ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.I4 1983

УДК 5I4.75

Ю.И.Попов

# ВВЕДЕНИЕ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ НА РЕГУЛЯРНОМ ТРЕХСОСТАВНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$

Тройку распределений $\mathcal{H}_{\tau}$, $\mathcal{H}_m$, $\mathcal{H}_{n-1}$ соответственно $\tau$-мерных плоскостей $\Pi_{\tau}$, $m$-мерных плоскостей $\Pi_m$ и гиперплоскостей $\Pi_{n-1}$ проективного пространства $P_n$ с отношением инцидентности $(X \in \Pi_{\tau} \subset \Pi_m \subset \Pi_{n-1})$ их соответствующих элементов в общем центре $X$ назовем трехсоставным распределением $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1} \subset P_n$, в котором распределение 1-го рода $\mathcal{H}_{\tau}$ назовем базисным, а распределения 1-го рода $\mathcal{H}_m$ и $\mathcal{H}_{n-1}$ – оснащающими распределениями [6].

В настоящей работе инвариантным методом Г.Ф.Лаптева [1] строится аффинная связность распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$, ассоциированная с базисным распределением $\mathcal{H}_{\tau} \subset \mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$. Показано, что всякая инвариантная двойственная нормализация базисного распределения $\mathcal{H}_{\tau} \subset \mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ индуцирует четыре аффинные связности с кривизной и кручением, две из которых имеют одинаковое кручение.

На протяжении всего изложения индексы принимают следующие значения: $a, b, c, d = \overline{1,m}$; $p, q, r, s, t = \overline{1,\tau}$; $i, j, k, \ell = \overline{\tau+1,m}$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta = \overline{m+1,n-1}$; $u, v, w = \overline{\tau+1,n}$; $\eta, \vartheta, \chi, \lambda = \overline{m+1,n}$; $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L} = \overline{1,n}$.

1. Относительно репера $\{A_{\mathcal{J}}\}$ нулевого порядка $R^0$ $(X = A_0, \{A_p\} \subset \Pi_{\tau}; \{A_a\} \subset \Pi_m)$ дифференциальные уравнения распределения записываются следующим образом:

$$\omega^n_p = \Lambda^n_{p\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}_0, \quad \omega^n_i = \Lambda^n_{i\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}_0, \quad \omega^{\alpha}_p = M^{\alpha}_{p\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}_0,$$
$$\omega^{\alpha}_i = M^{\alpha}_{i\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}_0, \quad \omega^n_{\alpha} = A^n_{\alpha\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}_0, \quad \omega^i_p = L^i_{p\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}_0; \tag{1}$$



$$(\nabla_d\Lambda^n_{p\mathcal{K}} + \Lambda^n_{p\mathcal{K}}\omega^0_0 - \delta^n_{\mathcal{K}}\omega^0_p - L^i_{p[\mathcal{J}}\Lambda^n_{|i|\mathcal{K}]}\omega^{\mathcal{J}}_0 - M^{\alpha}_{p[\mathcal{J}}A^n_{|\alpha|\mathcal{K}]}\omega^{\mathcal{J}}_0) \wedge \omega^{\mathcal{K}}_0 = 0,$$

$$(\nabla_d\Lambda^n_{i\mathcal{K}} + \Lambda^n_{i\mathcal{K}}\omega^0_0 - \delta^n_{\mathcal{K}}\omega^0_i - \Lambda^n_{q\mathcal{K}}\omega^q_i - M^{\alpha}_{i[\mathcal{J}}A^n_{|\alpha|\mathcal{K}]}\omega^{\mathcal{J}}_0) \wedge \omega^{\mathcal{K}}_0 = 0,$$

$$(\nabla_d M^{\alpha}_{p\mathcal{K}} + M^{\alpha}_{p\mathcal{K}}\omega^0_0 - \delta^{\alpha}_{\mathcal{K}}\omega^0_p + \Lambda^n_{p\mathcal{K}}\omega^{\alpha}_n - L^i_{p[\mathcal{J}}M^{\alpha}_{|i|\mathcal{K}]}\omega^{\mathcal{J}}_0) \wedge \omega^{\mathcal{K}}_0 = 0,$$

