УДК 514.76

Ю. И. Шевченко

(*Российский государственный университет им. И. Канта*)

КАСАТЕЛЬНЫЕ И СОПРИКАСАЮЩИЕСЯ ПРОСТРАНСТВА ПРОЕКТИВНОГО РАССЛОЕНИЯ

Введены деривационные формулы проективного расслоения, типовым слоем которого является проективное пространство. Продолжение этих формул позволило определить касательное проективное пространство и содержащее его соприкасающееся проективное пространство к проективному расслоению. Показано, что обыкновенное и двойственное ему касательные подпространства касательного проективного пространства пересекаются по слою проективного расслоения, а в сумме дают касательное пространство. Сечение и косечение проективного расслоения выделяют в каждом касательном пространстве фиксированные обыкновенное и двойственное касательные подпространства.

1. Проективная группа и ее подгруппы. Пусть m-мерное проективное пространство P_m отнесено к подвижному реперу $\{A, A_\alpha\}$ ($\alpha,\ldots=\overline{1,m}$), деривационные формулы вершин которого имеют вид:

$$dA=\vartheta A+\theta^\alpha A_\alpha,\ dA_\alpha=\vartheta A_\alpha+\theta_\alpha^\beta A_\beta+\theta_\alpha A. \tag{1}$$

Базисные формы θ^α, θ_α^β, θ_α проективной группы GP(m), эффективно действующей в пространстве P_m, удовлетворяют структурным уравнениям Картана (см., напр., [1, с. 173]):

$$D\theta^\alpha=\theta^\beta\wedge\theta_\beta^\alpha,\ D\theta_\beta^\alpha=\theta_\beta^\gamma\wedge\theta_\gamma^\alpha+\delta_\beta^\alpha\theta_\gamma\wedge\theta^\gamma+\theta_\beta\wedge\theta^\alpha, \\ D\theta_\alpha=\theta_\alpha^\beta\wedge\theta_\beta. \tag{2}$$

Вспомогательная форма ϑ подчиняется структурному уравнению

$$D\vartheta = \theta^{\alpha} \wedge \theta_{\alpha} . \qquad (3)$$

Из формулы (1_1) видно, что система уравнений $\theta^{\alpha}=0$ фиксирует точку A в пространстве P_m, превращая его в центропроективное пространство P_m^0. Эта система вполне интегрируема в силу структурных уравнений (2_1). Она выделяет в проективной группе GP(m) центропроективную (коаффинную) подгруппу $GA^*(m)$ со структурными уравнениями

$$D\hat{\theta}_{\alpha} = \hat{\theta}_{\alpha}^{\beta} \wedge \hat{\theta}_{\beta},\ D\hat{\theta}_{\beta}^{\alpha} = \hat{\theta}_{\beta}^{\gamma} \wedge \hat{\theta}_{\gamma}^{\alpha}\ \ (\hat{\theta} = \theta\big|_{\theta^{\alpha}=0}).$$

Двойственная вполне интегрируемая система уравнений $\theta_{\alpha}=0$ фиксирует гиперплоскость $P_{m-1} = [A_{\alpha}]$ в пространстве P_m, превращая его в коцентропроективное пространство P_m^{m-1} [2], изоморфное m-мерному расширенному аффинному пространству. В группе GP(m) выделяется аффинная подгруппа GA(m) со структурными уравнениями

$$D\breve{\theta}^{\alpha} = \breve{\theta}^{\beta} \wedge \breve{\theta}_{\beta}^{\alpha},\ D\breve{\theta}_{\beta}^{\alpha} = \breve{\theta}_{\beta}^{\gamma} \wedge \breve{\theta}_{\gamma}^{\alpha}\ \ (\breve{\theta} = \theta\big|_{\theta_{\alpha}=0}).$$

Если в проективном пространстве P_m зафиксировать 0-пару $\{A, P_{m-1}\}$ [3, с. 378] с помощью системы уравнений $\theta^{\alpha}=0$, $\theta_{\alpha}=0$, то получим парапроективное пространство $P_m^{0,m-1}$ [2], изоморфное расширенному центроаффинному пространству, в котором действует линейная группа GL(m) со структурными уравнениями

$$D\bar{\theta}_{\beta}^{\alpha} = \bar{\theta}_{\beta}^{\gamma} \wedge \bar{\theta}_{\gamma}^{\alpha}\ \ (\bar{\theta} = \theta\big|_{\theta^{\alpha}=0,\theta_{\alpha}=0}) .$$

Замечание 1. Проективное пространство P_m есть особое центропроективное многообразие [2], которое можно представить в виде расслоения $P_m^0(P_m)$, базой которого является пространство P_m, а каждый слой есть центропроективное пространство P_m^0, получаемое из пространства P_m при фиксации некоторой его точки.

