ми этой поверхности;б) существует расслоение от конгруэнции парабол к конгруэнции $\{A, \bar{e}_2\}$.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С. Конгруэнции парабол в эквиаффинной геометрии//Геометр.сб./Томский ун-т.Томск.1962.Т.161.С.76-86.

2. В е р б и ц к а я Л.А. Об одном классе конгруэнций парабол// Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч. тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1980.Вып.11.С.17-21.

3. Ж а р и к о в а Л.А. Конгруэнция парабол с фокальными многообразиями высших порядков//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч. тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1986.Вып.16. С.30-33.

УДК 514.75

ПОЛНАЯ СИСТЕМА ИНВАРИАНТОВ ДИАДЫ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПСЕВДОРИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.Г. И в а н о в
(Могилевский педагогический институт)

Методом Г.Ф.Лаптева [1] в работе автора [2] было дано тензорное описание ортонормированной пары векторных полей (диады) в пространстве (-времени) ${}^1V_4$. Продолжая изучение диады,мы строим в этой статье ее полную систему инвариантов первой дифференциальной окрестности в 4-мерном псевдоримановом пространстве ${}^mV_4$ ($0 \leq m \leq 4$) произвольной сигнатуры.

1. Уравнения инфинитезимальных смещений подвижного репера $(M, \bar{e}_i)$ ($i, j, \ldots \in \overline{1,4}$) локального касательного пространства ${}^mR_4(M)$ точки $M \in {}^mV_4$ имеют вид: $d\bar{M} = \omega^i \bar{e}_i$, $d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j$. Формы ω^i и ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры $D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i$, $D\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j + R^j_{ik\ell}\,\omega^k \wedge \omega^\ell$, где $R^j_{ik\ell}$ -тензор кривизны пространства ${}^mV_4$,и равенствам $\varepsilon_i \omega_i^j + \varepsilon_j \omega_j^i = 0$, вытекающим из условий ортонормированности векторов $\bar{e}_i$ ($\bar{e}_i^2 \equiv \varepsilon_i = \pm 1$).

Дифференциальные уравнения диады $\{\bar{e}_3, \bar{e}_4\}$ ($\alpha, \beta \in \overline{1,2}$) пространства ${}^mV_4$ имеют вид [2]:

$$\omega_\alpha^3 = \gamma_{\alpha i}^3 \omega^i, \quad \omega_\alpha^4 = \gamma_{\alpha i}^4 \omega^i, \quad \omega_4^3 = \gamma_{4i}^3 \omega^i; \tag{1}$$

$$\begin{cases} (d\gamma_{\alpha i}^3 - \gamma_{\beta i}^3 \omega_\alpha^\beta - \gamma_{\alpha j}^3 \omega_i^j + \gamma_{\alpha i}^4 \gamma_{4j}^3 \omega^j + R^3_{\alpha ij}\omega^j) \wedge \omega^i = 0, \\ (d\gamma_{\alpha i}^4 - \gamma_{\beta i}^4 \omega_\alpha^\beta - \gamma_{\alpha j}^4 \omega_i^j + \gamma_{\alpha i}^3 \gamma_{3j}^4 \omega^j + R^4_{\alpha ij}\omega^j) \wedge \omega^i = 0, \\ (d\gamma_{4i}^3 - \gamma_{4j}^3 \omega_i^j - \gamma_{\alpha i}^3 \gamma_{4j}^\alpha \omega^j + R^3_{4ij}\omega^j) \wedge \omega^i = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Система величин

$$(\gamma^3_{\alpha\beta},\ \gamma^4_{\alpha\beta},\ \gamma^3_{\alpha 3},\ \gamma^3_{\alpha 4},\ \gamma^4_{\alpha 4},\ \gamma^4_{\alpha 3},\ \gamma^3_{4\alpha},\ \gamma^3_{43},\ \gamma^3_{44}) \tag{3}$$

образует геометрический объект - фундаментальный объект первого порядка диады $\{\bar{e}_3, \bar{e}_4\}$. Это тензор,из которого выделяются перечисленные в (3) подтензоры.Их геометрическое и кинематическое истолкование также дано в работе [2].