$$(\nabla_d M^{\alpha}_{i\mathcal{K}} + M^{\alpha}_{i\mathcal{K}}\omega^0_0 - \delta^{\alpha}_{\mathcal{K}}\omega^0_i - M^{\alpha}_{p\mathcal{K}}\omega^p_i + \Lambda^n_{i\mathcal{K}}\omega^{\alpha}_n) \wedge \omega^{\mathcal{K}}_0 = 0, \tag{2}$$

$$(\nabla_d A^n_{\alpha\mathcal{K}} + A^n_{\alpha\mathcal{K}}\omega^0_0 - \delta^{\alpha}_{\mathcal{K}}\omega^0_{\alpha} - \Lambda^n_{q\mathcal{K}}\omega^q_{\alpha} - \Lambda^n_{i\mathcal{K}}\omega^i_{\alpha}) \wedge \omega^{\mathcal{K}}_0 = 0,$$

$$\nabla_d L^i_{p\mathcal{K}} + L^i_{p\mathcal{K}}\omega^0_0 - \delta^i_{\mathcal{K}}\omega^0_p + M^{\alpha}_{p\mathcal{K}}\omega^i_{\alpha} + \Lambda^n_{p\mathcal{K}}\omega^i_n) \wedge \omega^{\mathcal{K}}_0 = 0.$$

Оператор $\nabla_d$ действует по закону ковариантного дифференцирования, например, $\nabla_d\Lambda^n_{p\mathcal{K}} = d\Lambda^n_{p\mathcal{K}} - \Lambda^n_{s\mathcal{K}}\omega^s_p - \Lambda^n_{p\mathcal{J}}\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}} + \Lambda^n_{p\mathcal{K}}\omega^n_n$.

Имеет место теорема существования: "Трехсоставное распределение $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ существует с произволом в $(n-m+\tau)(m-\tau) + (\tau+1)(n-m) - 1$ функций $n$ аргументов".

Мы рассматриваем регулярные распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$: характеристика $X_{n-\tau-1}(A_0)$ гиперплоскости $\Pi_{n-1}(A_0)$ и плоскость $\Pi_{\tau}(A_0)$ при смещении центра $A_0$ вдоль кривых, принадлежащих базисному распределению $\mathcal{H}_{\tau}$, находятся в общем положении. Аналитически регулярность распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ равносильна невырожденности тензора $\Lambda^n_{pq}$ (2): $\Lambda = \det\|\Lambda^n_{pq}\| \neq 0$.

Согласно работе [4] при условии $\Lambda \neq 0$ возможна частичная канонизация репера $R^0$, при которой $\Lambda^n_{ip} = 0$, $A^n_{\alpha p} = 0$, а совокупность величин $\Lambda^n_{ij}$ (2) образует тензор 1-го порядка. В данной работе исследуем регулярное распределение $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$, для которого тензор $\Lambda^n_{ij}$ также невырожденный $\hat{\Lambda} = \det\|\Lambda^n_{ij}\| \neq 0$. При $\hat{\Lambda} \neq 0$ возможна дальнейшая канонизация [4] репера $R^0$, при которой $\Lambda^n_{\alpha j} = 0$. Полученный таким образом канонизированный репер, относительно которого $\Lambda^n_{ip} = A^n_{\alpha p} = \Lambda^n_{\alpha j} = 0$, назовем репером 1-го порядка $R^1$. Относительно репера $R^1$ дифференциальные уравнения трехсоставного регулярного распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ имеют вид:

$$\omega^n_p=\Lambda^n_{p\varkappa}\omega^{\varkappa}_0,\quad \omega^n_i=\Lambda^n_{iu}\omega^u_0,\quad \omega^{\alpha}_p=M^{\alpha}_{p\varkappa}\omega^{\varkappa}_0,$$

$$\omega^{\alpha}_i=M^{\alpha}_{i\varkappa}\omega^{\varkappa}_0,\quad \omega^p_{\alpha}=N^p_{\alpha\varkappa}\omega^{\varkappa}_0,\quad \omega^i_{\alpha}=N^i_{\alpha\varkappa}\omega^{\varkappa}_0,\tag{3}$$

$$\omega^n_{\alpha}=A^n_{\alpha\lambda}\omega^{\lambda}_0,\quad \omega^i_p=L^i_{p\varkappa}\omega^{\varkappa}_0,\quad \omega^p_i=L^p_{i\varkappa}\omega^{\varkappa}_0,$$

