

$$+(z(t+h)-y\sin u-z\cos u)\cos\frac{u}{2h}))\,.$$

Ввиду непрерывности функции из h→0 следует u→0 и $\lim\limits_{h\to 0}\frac{u}{h}=x'(t)$. Убеждаемся, что

$$\boxed{}\infty,$$

а это означает, что не существует предела $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\Delta\omega}{h}$. Таким образом, не существует производной функции одулярной функции ω(t) со значениями в осцилляторном одуле Ω^3, иными словами, *осцилляторный одуль недифференцируем*.

Список литературы

1. *Сабинин Л.В.* Одули как новый подход к геометрии со связностью // ДАН СССР. 1977. № 5. С.800-803.
2. *Долгарев А.И.* ЕМ-пространства: Дис.... канд. физ.-мат. наук. Красноярск: КГПИ, 1991. 95 с.
3. *Долгарев А.И.* Растран в алгебре, геометрии, физике. Одулярная геометрия // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. № 16. С. 96-108.
4. *Долгарев А.И.* Кривые одулярного пространства на нильпотентной группе Ли // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т.5. Актуальные проблемы математики и механики: Материалы Междунар. конф. Казань, 2000. С. 75-76.
5. *Долгарев А.И.* Поверхности одулярного пространства на нильпотентной группе Ли // Междунар. шк.-семин. по геометрии и анализу, посв. 90-летию Н.В.Ефимова: Тез. докл. Ростов н/Д., 2000. С. 32-33.
6. *Долгарев А.И.* Одули и одулярные пространства на группах Ли // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Материалы шк.-конф., посвящ. 130-летию со дня рожд. Д.Ф. Егорова. Казань, 1999. С.82-83.
7. *Скотт П.* Геометрии на трёхмерных многообразиях. М.: Мир, 1986. 168 с.
8. *Левичев А.В.* Однородная хроногеометрия. I. Новосибирск: НГУ, 1991. 52 с.

9. *Левичев А.В.* Некоторые методы исследования приченной структуры однородных лоренцевых многообразий. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1986. 40 с. Препринт № 20.

10. *Долгарев А.И.* Дифференцирование одулярных функций // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. Київ: Ін-т математики НАН України, 1995. №. 10. С. 57-79.

A.I. Dolgarew

NON-DIFFERENTIABLE ODULE

.

The presence of exterior operation on an odule (generalization of the module) allows determine derivation of odular functions, as generalization of derivation of vectorial functions. A differential odular (nonlinear) geometry with tangents by map in an odule occurs. It turns out that, not for any odule odular functions differentiable. The example of such odule is given in this paper.

УДК 514.76

А.И. Долгарев

(Пензенский государственный педагогический университет)

НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЙ ОДУЛЬ

Наличие внешней операции на одуле (обобщении модуля) позволяет определить дифференцирование одулярных функций, как обобщение дифференцирования векторных функций. Возникает дифференциальная одулярная (нелинейная) геометрия с касательным отображением в одуль. Оказывается, не для всякого одуля одулярные функции дифференцируемы. В заметке приведен пример такого одуля.

Одуль определяется на алгебраической структуре с внутренней бинарной операцией посредством введения внешней операции. В частности, одуль может быть модулем и линейным пространством. Одули введены Л.В. Сабининым [1], в 1977 году в общем случае они определены на квазигруппах.

Операции на линейном пространстве **L** над полем **F** позволяют ввести дифференцирование векторных функций. Внутренняя операция используется для нахождения приращения $\Delta\vec{r}$ функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$, с использованием внеш-