УДК 514.764.3

Т. Г. Аленина

(Чувашский государственный педагогический университет, г. Чебоксары)

РЕГУЛЯРНОЕ ГИПЕРПОЛОСНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ АФФИННО-МЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ

Работа посвящена изучению двойственных пространств аффинно-метрической связности на регулярном гиперполосном распределением m-мерных линейных элементов H в пространстве аффинно-метрической связности.

В работе индексы принимают следующие значения:

$$I,J,S,T,K,L=\overline{0,n};\ I,J,S,T,K,L=\overline{1,n};$$

$$i,j,k,l,s,t=\overline{1,m};\ u,v,w,x,z=\overline{m+1,n-1};\ \alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1,n}.$$

Рассмотрим пространство аффинной связности $A_{n,n}$, определяемое системой $n(n+1)$ форм Пфаффа $\{\theta^I,\theta_J^I\}$, подчиненных структурным уравнениям [3]

$$D\theta^I=\theta^K\wedge\theta_K^I+\frac{1}{2}r_{ST}^I\theta^S\wedge\theta^T,$$
$$D\theta_J^I=\theta_J^K\wedge\theta_K^I+\frac{1}{2}r_{JST}^I\theta^S\wedge\theta^T, \tag{1}$$

где каждая из систем функций $\{r_{ST}^I\}$, $\{r_{JST}^I\}$ представляет собой тензор — соответственно тензор кручения и тензор кривизны пространства аффинной связности $A_{n,n}$.

Согласно работе [4], с пространством $A_{n,n}$ ассоциируется пространство проективной связности $P_{n,n}$, определяемое системой из $(n+1)^2$ пфаффовых форм $\{\omega_{\bar J}^{\bar I}\}$

$$\omega_0^I = \theta^I, \omega_0^0 = -\frac{1}{n+1}\theta_K^K, \omega_J^I = \theta_J^I - \frac{1}{n+1}\delta_J^I\theta_K^K, \omega_J^0 = 0, \qquad (2)$$

удовлетворяющих структурным уравнениям

$$D\omega_{\bar{J}}^{\bar{I}} = \omega_{\bar{J}}^{\bar{K}} \wedge \omega_{\bar{K}}^{\bar{I}} + \frac{1}{2}R_{\bar{J}ST}^{\bar{I}}\omega_0^S \wedge \omega_0^T, \ \omega_{\bar{K}}^{\bar{K}} = 0,$$

где тензор кривизны-кручения $R_{\bar{J}ST}^{\bar{I}}$ пространства $\mathrm{P}_{n,n}$ имеет строение

$$R_{0ST}^I = r_{ST}^I, R_{0ST}^0 = -\frac{1}{n+1}r_{KST}^K, R_{JST}^0 = 0, R_{JST}^I = r_{JST}^I - \frac{1}{n+1}\delta_J^I r_{KST}^K.$$

В пространстве $P_{n,n}$ в репере 1-го порядка рассмотрим регулярное гиперполосное распределение m-мерных линейных элементов H, $m < n-1$, определяемое системой [5]:

$$\omega_i^n = \Lambda_{iK}^n\omega_0^K, \omega_i^v = \Lambda_{iK}^v\omega_0^K, \omega_v^n = \mathrm{A}_{v\alpha}^n\omega_0^\alpha, \omega_v^i = \mathrm{N}_{vK}^i\omega_0^K; \qquad (3)$$

при этом будем говорить, что распределение H задано в исходном пространстве аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$.