где, например,

$$\nabla_d N^p_{\alpha q}+N^p_{\alpha q}\omega^0_0-\omega^0_{\alpha}\delta^p_q=N^p_{\alpha q\varkappa}\omega^{\varkappa}_0,\tag{4}$$

$$\nabla_d L^p_{iq}+L^p_{iq}\omega^0_0-\omega^0_i\delta^p_q=L^p_{iq\varkappa}\omega^{\varkappa}_0.\tag{5}$$

2. Предположим, что базисное распределение $\mathcal{H}_{\tau}\subset\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ оснащено в смысле А.П.Нордена [3] двойственным образом полями квазитензоров $\nu^p_n, \nu^0_p$:

$$\nabla_d\nu^p_n+\omega^p_n=\nu^p_{n\varkappa}\omega^{\varkappa}_0,\qquad \nabla_d\nu^0_p+\omega^0_p=\nu^0_{p\varkappa}\omega^{\varkappa}_0.\tag{6}$$

Из уравнений (6) видно, что при данном выборе полей квазитензоров $\nu^p_n, \nu^0_p$ возможна частичная канонизация [4] репера 1-го порядка, при которой $\nu^p_n=0$, $\nu^0_p=0$. Формы $\omega^p_n, \omega^0_p$ при этом становятся главными:

$$\omega^p_n=c^p_{n\varkappa}\omega^{\varkappa}_0,\qquad \omega^0_p=a^0_{p\varkappa}\omega^{\varkappa}_0,\tag{7}$$

$$\nabla_d c^p_{n\varkappa}+c^p_{n\varkappa}\omega^0_0-\delta^p_{\varkappa}\omega^0_n-N^p_{\alpha\varkappa}\omega^{\alpha}_n-L^p_{i\varkappa}\omega^i_n=c^p_{n\varkappa J}\omega^J_0,\tag{8}$$

$$\nabla_d a^0_{p\varkappa}+a^0_{p\varkappa}\omega^0_0+M^{\alpha}_{p\varkappa}\omega^0_{\alpha}+L^i_{p\varkappa}\omega^0_i+\Lambda^n_{p\varkappa}\omega^0_n=a^0_{p\varkappa J}\omega^J_0,\tag{9}$$

$$c^p_{n[\varkappa J]}=a^0_{p[\varkappa J]}=0.$$

Геометрический смысл такой канонизации состоит в том, что точки $\{A_p\}$ репера $R^1$ помещены в инвариантную нормаль 2-го рода $\Pi_{\tau-1}(\nu^0_p)$, а точка $A_n$ принадлежит инвариантной нормали $N_{n-\tau}(\nu^p_n)$ 1-го рода распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$. В силу (3)-(9) формы $\omega^{\varkappa}_0$,

$$\overset{1}{\theta}{}^p_q=\omega^p_q-\delta^p_q\omega^0_0-N^p_{\alpha q}\omega^{\alpha}_0-L^p_{iq}\omega^i_0-c^p_{nq}\omega^n_0$$