2. Построим следующие скалярные величины:

$$\begin{cases} J_1 = \varepsilon_1 \gamma^3_{11} + \varepsilon_2 \gamma^3_{22}, \quad J_2 = (\gamma^3_{11})^2 + (\gamma^3_{22})^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 (\gamma^3_{(12)})^2, \\ J_3 = \gamma^3_{11}\gamma^4_{11} + \gamma^3_{22}\gamma^4_{22} + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 \gamma^4_{(12)}\gamma^3_{(12)}, \quad J_4 = \gamma^3_{[12]}, \\ J_5 = \varepsilon_1\gamma^4_{11} + \varepsilon_2\gamma^4_{22}, \quad J_6 = (\gamma^4_{11})^2 + (\gamma^4_{22})^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2(\gamma^4_{(12)})^2, \\ J_7 = \gamma^4_{[12]}, \quad J_8 = \varepsilon_1(\gamma^3_{13})^2 + \varepsilon_2(\gamma^3_{23})^2, \quad J_9 = \gamma^4_{11}(\gamma^3_{13})^2 + \\ + \gamma^4_{22}(\gamma^3_{23})^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\gamma^4_{(12)}\gamma^3_{13}\gamma^3_{23}, \quad J_{10} = \varepsilon_1(\gamma^3_{14})^2 + \varepsilon_2(\gamma^3_{24})^2, \\ J_{11} = \gamma^4_{11}(\gamma^3_{14})^2 + \gamma^4_{22}(\gamma^3_{24})^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\gamma^4_{(12)}\gamma^3_{14}\gamma^3_{24}, \\ J_{12} = \varepsilon_1(\gamma^4_{14})^2 + \varepsilon_2(\gamma^4_{24})^2, \quad J_{13} = \gamma^4_{11}(\gamma^4_{14})^2 + \gamma^4_{22}(\gamma^4_{24})^2 + \\ + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\gamma^4_{(12)}\gamma^4_{14}\gamma^4_{24}, \quad J_{14} = \varepsilon_1(\gamma^4_{13})^2 + \varepsilon_2(\gamma^4_{23})^2, \\ J_{15} = \gamma^4_{11}(\gamma^4_{13})^2 + \gamma^4_{22}(\gamma^4_{23})^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\gamma^4_{(12)}\gamma^4_{13}\gamma^4_{23}, \\ J_{16} = \varepsilon_1(\gamma^3_{41})^2 + \varepsilon_2(\gamma^3_{42})^2, \quad J_{17} = \gamma^4_{11}(\gamma^3_{41})^2 + \gamma^4_{22}(\gamma^3_{42})^2 + \\ + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\gamma^4_{(12)}\gamma^3_{41}\gamma^3_{42}, \quad J_{18} = \gamma^3_{43}, \quad J_{19} = \gamma^3_{44}. \end{cases} \tag{4}$$

Т е о р е м а. Система величин (4) образует полную систему инвариантов первой дифференциальной окрестности диады $\{\bar{e}_3, \bar{e}_4\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Инвариантность (в смысле Г.Ф.Лаптева) величин (4) сводится к простой проверке условий $dJ_1 = dJ_2 = \ldots = dJ_{19} = 0$ при нулевых главных формах (1) и учете квадратичных уравнений (2). Поскольку число построенных инвариантов в точности равно разности между количеством различных в общем случае величин (4) и числом вторичных параметров (=1),то остается лишь убедиться в функциональной независимости системы (4). При условии

$$\gamma^4_{(\alpha\beta)} = diag\,(\varepsilon_1\lambda_1,\ \varepsilon_2\lambda_2),\ \lambda_1 \neq \lambda_2\ ; \tag{5}$$

определитель девятнадцатого порядка

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_{19})}{\partial(\gamma^3_{\alpha\beta}, \overset{*}{\gamma}{}^4_{\alpha\beta}|_{\alpha\le\beta}, \gamma^3_{\alpha 3}, \dots, \gamma^3_{44})}\right)$$

равен (с точностью до знака) произведению следующих, вообще говоря, отличных от нуля определителей:

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3, \mathcal{I}_4)}{\partial(\gamma^3_{\alpha\beta})}\right) = \pm 2(\lambda_1 - \lambda_2)\gamma^3_{(12)},$$

