УДК 514.75

Н. В. Кондратьева

(Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары)

ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ГИПЕРПОЛОС К ИЗУЧЕНИЮ ДВОЙСТВЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ СЕТЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ

В проективном пространстве найдены приложения двойственной геометрии гиперполос $H_m \subset P_n$ к изучению двойственной геометрии многомерных поверхностей $V_m \subset P_n$ и сетей $\Sigma_m \subset V_m$.

Ключевые слова: гиперполоса, двойственность, связность, сеть, псевдофокус, псевдофокальная гиперплоскость.

Индексы на протяжении всей работы принимают следующие значения:

$$I, K, L = \overline{0, n}; \quad i, j, k, l, s, t = \overline{1, m};$$
$$\alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n}; \quad u, v, w, z = \overline{m+1, n-1}.$$

1. Рассмотрим n-мерное проективное пространство P_n, отнесенное к подвижному точечному реперу $R = \{A_I\}$ из $n+1$ аналитических точек A_I. Уравнения инфинитезимальных перемещений репера имеют вид

$$dA_I = \omega_I^K A_K; \tag{1}$$

здесь формы Пфаффа ω_I^K удовлетворяют структурным уравнениям проективного пространства [7]:

$$D\omega_I^K = \omega_I^L \wedge \omega_L^K, \omega_L^L = 0. \quad (2)$$

Определение 1 [2]. *m-мерной гиперполосой $H_m \subset P_n$ называется m-параметрическое многообразие плоских элементов (A, Π_{n-1}), причем точка A описывает поверхность V_m, а гиперплоскости $\Pi_{n-1}(A)$ касаются поверхности V_m в соответствующих точках $A \in V_m$. Поверхность V_m называется базисной поверхностью гиперполосы H_m, а гиперплоскости $\Pi_{n-1}(A)$ — главными касательными гиперплоскостями гиперполосы H_m.*

Рассмотрим m-мерную поверхность $V_m \subset P_n$; известно [3], что в репере первого порядка (т. е. вершины A_i репера $\{A_I\}$ расположены в касательной плоскости $T_m(A_0)$ к поверхности в точке $A_0 \in V_m$) ее дифференциальные уравнения имеют вид:

$$\omega_0^\alpha = 0. \quad (3)$$

Продолжая уравнения (3), имеем:

$$\omega_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \omega_0^j, \quad (4)$$

где совокупность функций $\{\Lambda_{ij}^\alpha\}$ образует симметричный тензор второго порядка.

Предположим, что $m < n-1$, т.е. поверхность $V_m \subset P_n$ отлична от гиперповерхности; в этом случае в работе [5] в предположении

$$n - m < \frac{(m+1)(m+2)}{6} \quad (5)$$

внутренним образом построен охват b_α, являющегося тензором третьего порядка:

$$db_\alpha - b_\beta \omega_\alpha^\beta + b_\alpha \omega_0^0 = b_{\alpha s} \omega_0^s. \quad (6)$$

Следует считать $m > 2$, ибо при $m = 2$ из (5) имеем $n = 3$, что противоречит неравенству $m < n - 1$.

Инвариантная гиперплоскость ξ_0, уравнение которой имеет вид $b_\alpha x^\alpha = 0$, является касательной гиперплоскостью к соприкасающейся гиперквадрике [5] в точке $A_0 \in V_m$ и содержит касательную плоскость $T_m(A_0)$. Следовательно, справедлива:

Теорема 1. *Поверхность* $V_m \subset P_n$ $(2 < m < n-1)$*, подчиненная условию (5), в дифференциальной окрестности третьего порядка порождает инвариантно присоединенную к ней гиперполосу* H_m*, для которой данная поверхность является базисной.*

Пусть $A_n \notin \xi_0$; это равносильно тому, что $b_n \neq 0$. Очевидно, что точки $B_v = A_v - \dfrac{b_v}{b_n} A_n$ находятся в общем положении и лежат в гиперплоскости ξ_0, т.е. $\xi_0 \equiv [A_0 A_i B_v]$.