Продолжая уравнения системы (3_1), (3_3), имеем:

$$\nabla\Lambda_{ij}^n + \Lambda_{ij}^n\omega_0^0 = \Lambda_{ijL}^n\omega_0^L, \ \nabla A_{vu}^n + A_{vu}^n\omega_0^0 = A_{vuL}^n\omega_0^L. \qquad (4)$$

Предполагая распределение H в $P_{n,n}$ *регулярным* [5], то есть $\Lambda \overset{def}{=} \left|\Lambda_{ij}^n\right| \neq 0$, $A \overset{def}{=} \left|A_{uv}^n\right| \neq 0$, введем в рассмотрение обращенные тензоры Λ_n^{ik}, A_n^{uv}, компоненты которых определяются из соотношений

$$\Lambda_{ik}^n\Lambda_n^{kj} = \Lambda_{ki}^n\Lambda_n^{jk} = \delta_i^j, \mathrm{A}_{uw}^n\mathrm{A}_n^{wv} = \mathrm{A}_{wu}^n\mathrm{A}_n^{vw} = \delta_u^v$$

и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla\Lambda_n^{ij} - \Lambda_n^{ij}\omega_0^0 = -\Lambda_n^{is}\Lambda_n^{tj}\Lambda_{stL}^n\omega_0^L, \ \nabla A_n^{uv} - A_n^{uv}\omega_0^0 = -A_n^{uw}A_n^{zv}A_{wzL}^n\omega_0^L.$$

Функции Λ, A и $\Phi \overset{def}{=} \Lambda \cdot A$ есть относительные инварианты первого порядка; например,

$$d\ln\Phi + (n+1)(\omega_0^0 + \omega_n^n) = \Phi_K \omega_0^K , \qquad (5)$$

где $A_K = A_n^{vu} A_{uvK}^n$, $\Lambda_K = \Lambda_n^{ji}\Lambda_{ijK}^n$, $\Phi_K = \Lambda_K + A_K$.

Продолжая уравнение (5), имеем

$$\nabla\Phi_K + \Phi_K \omega_0^0 - (n+1)\left(\Lambda_{sK}^n \omega_n^s + \delta_K^\alpha A_{u\alpha}^n \omega_n^u\right) = \Phi_{KL}\omega_0^L ,$$

где $2\Phi_{[KL]} = \Phi_J R_{0KL}^J - (n+1)(R_{0KL}^0 + R_{nKL}^n)$.

Следуя монографии [5], рассмотрим новую систему из $(n+1)^2$ форм Пфаффа $\overline{\omega}_{\bar{J}}^{\bar{I}}$:

$$\overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0 - \frac{1}{n+1}\Phi_K \omega_0^K ,\ \overline{\omega}_n^n = \omega_n^n - \frac{1}{n+1}\Phi_K \omega_0^K ,\ \overline{\omega}_0^n = \omega_0^n ,$$

$$\overline{\omega}_0^i = \omega_0^i + \Lambda_n^{ik}\Lambda_{k\alpha}^n \omega_0^\alpha ,\ \overline{\omega}_0^v = \omega_0^v + A_n^{vw} A_{wn}^n \omega_0^n ,\ \overline{\omega}_i^0 = \Lambda_{ki}^n \omega_n^k ,$$

$$\overline{\omega}_i^v = -\Lambda_{ki}^n A_n^{vw} \omega_w^k ,\ \overline{\omega}_i^n = -\Lambda_{ki}^n \omega_0^k ,\ \overline{\omega}_n^i = -\Lambda_n^{ik}\omega_k^0 = 0 ,\ \overline{\omega}_v^0 = A_{wv}^n \omega_n^w ,$$

$$\overline{\omega}_n^0 = \omega_n^0 = 0 ,\ \overline{\omega}_n^v = -A_n^{vw}\omega_w^0 = 0 ,\ \overline{\omega}_v^i = -A_{wv}^n \Lambda_n^{ik}\omega_k^w , \qquad (6)$$

$$\overline{\omega}_i^j = \omega_i^j + \left(\Lambda_n^{js}\Lambda_{siK}^n - \frac{1}{n+1}\delta_i^j \Phi_K\right)\omega_0^K ,\ \overline{\omega}_v^n = -A_{wv}^n \omega_0^w ,$$

$$\overline{\omega}_v^u = \omega_v^u + \left(A_n^{uw} A_{wvK}^n - \frac{1}{n+1}\delta_v^u \Phi_K\right)\omega_0^K .$$