2. Проективное расслоение и касательное пространство. Возьмем n-мерное гладкое многообразие M_n со структурными уравнениями Лаптева [4]

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j \quad (i,\ldots = m+1, \ldots, m+n), \tag{4}$$

обеспечивающими полную интегрируемость системы уравнений $\omega^i=0$, которая фиксирует некоторую его точку. Построим проективное расслоение $P_m(M_n)$ [5], прикрепляя гладким образом к каждой точке $x \in M_n$ проективное пространство $P_m(x)$, причем точку x не будем отождествлять ни с какой точкой соответствующего проективного пространства.

Замечание 2. Если плоскости $P_m(x)$ берутся из проективного пространства P_N $(N > m)$, то имеем погруженное проективное расслоение, или каноническое расслоение Ю. Г. Лумисте [5]. База M_n проективного расслоения $P_m(M_n)$, погруженного в проективное пространство P_N, есть пространство параметров n-мерного семейства плоскостей размерности m в пространстве P_N.

Обобщим деривационные формулы (1) для проективного расслоения $P_m(M_n)$:

$$dA = \omega A + \omega^\alpha A_\alpha + \omega^i A_i, \tag{5}$$

$$dA_\alpha = \omega A_\alpha + \omega^\beta_\alpha A_\beta + \omega_\alpha A + \omega^i A_{\alpha i}, \tag{6}$$

где новые точки A_i, $A_{\alpha i}$ совместно с точками A, A_α в общем случае являются базисными точками $[m+n(m+1)]$-мерного проективного пространства

$$P^1(x) = [A, A_\alpha, A_i, A_{\alpha i}], \tag{7}$$

содержащего пространство $P_m(x)$. Пространству $P^1(x)$ принадлежит 1-я дифференциальная окрестность слоя $P_m(x)$ расслоения $P_m(M_n)$, поэтому назовем его касательным пространством 1-го порядка к проективному расслоению $P_m(M_n)$, проходящим через слой $P_m(x)$.

Замечание 3. Разумеется, все точки $A, A_\alpha, \ldots$ в формулах (5), (6) зависят от x, что не пишется во избежание загромождения обозначений.

Обобщение структурных уравнений (2), (3) имеет вид [5]:

$$D\omega^{\alpha} = \omega^{\beta} \wedge \omega_{\beta}^{\alpha} + \omega^{i} \wedge \omega_{i}^{\alpha}, \qquad (8)$$

$$D\omega_{\beta}^{\alpha} = \omega_{\beta}^{\gamma} \wedge \omega_{\gamma}^{\alpha} + \delta_{\beta}^{\alpha}\omega_{\gamma} \wedge \omega^{\gamma} + \omega_{\beta} \wedge \omega^{\alpha} + \omega^{i} \wedge \omega_{\beta i}^{\alpha}, \qquad (9)$$

$$D\omega_{\alpha} = \omega_{\alpha}^{\beta} \wedge \omega_{\beta} + \omega^{i} \wedge \omega_{\alpha i}; \qquad (10)$$

$$D\omega = \omega^{\alpha} \wedge \omega_{\alpha} + \omega^{i} \wedge \omega_{i}. \qquad (11)$$

Получились структурные уравнения (4), (8) — (10) расслоения проективных реперов $G(M_n)$, присоединенного к проективному расслоению $P_m(M_n)$. Типовым слоем главного расслоения $G(M_n)$ над базой M_n является проективная группа $G=GP(m)$, действующая в проективном пространстве P_m. Расслоение $G(M_n)$ порождает два фактор-расслоения со следующими структурными уравнениями: 1) (4), (8) — проективное расслоение $P_m(M_n)$; 2) (4), (10) — двойственное проективное расслоение $P_m^*(M_n)$, типовой слой которого есть проективное пространство P_m^*, двойственное пространству P_m, т. е. многообразие Грассмана $Gr(m-1, m)$.