В специализированном репере $\{A_0, A_i, B_v, A_n\}$ (вершины A_α репера $\{A_I\}$ выбираются таким образом, чтобы $(n-m)$-мерная плоскость $[A_0 A_\alpha]$ пересекала гиперплоскость ξ_0 по ее характеристике $\Pi_{n-m-1}(A_0)$, т.е. $B_v \in \Pi_{n-m-1}(A_0)$) уравнения гиперполосы $H_m \subset P_n$, ассоциированной с поверхностью $V_m \subset P_n$, запишутся в виде:

$$\Omega_0^\alpha = \Omega_v^n = 0, \quad \Omega_i^n = M_{ij}^n \Omega_0^j, \quad \Omega_i^u = M_{ij}^u \Omega_0^j, \quad \Omega_v^i = \Lambda_{vj}^i \Omega_0^j, \tag{7}$$

где $M_{ij}^n = \dfrac{1}{b_n} b_\alpha \Lambda_{ij}^\alpha$.

Теорема 2. *Гиперполоса* H_m*, ассоциированная с поверхностью* $V_m \subset P_n$ $(2 < m < n-1)$*, регулярна тогда и только тогда, когда тензор третьего порядка* $b_\alpha \Lambda_{ij}^\alpha$ *невырожден.*

Пусть регулярная гиперполоса $H_m \subset P_n$ нормализована двойственным образом [8] полями квазитензоров ν_n^i и ν_i^0:

$$\begin{aligned} d\nu_n^i - \nu_n^i \Omega_n^n + \nu_n^k \Omega_k^i + \Omega_n^i &= \nu_{ns}^i \Omega_0^s, \\ d\nu_i^0 - \nu_k^0 \Omega_i^k + \nu_i^0 \Omega_0^0 + \Omega_i^0 &= \nu_{is}^0 \Omega_0^s. \end{aligned} \tag{8}$$

При этом индуцируются две двойственные [6] аффинные связности ∇ и $\overline{\nabla}$ без кручения, определяемые соответственно системами форм Пфаффа:

$$\begin{gathered} \theta_0^i = \Omega_0^i, \quad \theta_i^j = \Omega_i^j - \delta_i^j \Omega_0^0 + \delta_i^j \nu_k^0 \Omega_0^k - \nu_n^j \Omega_i^n + \nu_i^0 \Omega_0^j, \\ \overline{\theta}_0^i = \theta_0^i = \Omega_0^i, \quad \overline{\theta}_i^j = \theta_i^j + [M_n^{js} M_{sik}^n - M_n^{jt} M_{ik}^n (\nu_t^0 - M_{ts}^n \nu_n^s) - \\ - \delta_i^j (\nu_k^0 - M_{ks}^n \nu_n^s) - \delta_k^j (\nu_i^0 - M_{is}^n \nu_n^s)] \Omega_0^k. \end{gathered} \tag{9}$$

Доказана следующая

Теорема 3. *На ассоциированной регулярной гиперполосе* $H_m \subset P_n$ $(2 < m < n-1)$, *двойственно нормализованной полями квазитензоров* ν_n^i, ν_i^0, *в касательном расслоении* $T_m(V_m)$ *индуцируются две двойственные аффинные связности без кручения* ∇ *и* $\overline{\nabla}$, *определяемые системами форм (9), причем эти связности сопряжены относительно поля тензора* M_{ij}^n *гиперполосы. Связность* $\overset{0}{\nabla}$, *средняя по отношению* ∇ *и* $\overline{\nabla}$, *является вейлевой с невырожденным метрическим тензором* M_{ij}^n; *она является римановой тогда и только тогда, когда обращается в нуль кососимметричный тензор* $T_{[st]}(\nu)$:

$$T_{[st]}(\nu) = \nu_{[st]}^0 - \nu_{n[s}^k M_{t]k}^n \equiv 0. \tag{10}$$

2. Инвариантное присоединение регулярной гиперполосы H_m к поверхности $V_m \subset P_n$ $(2 < m < n-1)$ позволяет изучать двойственную геометрию сетей на рассматриваемой поверхности; в частности, это приводит к построению