Система форм (6) удовлетворяет структурным уравнениям Картана — Лаптева [1; 2]:

$$D\overline{\omega}_{\bar{J}}^{\bar{I}} = \overline{\omega}_{\bar{J}}^{\bar{K}} \wedge \overline{\omega}_{\bar{K}}^{\bar{I}} + \frac{1}{2}\overline{R}_{\bar{J}ST}^{\bar{I}}\overline{\omega}_0^S \wedge \overline{\omega}_0^T ,\ \overline{\omega}_{\bar{K}}^{\bar{K}} = 0 . \qquad (7)$$

Следовательно, формы $\overline{\omega}_{\bar{J}}^{\bar{I}}$ являются формами связности нового пространства проективной связности $\overline{P}_{n,n}$.

Преобразование $J : \omega_{\bar{J}}^{\bar{I}} \to \overline{\omega}_{\bar{J}}^{\bar{I}}$ форм проективной связности по закону (6) является инволютивным, то есть $J \equiv J^{-1}$. Действительно, согласно соотношениям (6), имеем

$$\overline{\omega}_i^n = \overline{\Lambda}_{iK}^n \overline{\omega}_0^K ,\ \overline{\omega}_i^v = \overline{\Lambda}_{iK}^v \overline{\omega}_0^K ,\ \overline{\omega}_v^n = \overline{A}_{v\alpha}^n \overline{\omega}_0^\alpha ,\ \overline{\omega}_v^i = \overline{N}_{vK}^i \overline{\omega}_0^K ,$$

где, например,

$$\overline{\Lambda}^n_{ik} = -\Lambda^n_{ki}, \overline{\Lambda}^n_{iu} = \Lambda^n_{ki}\Lambda^{ks}_n\Lambda^n_{su}, \overline{\Lambda}^n_{in} = \Lambda^n_{ki}\Lambda^{ks}_n(\Lambda^n_{sn} - \Lambda^n_{sv}A^{vw}_n A^n_{wn}),$$
$$\overline{A}^n_{vw} = -A^n_{wv},\ \ \overline{A}^n_{vn} = A^n_{wv}A^{wu}_n A^n_{un}. \tag{8}$$

Дифференциальные уравнения (4) в силу (6), (8) можно переписать в виде

$$d\overline{\Lambda}^n_{ij} + \overline{\Lambda}^n_{ij}(\overline{\omega}^0_0 + \overline{\omega}^n_n) - \overline{\Lambda}^n_{is}\overline{\omega}^s_j - \overline{\Lambda}^n_{sj}\overline{\omega}^s_i = \overline{\Lambda}^n_{ijL}\overline{\omega}^L_0,$$
$$d\overline{A}^n_{uv} + \overline{A}^n_{uv}(\overline{\omega}^0_0 + \overline{\omega}^n_n) - \overline{A}^n_{uw}\overline{\omega}^w_v - \overline{A}^n_{wv}\overline{\omega}^w_u = \overline{A}^n_{uvL}\overline{\omega}^L_0,$$

где

$$\overline{\Lambda}^n_{ijl} = \Lambda^n_{si}\Lambda^{st}_n\Lambda^n_{tjl}, \overline{\Lambda}^n_{iju} = -\Lambda^{lk}_n\Lambda^n_{ku}\overline{\Lambda}^n_{ijl} + \Lambda^n_{si}\Lambda^{st}_n\Lambda^n_{tju},$$
$$\overline{\Lambda}^n_{ijn} = -\Lambda^{lk}_n\Lambda^n_{kn}\overline{\Lambda}^n_{ijl} - A^{zw}_n A^n_{wn}\overline{\Lambda}^n_{ijz} + \Lambda^n_{si}\Lambda^{st}_n\Lambda^n_{tjn}, \tag{9}$$
$$\overline{A}^n_{uvl} = A^n_{xu}A^{xw}_n A^n_{wvl}, \overline{A}^n_{uvx} = -\Lambda^{lj}_n\Lambda^n_{jx}\overline{A}^n_{uvl} + A^n_{zu}A^{zw}_n A^n_{wvx},$$
$$\overline{A}^n_{uvn} = -\Lambda^{lj}_n\Lambda^n_{jn}\overline{A}^n_{uvl} - A^{zw}_n A^n_{wn}\overline{A}^n_{uvz} + A^n_{xu}A^{xw}_n A^n_{wvn}.$$