удовлетворяют структурным уравнениям Картана-Лаптева [5]:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathcal{D}\omega^{\varkappa}_0=\omega^J_0\wedge(\omega^{\varkappa}_J-\delta^{\varkappa}_J\omega^0_0),\\
&\mathcal{D}\omega^p_0=\omega^q_0\wedge\overset{1}{\theta}{}^p_q+\tfrac{1}{2}\overset{1}{R}{}^p_{\varkappa J}\omega^{\varkappa}_0\wedge\omega^J_0,\\
&\mathcal{D}\overset{1}{\theta}{}^p_q=\overset{1}{\theta}{}^s_q\wedge\overset{1}{\theta}{}^p_s+\tfrac{1}{2}\overset{1}{R}{}^p_{q\varkappa J}\omega^{\varkappa}_0\wedge\omega^J_0,
\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{1}{R}{}^p_{in}=L^p_{in}-c^p_{ni},\ \overset{1}{R}{}^p_{\alpha i}=N^p_{\alpha i}-L^p_{i\alpha},\ \overset{1}{R}{}^p_{ij}=L^p_{ij}-L^p_{ji},\\
&\overset{1}{R}{}^p_{\alpha\beta}=N^p_{\alpha\beta}-N^p_{\beta\alpha},\ \overset{1}{R}{}^p_{\alpha n}=N^p_{\alpha n}-c^p_{n\alpha},\ \overset{1}{R}{}^p_{q\varkappa}=0,
\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}
\overset{1}{R}{}^p_{q\varkappa J}=2\big[&N^p_{[\varkappa|s|}N^s_{J]q}+L^p_{[\varkappa|s|}L^s_{J]q}+L^p_{[\varkappa|s|}N^s_{J]q}+N^p_{[\varkappa|s|}L^s_{J]q}-\\
&-\delta^n_{[\varkappa}N^p_{J]s}c^s_{nq}-\delta^n_{[\varkappa}L^p_{J]s}c^s_{nq}-c^p_{ns}L^s_{[\varkappa|q|}\delta^n_{J]}-\\
&-c^p_{ns}N^s_{[\varkappa|q|}\delta^n_{J]}+a^0_{q[\varkappa}\delta^p_{J]}+M^{\alpha}_{q[\varkappa}N^p_{|\alpha|J]}+L^i_{q[\varkappa}L^p_{|i|J]}+\\
&+\Lambda^n_{q[\varkappa}c^p_{|n|J]}-\delta^p_q a^0_{[\varkappa J]}-N^p_{\alpha q}M^{\alpha}_{[\varkappa J]}-L^p_{iq}N^i_{[\varkappa J]}+\\
&+N^p_{[\varkappa|q|J]}-L^p_{iq}L^i_{[\varkappa J]}+L^p_{[\varkappa|q|J]}-c^p_{nq}\Lambda^n_{[\varkappa J]}\\
&-c^p_{nq}A^n_{[\varkappa J]}-c^p_{nn}\Lambda^n_{q[\varkappa}\delta^n_{J]}-c^p_{nq[\varkappa}\delta^n_{J]}-\\
&-c^p_{ni}L^i_{q[\varkappa}\delta^n_{J]}-c^p_{n\alpha}M^{\alpha}_{q[\varkappa}\delta^n_{J]}\big],
\end{aligned}\tag{12}$$

где

$$\begin{aligned}
a^0_{u\varkappa}&=M^{\alpha}_{\beta\varkappa}=M^{\alpha}_{n\varkappa}=N^i_{a\varkappa}=N^i_{n\varkappa}=L^i_{u\varkappa}=L^p_{aq\varkappa}=\\
&=L^p_{nq\varkappa}=\Lambda^n_{u\varkappa}=A^n_{a\varkappa}=A^n_{n\varkappa}=N^p_{a\varkappa}=N^p_{n\varkappa}=L^p_{a\varkappa}=\\
&=L^p_{n\varkappa}=N^p_{aq}=N^p_{nq}=N^p_{aq\varkappa}=N^p_{nq\varkappa}=L^p_{\alpha q}=\\
&=L^p_{sq}=L^p_{nq}=0.
\end{aligned}$$

Следовательно, система форм $\{\omega_0^p;\ \overset{1}{\theta}{}_q^p\}$ в главном расслоенном многообразии $\{\omega_0^{\mathcal{J}};\ \overset{1}{\theta}{}_q^p\}$ определяет пространство с фундаментально-групповой аффинной связностью. Эту связность назовем первой аффинной связностью $\overset{1}{\nabla}$, индуцированной данной двойственной нормализацией базисного распределения $\mathcal{H}_\tau \subset \mathcal{H}^\tau_{m,n-1}$. Совокупность величин $\overset{1}{R}{}^p_{\mathcal{K}\mathcal{J}}$, $\overset{1}{R}{}^p_{q\mathcal{K}\mathcal{J}}$ образует соответственно тензор кручения и тензор кривизны в $(n+\tau^2)$-мерном главном расслоенном многообразии $\{\omega_0^{\mathcal{J}},\ \overset{1}{\theta}{}_q^p\}$:

$$\nabla_d \overset{1}{R}{}^p_{\mathcal{K}\mathcal{J}} + \overset{1}{R}{}^p_{\mathcal{K}\mathcal{J}}\,\omega_0^0 = (\dots)_{\mathcal{K}}\,\omega_0^{\mathcal{K}};\quad \nabla_d \overset{1}{R}{}^p_{q\mathcal{K}\mathcal{J}} + 2\overset{1}{R}{}^p_{q\mathcal{K}\mathcal{J}}\,\omega_0^0 = (\dots)_{\mathcal{K}}\,\omega_0^{\mathcal{K}}. \tag{13}$$