инвариантной нормализации V_m с помощью полей гармонических плоскостей сети $\Sigma_m \subset V_m$, слабо сопряженной относительно поля симметричного тензора $b_\alpha \Lambda^\alpha_{ij}$, а также дает возможность изучать различные подклассы сетей $\Sigma_m \subset V_m$.

Если точечный репер $R = \{A_I\}$ отнести к сети $\Sigma_m \subset V_m$ (AA_i — касательные к линиям сети), то согласно [1] имеем

$$\Omega^j_i = a^j_{ik} \Omega^k_0, \quad i \neq j. \tag{11}$$

В репере, отнесенном к сети, аналитическим условием сопряженности относительно поля конусов направлений $\varphi = M^n_{ik} \Omega^i_0 \Omega^k_0 = 0$ является $M^n_{ij} = 0, i \neq j$; ниже эту сеть $\Sigma_m \subset V_m$, в отличие от сопряженной сети на V_m $(\Lambda^\alpha_{ij} = 0, i \neq j)$, назовем *слабо сопряженной.*

Составим охват

$$q^i_n = \frac{1}{m-1} \sum_{l \neq i} a^i_{ll} M^{ll}_n, \quad \delta q^i_n + q^i_n (\pi^i_i - \pi^n_n) + \pi^i_n = 0. \tag{12}$$

Сравнивая уравнения (8) и (12), заключаем, что m полей квазитензоров q^i_n внутренним образом определяют поле инвариантных нормалей первого рода, которое называется *полем гармонических* $(n-m)$*-мерных плоскостей* слабо сопряженной сети.

Зная закон охвата объекта нормали первого рода q^i_n гиперполосы $H_m \subset P_n$, с использованием ее двойственного [6] образа построим внутренним образом определенную соответствующую нормаль второго рода q^0_i:

$$q^0_i = -\frac{1}{m-1} \sum_{l \neq i} a^l_{il}. \tag{13}$$

Поле нормалей q_i^0 служит полем гармонических $(m-1)$-мерных плоскостей слабо сопряженной сети $\Sigma_m \subset H_m$ в смысле [1].

Теорема 4. *Поля гармонических плоскостей слабо сопряженной сети* $\Sigma_m \subset V_m$ $(2 < m < n-1)$, *задаваемые полями квазитензоров* q_n^i *и* q_i^0, *определяют инвариантную нормализацию поверхности* $V_m \subset P_n$.

Определение 2. *Линия, принадлежащая базисной поверхности* V_m *гиперполосы* $H_m \subset P_n$, *называется* линией Дарбу, *если она в каждой своей точке касается инвариантного конуса направлений* $D_{isk}^n \Omega_0^i \Omega_0^s \Omega_0^k = 0$.

Доказана

Теорема 5. *Для ассоциированной регулярной гиперполосы* $H_m \subset P_n$, *несущей слабо сопряженную сеть* $\Sigma_m \subset H_m$, *поля ее гармонических плоскостей* q_n^i *и* q_i^0 *нормализуют гиперполосу взаимно тогда и только тогда, когда данная сеть есть сеть Дарбу.*

Для слабо сопряженной сети $\Sigma_m \subset H_m$ псевдофокусы F_i^j [1] и двойственные им псевдофокальные гиперплоскости η_i^j не зависят от выбора полей нормалей первого и второго родов; они определяются формулами:

$$\begin{aligned} F_i^j &= -a_{ij}^j A_0 + A_i, \quad i \neq j, \\ \eta_i^j &= M_n^{jj} M_{ii}^n a_{jj}^i \xi_0 + \xi_i, \quad i \neq j. \end{aligned} \tag{14}$$