Пространства $P_{n,n}$ и $\overline{P}_{n,n}$ двойственны [5] относительно инволютивного преобразования $J: \omega^{\bar I}_{\bar J} \to \overline{\omega}^{\bar I}_{\bar J}$ форм связности по закону (6). Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Регулярное гиперполосное распределение* m*-мерных линейных элементов* H*, заданное в пространстве* $\mathrm{A}_{n,n}$*, индуцирует: 1) пространство проективной связности* $\overline{P}_{n,n}$*, двойственное ассоциированному с* $\mathrm{A}_{n,n}$ *пространству проективной связности* $P_{n,n}$*, причем пространства* $P_{n,n}$ *и* $\overline{P}_{n,n}$ *могут быть плоскими лишь одновременно; 2) многообразие* $\overline{\mathrm{H}}$ *в* $\overline{P}_{n,n}$ *двойственное исходному.*

Найдем условие, при котором пространство $\overline{P}_{n,n}$ является ассоциированным с некоторым пространством аффинной связности $\overline{\mathrm{A}}_{n,n}$ по схеме (2); в случае существования $\overline{\mathrm{A}}_{n,n}$ пространства $\mathrm{A}_{n,n}$ и $\overline{\mathrm{A}}_{n,n}$ являются двойственными по отношению друг к другу.

Если искомое пространство $\overline{\mathrm{A}}_{n,n}$ определяется системой форм Пфаффа $\{\overline{\theta}^I, \overline{\theta}^I_J\}$, то согласно схеме (2) должны выполнятся следующие соотношения:

$$\overline{\omega}_0^I = \overline{\theta}^I,\ \overline{\omega}_0^0 = -\frac{1}{n+1}\overline{\theta}_K^K,\ \overline{\omega}_J^I = \overline{\theta}_J^I - \frac{1}{n+1}\delta_J^I\overline{\theta}_K^K,\ \overline{\omega}_J^0 = 0. \quad (10)$$

Из последнего в силу (6) находим:

$$\begin{gathered} \overline{\theta}^i = \theta^i + \Lambda_n^{ik}\Lambda_{k\alpha}^n\theta^\alpha,\ \overline{\theta}^u = \theta^u + A_n^{uw}A_{wn}^n\theta^n,\ \overline{\theta}^n = \theta^n, \\ \overline{\theta}_j^i = \theta_j^i + \Lambda_n^{is}\Lambda_{sjK}^n\theta^K,\ \overline{\theta}_j^u = -\Lambda_{kj}^n A_n^{uw}\theta_w^k,\ \overline{\theta}_j^n = -\Lambda_{kj}^n\theta^k, \quad (11) \\ \overline{\theta}_v^i = -A_{wv}^n\Lambda_n^{ik}\theta_k^w, \overline{\theta}_v^u = \theta_v^u + A_n^{uw}A_{wvK}^n\theta^K,\ \overline{\theta}_v^n = -A_{wv}^n\theta^w, \\ \overline{\theta}_n^i = 0,\ \overline{\theta}_n^u = 0,\ \overline{\theta}_n^n = \theta_n^n. \end{gathered}$$

В силу регулярности гиперполосного распределения H из (6) следует, что равенства $\overline{\omega}_J^0 = 0$ эквивалентны соотношениям

$$\omega_n^k = \omega_n^v = 0.$$

Последние соотношения согласно системе (2) равносильны равенствам

$$\theta_n^k = \theta_n^v = 0. \quad (12)$$

Итак, если пространства $\mathrm{A}_{n,n}$ и $\overline{\mathrm{A}}_{n,n}$ двойственны, то на слоевые формы исходного пространства $\mathrm{A}_{n,n}$ накладывается условие (12).