3. Соприкасающееся пространство. Найдем дифференциалы точек A_i, $A_{\alpha i}$. Для этого сначала продифференцируем внешним образом равенство (5) с помощью деривационных формул (6) и структурных уравнений (4), (8), (11). Ряд слагаемых взаимоуничтожится, а из оставшихся вынесем базисные формы ω^i:

$$(dA_i - \omega_i^j A_j - \omega^{\alpha} A_{\alpha i} - \omega_i^{\alpha} A_{\alpha} - \omega A_i - \omega_i A) \wedge \omega^i = 0.$$

Разрешим эти квадратичные уравнения по лемме Картана и перенесем все слагаемые, кроме первого, в правую часть:

$$dA_i = \omega A_i + \omega_i^j A_j + \omega_i A + \omega_i^{\alpha} A_{\alpha} + \omega^{\alpha} A_{\alpha i} + \omega^j A_{ij}, \qquad (12)$$

причем новые точки A_{ij} симметричны: $A_{[ij]} = 0$.

Аналогичным образом продолжим уравнения (6) с помощью формулы (5) и уравнений (4), (9) — (11):

$$dA_{\alpha i} = \omega A_{\alpha i} + \omega_\alpha^\beta A_{\beta i} + \omega_i^j A_{\alpha j} + \omega_{\alpha i} A + \omega_i A_\alpha + \omega_{\alpha i}^\beta A_\beta + \\ + \omega_\alpha A_i + \omega^j A_{\alpha ij} \quad (A_{\alpha[ij]} = 0)\,. \qquad (13)$$

Точки A_{ij}, $A_{\alpha ij}$ вместе с точками A, A_α, A_i, $A_{\alpha i}$ являются базисными точками соприкасающегося пространства — касательного проективного пространства 2-го порядка $P^2(x)=$ $=[P^1(x),\ A_{ij},\ A_{\alpha ij}]$ к расслоению $P_m(M_n)$, содержащего касательное пространство 1-го порядка $P^1(x)$, поэтому

$$\dim P^2(x)=m+n(m+1)+\tfrac{1}{2}n(n+1)(m+1).$$

Теорема 1. *Через каждый слой* $P_m(x)$ *проективного расслоения* $P_m(M_n)$ *проходят касательные проективные пространства* $P^1(x)$, $P^2(x)$,… *порядков* 1, 2,…, *причем* $P_m(x) \subset \subset P^1(x) \subset P^2(x) \subset$… *и в общем случае*

$$\dim P^1(x)=m+n(m+1),\ \dim P^2(x)=m+\tfrac{1}{2}n(n+3)(m+1).$$

4. Обыкновенное и двойственное касательные подпространства.

Из деривационных формул (5) видно, что уравнения

$$\omega^\alpha = 0\,,\ \omega^i = 0 \qquad (14)$$

фиксируют точку A. Структурные уравнения (4), (8) дают полную интегрируемость системы уравнений (14). Формула (5) показывает, что точка A с точностью до бесконечно малых 1-го порядка смещается в (m+n)-мерном пространстве

$$T_{m+n} = [A, A_\alpha, A_i], \qquad (15)$$

поэтому T_{m+n} есть обыкновенное касательное подпространство к проективному расслоению $P_m(M_n)$ в точке A. Из формул (5), (6), (12) при условиях (14) следует относительная инвариантность пространства T_{m+n}, причем $A \in P_m(x) \subset T_{m+n} \subset P^1(x)$.

Из деривационных формул (6) следует, что уравнения

$$\omega^i = 0\,,\ \omega_\alpha = 0\,, \qquad (16)$$

фиксируют гиперплоскость $P_{m-1}=[A_\alpha]$. Структурные уравнения (4), (10) дают полную интегрируемость системы уравнений (16). Формулы (6) показывает, что гиперплоскость P_{m-1} с точностью до бесконечно малых 1-го порядка смещается в m(n+1)-мерном пространстве

$$T_{m(n+1)} = [A_\alpha, A, A_{\alpha i}]. \qquad (17)$$

Назовем $T_{m(n+1)}$ двойственным касательным подпространством к проективному расслоению $P_m(M_n)$, проходящим через гиперплоскость P_{m-1}. Формулы (5), (6), (13) показывают относительную инвариантность пространства $T_{m(n+1)}$, причем $P_{m-1} \subset P_m(x) \subset T_{m(n+1)} \subset P^1(x)$. Из сопоставления линейных оболочек (7), (15), (17) вытекает