Пусть регулярная гиперполоса $H_m \subset P_n$ нормализована полями квазитензоров ν_n^i и ν_i^0. Согласно (9, 11) условия параллельного перенесения направления $A_0 A_i$ касательной к i-й линии сети $\Sigma_m \subset H_m$ вдоль ее линии Ω_0^k в аффинных связностях ∇ и $\overline{\nabla}$ имеют соответственно вид:

$$a_{ik}^{j}-\nu_{n}^{j}M_{ik}^{n}+\nu_{i}^{0}\delta_{k}^{j}=0,i\neq j,$$
$$a_{ik}^{j}+M_{n}^{js}M_{sik}^{n}+\delta_{k}^{j}M_{si}^{n}\nu_{n}^{s}-M_{n}^{js}M_{ki}^{n}\nu_{s}^{0}=0,i\neq j. \tag{15}$$

Если соотношения (15) справедливы при $k=i$ для любого i (для любых $i\neq k$), то сеть называется *геодезической* (*чебышевской*) соответственно *первого* или *второго рода* относительно данной нормализации гиперполосы $H_m\subset P_n$.

Для слабо сопряженной сети $\Sigma_m\subset H_m$ условием ее геодезичности первого или второго рода соответственно является:

$$a_{ii}^{j}-\nu_{n}^{j}M_{ii}^{n}=0,i\neq j,$$
$$a_{ij}^{j}+\nu_{i}^{0}=0,i\neq j. \tag{16}$$

Аналогично рассматриваемая сеть $\Sigma_m\subset H_m$ называется чебышевской первого или второго рода тогда и только тогда, когда справедливы (соответственно) соотношения:

$$a_{il}^{j}+\delta_{l}^{j}\nu_{i}^{0}=0,i\neq j,l,$$
$$M_{n}^{jj}a_{jl}^{j}-\delta_{l}^{j}\nu_{n}^{i}=0,i\neq j,l. \tag{17}$$

Из условий (16) с учетом (11 — 13) непосредственно следует

Теорема 6. *Слабо сопряженная сеть $\Sigma_m\subset V_m$ есть сеть с совпавшими псевдофокусами (псевдофокальными гиперплоскостями) тогда и только тогда, когда относительно поля ее гармонических плоскостей q_i^0 (q_n^i) она является геодезической сетью второго (первого) рода.*

Замечание. Из соотношений (16, 17) непосредственно следует, что слабо сопряженная чебышевская сеть $\Sigma_m\subset V_m$ первого (второго) рода является геодезической второго (первого) рода, а следовательно, согласно теореме 6 она принадлежит к классу сетей с совпавшими псевдофокусами (псевдофокальными гиперплоскостями).

Список литературы

1. *Базылев В. Т.* О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства // Известия вузов. Матем. 1966. №2. С. 9—19.

2. *Вагнер В. В.* Теория поля локальных гиперполос // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. Вып. 8. М., 1950. С. 197—272.

3. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей // Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР. М., 1965. С. 5—64.

4. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

5. *Остиану Н. М.* О геометрии многомерной поверхности проективного пространства // Труды геометрического семинара. М., 1966. Т. 1. С. 239—263.

6. *Столяров А. В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. Чебоксары, 1994.

7. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии . М.; Л., 1948.

8. *Чакмазян А. В.* Двойственная нормализация // Докл. АН Арм. ССР. 1959. Т. 28, №4. С. 151—157.

N. Kondratyeva

APPLICATIONS OF THE THEORY OF HYPERSTRIPS TO STUDYING THE DUAL GEOMETRY OF NETWORKS ON THE SURFACE

Applications of dual geometry of hyperstrips $H_m \subset P_n$ to studying dual geometry of multidimensional surfaces $V_m \subset P_n$ and networks $\Sigma_m \subset V_m$ are found in projective space.