Справедливо и обратное. Если слоевые формы пространства аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$ подчинены условию (12), то пространства $\mathrm{A}_{n,n}$ и $\overline{\mathrm{A}}_{n,n}$ являются двойственными. В силу (8), (9), (12) преобразование структурных форм по закону (11) является инволютивным, ибо

$$\begin{gathered} \theta^i = \overline{\theta}^i + \overline{\Lambda}_n^{ik}\overline{\Lambda}_{k\alpha}^n\overline{\theta}^\alpha,\ \theta^u = \overline{\theta}^u + \overline{A}_n^{uw}\overline{A}_{wn}^n\overline{\theta}^n,\ \theta^n = \overline{\theta}^n, \\ \theta_j^i = \overline{\theta}_j^i + \overline{\Lambda}_n^{is}\overline{\Lambda}_{sjK}^n\overline{\theta}^K, \theta_j^u = -\overline{\Lambda}_{kj}^n\overline{A}_n^{uw}\overline{\theta}_w^k, \theta_j^n = -\overline{\Lambda}_{kj}^n\overline{\theta}^k, \theta_v^i = -\overline{A}_{wv}^n\overline{\Lambda}_n^{ik}\overline{\theta}_k^w, \\ \theta_v^u = \overline{\theta}_v^u + \overline{A}_n^{uw}\overline{A}_{wvK}^n\overline{\theta}^K,\ \theta_v^n = -\overline{A}_{wv}^n\overline{\theta}^w,\ \theta_n^i = 0,\ \theta_n^u = 0,\ \theta_n^n = \overline{\theta}_n^n. \end{gathered}$$

Доказана

Теорема 2. *Для того чтобы при задании регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов* H *в* $\mathrm{A}_{n,n}$ *индуцировалось пространство аффинной связности* $\overline{\mathrm{A}}_{n,n}$, *двойственное исходному, необходимо и достаточно, чтобы слоевые формы* θ_n^k, θ_n^v *пространства* $\mathrm{A}_{n,n}$ *обращались в нуль.*

Допустим, что пространсво $\mathrm{A}_{n,n}$ является пространством аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$, то есть пространство $\mathrm{P}_{n,n}$, ассоциированное с $\mathrm{A}_{n,n}$, есть пространство проективно-метрической связности $K_{n,n}$ [6]; следовательно, в $\mathrm{P}_{n,n}$ задано поле локальных абсолютов

$$a_{IK}x^I x^K + \frac{1}{c}\left(g_{I0}x^I + cx^0\right)^2 = 0,\ a_{IK} = a_{KI},\, g_{I0} = g_{0I},\, c = const \neq 0,$$

$$dg_{I0} - g_{K0}\omega_I^K + c\cdot\omega_I^0(\equiv 0) = a_{IK}\omega_0^K, \tag{13}$$

$$da_{IJ} - a_{IK}\omega_J^K - a_{KJ}\omega_I^K = -\frac{1}{c}\left(a_{IK}g_{J0} + a_{JK}g_{I0}\right)\omega_0^K,$$

$$\omega_0^0 = -\frac{1}{c}g_{K0}\omega_0^K. \tag{14}$$

Из соотношений (6) с использованием (14) находим

$$\overline{\omega}_0^0 = -\frac{1}{c}\overline{g}_{K0}\overline{\omega}_0^K, \tag{15}$$

где

$$\overline{g}_{i0} = \overline{g}_{0i} = g_{i0} + \frac{c}{n+1}\Phi_i,\ \overline{g}_{u0} = \overline{g}_{0u} = -\overline{g}_{i0}\Lambda_n^{ik}\Lambda_{ku}^n + g_{u0} + \frac{c}{n+1}\Phi_u, \tag{16}$$

$$\overline{g}_{n0} = \overline{g}_{0n} = -\overline{g}_{i0}\Lambda_n^{ik}\Lambda_{kn}^n - \overline{g}_{u0}A_n^{uw}A_{wn}^n + g_{n0} + \frac{c}{n+1}\Phi_n.$$