Теорема 2. *Обыкновенное касательное подпространство* T_{m+n} *к проективному расслоению* $P_m(M_n)$ *в точке A и двойственное касательное подпространство* $T_{m(n+1)}$*, проходящее через гиперплоскость* P_{m-1} *слоя* $P_m(x)$*, пересекаются по этому слою, а в сумме дают касательное пространство 1-го порядка* $P^1(x)$

$$T_{m+n} \cap T_{m(n+1)} = P_m(x),\ T_{m+n} + T_{m(n+1)} = P^1(x).$$

5. Сечение и косечение. Рассмотрим сечение проективного расслоения $P_m(M_n)$, т. е. гладкое отображение

$$\sigma\colon M_n \to P_m(M_n)\colon x \mapsto A \in P_m(x).$$

Сечение σ превращает проективное расслоение $P_m(M_n)$ в центропроективное расслоение $P_m^0(M_n)$. Под косечением σ* будем понимать сечение двойственного проективного расслоения $P_m^*(M_n)$

$$\sigma^*\colon M_n \to P_m^*(M_n)\colon x \mapsto P_{m-1} \subset P_m^*(x) = Gr(m-1, n).$$

Косечение σ* сужает проективное расслоение $P_m(M_n)$ до коцентропроективного расслоения $P_m^{m-1}(M_n)$ с типовым слоем — коцентропроективным пространством P_m^{m-1}. Сечение σ и косечение σ* зададим системами уравнений

$$\omega^\alpha = \Lambda_i^\alpha \omega^i,\ \omega_\alpha = \Lambda_{\alpha i}\omega^i. \qquad (18)$$

Из деривационных формул (5), (12) с учетом уравнений (18_1) следует, что в каждом касательном пространстве $P^1(x)$ к центропроективному расслоению $P_m^0(M_n)$ определено фиксированное подпространство T_{m+n}^{σ} — обыкновенное касательное подпространство в точке $A=\sigma(x)$. Формулы (6), (13), (18_2) показывают, что для коцентропроективного расслоения $P_m^{m-1}(M_n)$ в касательном пространстве $P^1(x)$ определено фиксированное подпространство $T_{m(n+1)}^{\sigma*}$ — двойственное касательное подпространство, проходящее через гиперплоскость $P_{m-1}=\sigma^*(x)$. Если в каждом слое $P_m(x)$ зафиксировать 0-пару $\{A,\ P_{m-1}\}$, то проективное расслоение $P_m(M_n)$ ограничивается до парапроективного расслоения $P_m^{0,m-1}(M_n)$ с типовым слоем — парапроективным пространством $P_m^{0,m-1}$. В последнем случае существуют оба подпространства T_{m+n}^{σ} и $T_{m(n+1)}^{\sigma*}$.

Замечание 4. Если в центропроективном расслоении $P_m^0(M_n)$ размерности типового слоя P_m^0 и базы M_n равны $m=n$ и центропроективное пространство $P_n^0(x)$ касается базы M_n в точке $A=x$, то такое центропроективное расслоение является центропроективным многообразием [2].

Список литературы

1. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М., 1986.

2. *Шевченко Ю. И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

3. *Розенфельд Б. А.* Многомерные пространства. М., 1966.

4. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семинара. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

5. *Лумисте Ю. Г.* Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях // Уч. зап. Тартуск. ун-та. 1965. №177. С. 6—42.

Yu. Shevchenko

TANGENTIAL AND OSCULATING
SPACES OF PROJECTIVE BUNDLE

The derivation formulas of projective bundle are entered, which typical fiber is the projective space. The continuation of these formulas has allowed to determine the tangential projective space and containing it the osculating projective space to the projective bundle. It is shown, the ordinary and dual to it tangential subspaces of the tangential projective space are crossed on a fiber of the projective bundle, and in the sum give the tangential space. The section and cosection of projective bundle allocate in every tangential space the fixed ordinary and dual tangential subspaces.

УДК 514.75

С. Н. Юрьева

(Российский государственный университет им. И. Канта)

СКОМПОНОВАННЫЕ ГИПЕРПЛОСКОСТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

Рассматривается специальный класс гиперплоскостных распределений (H-распределений) аффинного пространства A_n, в каждом центре X которого выполняются соотношения: $[\Lambda_{n-2}(X), L_1(X)]=H_{n-1}(X)$; $\Lambda_{n-2}(X)\cap L_1(X)=X$. Такие H-распределения называются скомпонованными [4], или кратко SH-распределениями. Дано задание SH-распределения в аффинном пространстве, и приведена теорема существования. Показано, что в дифференциальных окрестностях 1-го и 2-го порядка внутренним образом присоединяются нормали 1-го и 2-го рода H-, L-, Λ-подрасслоений. Введено в рассмотрение взаимнооднозначное соответствие между нормалями 1-го и 2-го