Тензор кривизны $\overset{1}{R}{}^p_{q\mathcal{K}\mathcal{J}}$ охватывает тензоры $\overset{1}{R}{}^p_{qst}$, $\overset{1}{R}{}^p_{q\alpha\beta}$, $\overset{1}{R}{}^p_{qij}$. В частности, компоненты тензора $\overset{1}{R}{}^p_{qst}$ имеют вид:

$$\overset{1}{R}{}^p_{qts} = 2\big[a^0_{q[t}\delta^p_{s]} + M^\alpha_{q[t}N^p_{|\alpha|s]} + L^i_{q[t}L^p_{|i|s]} - \delta^p_q\,a^0_{[ts]} + \Lambda^n_{q[t}C^p_{|n|s]} - N^p_{\alpha q}M^\alpha_{[ts]} - L^p_{iq}L^i_{[ts]} - C^p_{nq}\Lambda^n_{[ts]}\big]. \tag{14}$$

Свертывая тензор $\overset{1}{R}{}^p_{qts}$ по индексам $p$ и $s$, получим тензор

$$\overset{1}{R}_{qt} = \overset{1}{R}{}^p_{qtp} = \tau a^0_{qt} - a^0_{tq} + \tau M^\alpha_{qt}N_\alpha + \tau L^i_{qt}L_i - M^\alpha_{qp}N^p_{\alpha t} + \Lambda^n_{qt}C^p_{np} - L^i_{qp}L^p_{it} - \Lambda^n_{qp}C^p_{nt} - 2N^p_{\alpha q}\tau^\alpha_{tp} - 2C^p_{nq}\tau^n_{tp} - 2L^p_{iq}\tau^i_{tp}, \tag{15}$$

где $L_i = \frac{1}{\tau}L^p_{ip}$, $\tau^\alpha_{pq} = \frac{1}{2}(M^\alpha_{pq} - M^\alpha_{qp})$, $\tau^n_{pq} = \frac{1}{2}(\Lambda^n_{pq} - \Lambda^n_{qp})$, $\tau^i_{tp} = \frac{1}{2}(L^i_{tp} - L^i_{pt})$,
который назовем тензором Риччи аффинной связности $\overset{1}{\nabla}$.

3. Двойственная нормализация $(\nu^0_p, \nu^p_n)$ регулярного распределения $\mathcal{H}^\tau_{m,n-1}$ индуцирует не единственную аффинную связность. Согласно [2] другую аффинную связность можно определить при помощи новой системы форм $\{\omega_0^p,\ \overset{2}{\theta}{}^p_q = \overset{1}{\theta}{}^p_q + \overset{2}{\Gamma}{}^p_{q\mathcal{K}}\,\omega_0^{\mathcal{K}}\}$. Требование того, чтобы формы $\{\omega_0^p,\ \overset{2}{\theta}{}^p_q\}$ удовлетворяли структурным уравнениям



Картана-Лаптева [5], равносильно выполнению следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\nabla_d\Gamma^p_{qt} + \Gamma^p_{qt}\,\omega_0^0 = \overline{\Gamma}{}^p_{qt\mathcal{K}}\,\omega_0^{\mathcal{K}}, \tag{16}$$

$$\nabla_d\Gamma^p_{q\alpha} + \Gamma^p_{q\alpha}\,\omega_0^0 = \overline{\Gamma}{}^p_{q\alpha\mathcal{K}}\,\omega_0^{\mathcal{K}}, \tag{17}$$

$$\nabla_d\Gamma^p_{qi} + \Gamma^p_{qi}\,\omega_0^0 = \overline{\Gamma}{}^p_{qi\mathcal{K}}\,\omega_0^{\mathcal{K}}, \tag{18}$$

$$\nabla_d\Gamma^p_{qn} + \Gamma^p_{qn}\,\omega_0^0 - \Gamma^p_{q\alpha}\,\omega_n^\alpha - \Gamma^p_{qi}\,\omega_n^i = \overline{\Gamma}{}^p_{qn\mathcal{K}}\,\omega_0^{\mathcal{K}}. \tag{19}$$