Функции $\overline{g}_{K0}$ удовлетворяют уравнениям

$$d\overline{g}_{I0} - \overline{g}_{K0}\overline{\omega}_I^K - c\overline{\omega}_I^0 = \overline{a}_{IK}\overline{\omega}_0^K, \tag{17}$$

где, например,

$$\bar{a}_{ij} = a_{ij} + g_{\alpha 0}\Lambda^{\alpha}_{ij} + \frac{c}{n+1}\Phi_{ij} + \frac{1}{n+1}\Phi_{(i}g_{j)0} -$$
$$- \bar{g}_{l0}\Lambda^{ls}_{n}\Lambda^{n}_{sij} + \bar{g}_{u0}\Lambda^{n}_{si}A^{uw}_{n}N^{s}_{wj} + \bar{g}_{n0}\Lambda^{n}_{ji}.$$

Справедлива

Теорема 3. *Если в пространстве* $\mathrm{A}_{n,n}$ *без кручения, являющемся пространством аффинно-метрической связности, задано регулярное гиперполосное распределение* H *m-мерных линейных элементов, допускающее обращение в нуль тензора* a_{iu} *и индуцирующее тангенциальное пространство* $\overline{\mathrm{P}}_{n,n}$ *без кручения, то тензор* $\bar{a}_{JK}$ *симметричен.*

Доказаны

Теорема 4. *Если в условиях теоремы 3 обращается в нуль тензор* $M^{0}_{IKL} \overset{def}{=} g_{J0}R^{J}_{IKL} + cR^{0}_{IKL} = 0$, *то пространство* $\overline{P}_{n,n}$ *является пространством проективно-метрической связности* $\overset{0}{\overline{K}}_{n,n}$ *без кручения, двойственное пространству* $K_{n,n}$ *без кручения.*

Теорема 5. *Для того чтобы пространство проективно-метрической связности* $\overset{0}{\overline{K}}_{n,n}$ *без кручения было ассоциированным по схеме (2) с некоторым пространством аффинно-метрической связности* $\overset{0}{\overline{\mathrm{M}}}_{n,n}$ *без кручения, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (12) для пространства аффинно-метрической связности* $\overset{0}{\mathrm{M}}_{n,n}$*; при этом пространства* $\overset{0}{\mathrm{M}}_{n,n}$ *и* $\overset{0}{\overline{\mathrm{M}}}_{n,n}$ *являются двойственными пространствами аффинно-метрической связности без кручения.*

Список литературы

1. *Евтушик Л. Е.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. М.: ВИНИТИ, 1979. Т. 9.

2. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. мат. об-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.

3. *Лаптев Г. Ф.* О выделении одного класса внутренних геометрий, индуцированных на поверхности пространства аффинной связности // ДАН СССР. 1943. Т. 41. №8. С. 329—331.

4. *Столяров А. В.* Двойственная геометрия нормализованного пространства аффинной связности // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Чебоксары, 2005. №4. С. 21—27.

5. *Столяров А. В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. Чебоксары, 1994.

6. *Столяров А. В*. Пространство проективно-метрической связности // Изв. вузов. Математика. 2003. №11. С. 70—76.

T. Alenina

REGULAR HYPERBAND DICTRIBUTION
IN THE SPACE OF AFFINE-METRIC CONNECTION

The work is devoted to studying the dual spaces of affine-metric connection on the regular hyperband distribution of m-dimensional line elements H in the space of affine-metric connection.

УДК 514.75

О. О. Белова

(Российский государственный университет им. И. Канта, г. Калининград)

ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ СВЯЗНОСТИ В РАССЛОЕНИИ НАД ГРАССМАНОПОДОБНЫМ МНОГООБРАЗИЕМ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Рассмотрены четыре основных способа продолжений уравнений грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей и один обобщающий способ. Найдены структурные уравнения форм групповой связ-