Можно показать, что следующие охваты удовлетворяют соответственно уравнениям вида (16)-(19):

$$F^p_{qt} = \Lambda^{ps}_n(\Lambda^n_{sqt} - \Lambda^n_{s\alpha}M^\alpha_{qt} - \Lambda^n_{si}L^i_{qt} - \Lambda^n_{sn}\Lambda^n_{qt}),$$

$$F^p_{qi} = \Lambda^{pt}_n(\Lambda^n_{tqi} - \Lambda^n_{tn}\Lambda^n_{qi} - \Lambda^n_{tj}L^j_{qi} - \Lambda^n_{t\alpha}M^\alpha_{qi} + L^k_{tq}\Lambda^n_{ki}) + \delta^p_q L_i,$$

$$F^p_{q\alpha} = \Lambda^{pt}_n(\Lambda^n_{tq\alpha} - \Lambda^n_{tn}\Lambda^n_{q\alpha} - \Lambda^n_{ti}L^i_{q\alpha} - \Lambda^n_{t\beta}M^\beta_{q\alpha} + M^\beta_{tq}\Lambda^n_{\beta\alpha} + L^j_{tq}\Lambda^n_{j\alpha}) + \frac{1}{\tau}\delta^p_q N^t_{\alpha t}, \tag{20}$$

$$F^p_{qn} = \Lambda^{ps}_n(\Lambda^n_{sqn} - \Lambda^n_{sn}\Lambda^n_{qn} - \Lambda^n_{s\alpha}M^\alpha_{qn} - \Lambda^n_{si}L^i_{qn} + M^\alpha_{sq}\Lambda^n_{\alpha n} + L^i_{sq}\Lambda^n_{in} - \frac{1}{\tau}M^\alpha_{sq}N^t_{\alpha t} - L^i_{sq}L_i).$$

Итак, построив охват $\{F^p_{q\mathcal{K}}\}$ объекта аффинной связности $\{\Gamma^p_{q\mathcal{K}}\}$, мы внутренним инвариантным образом в окрестности 2-го порядка элемента распределения $\mathcal{H}^\tau_{m,n-1}$ определим вторую аффинную связность $\overset{2}{\nabla}$, которая задается системой форм $\{\omega_0^p,\ \overset{2}{\theta}{}^p_q = \overset{1}{\theta}{}^p_q + F^p_{q\mathcal{K}}\,\omega_0^{\mathcal{K}}\}$. Наконец, учитывая, что каждая из систем величин $\{\Gamma^p_{qt}\}$ и $\{\Gamma^p_{qi}, \Gamma^p_{q\alpha}, \Gamma^p_{qn}\}$ меняется по тензорному закону

(16)-(19), определим еще две аффинные связности $\overset{3}{\nabla}$ и $\overset{4}{\nabla}$ соответственно следующими формами (см. [7]):

$$\overset{3}{\nabla}: \quad \omega_0^p, \quad \overset{3}{\theta}{}_q^p = \overset{1}{\theta}{}_q^p + F_{qt}^p \omega_0^t, \quad (\Gamma_{qu}^p = F_{qu}^p = 0);$$

$$\overset{4}{\nabla}: \quad \omega_0^p, \quad \overset{4}{\theta}{}_q^p = \overset{1}{\theta}{}_q^p + F_{qu}^p \omega_0^u, \quad (\Gamma_{qt}^p = F_{qt}^p = 0).$$

Аналогично [7] доказывается, что аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{3}{\nabla}$ имеют одинаковые кручения, но, вообще говоря, различные тензоры кривизны.

Таким же образом, как это показано выше для базисного распределения $\mathcal{H}_\tau \subset \mathcal{H}^\tau_{m,n-1}$, строятся еще восемь аффинных связностей, ассоциированных с трехсоставным распределением $\mathcal{H}^\tau_{m,n-1}$.

Эти связности индуцируются двойственными нормализациями $\{\nu^0_\alpha, \nu^\alpha_n\}$ распределения $\mathcal{H}_{n-m-1}$ характеристик $X_{n-m-1}$ гиперплоскостей $\Pi_{n-1}$ и двойственными нормализациями $\{\nu^0_i, \nu^i_n\}$ распределения $\mathcal{H}_{m-\tau}$ плоскостей $\Pi_{m-\tau}$ $(\Pi_{m-\tau} \subset \Pi_m;\ \Pi_{m-\tau} \cup \Pi_\tau = \Pi_m)$.

## Список литературы


1. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-Тр.Моск.матем.о-ва, 1953, 2, с. 275-382.

2 Лаптев Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства.-Тр.4-го Всес.матем.съезда (1961), 2, 1964, с. 226-233.

3. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М.-Л., 1950.

4. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия. Rev. math. pures et appl. (RPR), 1962, 7, №2, с. 231-240.

5 Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин Г.И. Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева.-Тр.Геометр.семинара. М., ВИНИТИ, 1973, 4, с. 7-70.

6 Попов Ю.И. О проективно-дифференциальной геометрии двухсоставного гиперполосного распределения $H^\tau_{m,n-1}$.-Тезисы докладов 7-й Всес.конф. по совр.проблемам геом. Минск, 1979, с. 160.

7 Столяров А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения $m$-мерных линейных элементов.-Тр.Геометр.семинара. М., ВИНИТИ, 1975, 7, с. 117-151.



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып. 14 1983

УДК 514.75



О.С. Р е д о з у б о в а


# ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПАРЫ $T$ КОНГРУЭНЦИЙ С ЗАДАННЫМ СООТНОШЕНИЕМ АБСЦИСС ФОКУСОВ

Рассмотрим ортогональные пары $T$ конгруэнций в евклидовом пространстве $E_3$, у которых обратно пропорциональны абсциссы соответствующих фокусов.

Фокусы соответствующих прямых пары $T$ конгруэнций обозначим буквами $F_a$, $F'_a$ $(a=1,2)$. Прямые конгруэнции общих перпендикуляров $\{\tau\}$ пересекают соответствующие пары в точках $K_a$. К паре $T$ присоединяется подвижный ортонормированный репер $R=(O,\vec{e}_i)$, где $O \in \tau$, $\vec{e}_3 \parallel \tau$, $i=1,2,3$. Прямые $(F_a F'_a)$ образуют с $\vec{e}_1$ углы $\alpha_a$, угол между соответствующими прямыми равен $\alpha_1-\alpha_2$. Относительно репера $(O,\vec{e}_3)$ на прямой $\tau$ точки $K_a$ имеют координаты $h_a$; расстояние между соответствующими прямыми равно $|h_1-h_2|$. Направляющими ортами прямых $(F_a F'_a)$ являются векторы $\vec{\eta}_a = \vec{e}_1 \cos\alpha_a + \vec{e}_2 \sin\alpha_a$. По отношению к реперам $(K_a, \vec{\eta}_a)$ на прямых $(F_a, F'_a)$ фокусы $F_a$ и $F'_a$ имеют соответственно координаты $\rho_a$ и $\rho'_a$. Компоненты инфинитезимальных перемещений репера $R$ удовлетворяют условиям: $d\vec{O} = \omega^i \vec{e}_i$, $d\vec{e}_i = \omega^j_i \vec{e}_j$. Пары $T$ конгруэнций могут быть общими и специальными в соответствии с работой I, с.3.

Рассмотрим ортогональные пары $T$ конгруэнций, у которых абсциссы фокусов удовлетворяют условию $\rho_1\rho'_1 = \rho_2\rho'_2$. Будем обозначать такие пары через $\hat{T}$. В этом случае абсциссы соответствующих фокусов обратно пропорциональны: $\rho_1 : \rho_2 = \rho'_2 : \rho'_1$.

I. Допустим сначала, что пары $T$ конгруэнций общего вида (когда $\rho = \rho'_1\rho_2 - \rho_1\rho'_2 \neq 0$). Такие пары определяются