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{I}_5, \mathcal{I}_6, \mathcal{I}_7)}{\partial(\gamma^4_{\alpha\beta}|_{\alpha\le\beta})}\right) = \pm 2(\lambda_1 - \lambda_2)\gamma^4_{12},$$

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{I}_8, \mathcal{I}_9)}{\partial(\gamma^3_{13}, \gamma^3_{23})}\right) = \pm 4(\lambda_1 - \lambda_2)\gamma^3_{13}\gamma^3_{23}, \dots,$$

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{I}_{16}, \mathcal{I}_{17})}{\partial(\gamma^3_{41}, \gamma^3_{42})}\right) = \pm 4(\lambda_1 - \lambda_2)\gamma^3_{41}\gamma^3_{42},$$

что и доказывает теорему.

Условие (5) означает, что у тензора $\gamma^4_{(\alpha\beta)}$ различные собственные значения λ_α и он уже отнесен к своим главным осям.

Библиографический список

1. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий// Тр. Моск. матем. о-ва/ ГИТТЛ. М., 1953. Т. 2. С. 275-382.

2. И в а н о в В.Г. Геометрия пары векторных полей в псевдоримановом пространстве// Вестн. Белорус. ун-та. Физ., матем. и мех. 1985. №3. С. 52-54.

УДК 514.76

ОБ АФФИННЫХ РАССЛОЕНИЯХ $A^{\tau}_{n,m}$ $(\tau < n,\ \tau < m)$

Е.Т. И в л е в

(Томский политехнический институт)

В статьях [1]-[3] изучались регулярные аффинные расслоения с n-мерной дифференцируемой базой M_n и m-мерными аффинными слоями A_m с заданными точечными сечениями и с заданной аффинной связностью C, причем $\tau = Rang\,[A^\alpha_i] = min\ (m,n)$.

В данной статье изучается аффинное расслоение $A^\tau_{n,m}$-расслоение $A_{n,m}$, у которого $\tau < m$ и $\tau < n$. Все построения носят локальный

характер, а функции, встречающиеся в статье, предполагаются аналитическими. Обозначения и терминология соответствует принятым в [1]-[3]. В дальнейшем символом ([k], (s)) будем обозначать формулу под номером s статьи [k].

1. Рассматривается аффинное расслоение $A_{n,m}$ в смысле [3] с n-мерной дифференцируемой базой M_n и m-мерными аффинными слоями A_m. При этом предполагается, что в расслоении $A_{n,m}$ задано точечное гладкое сечение $(u) \to B(u)$, $(u) \in M_n$, $B(u) \in A_m(u)$ и C-аффинная связность. Дифференциальные уравнения секущей n-поверхности M°_n с текущей точкой B записываются в виде ([3], (5)).

Рассмотрим на базе M_n кривую, проходящую через точку (u):

$$K(t):\ \theta^i = t^i\theta,\quad \mathcal{D}\theta = \theta\wedge\theta_1,\quad \nabla t^i - t^i\theta_1 = t^i_1\theta. \tag{1}$$

Из ([3], (2)-(5)) в силу (1) заключаем, что направлению $t = t^i(\bar{A}\vec{e}_i) \in L_n$, отвечающему касательной к кривой $k(t)$ в точке $(u) \in M_n$ в слое $A_m(u)$ расслоения $A_{n,m}$, соответствует направление $\tau = (\bar{B}\,\bar{\varepsilon}_\alpha)\tau^\alpha \in A_m(u)$, где

$$\tau^\alpha = A^\alpha_i t^i. \tag{2}$$

Это направление является касательным к развертке кривой $\overset{*}{k}(t)$ в слое $A_m(u)$, проходящей через точку B : $\overset{*}{k}(t)$: $\omega^\alpha = \tau^\alpha\theta$, в которую переходит кривая $K(t)$ при отображении $A_m(u+du) \to A_m(u)$ вдоль этой же кривой. Поэтому в дальнейшем направление τ будем называть разверткой направления $t \in L_n$ на слой A_m. Линейное подпространство $\overset{*}{L}(u) \subset A_m(u)$, $\overset{*}{L}(u) \ni B(u)$ точки $(u) \in M_n$ расслоения $A_{n,m}$ будем называть разверткой линейного подпространства $L(u) \subset L_n(u)$, $L_n(u) \ni A(u)$, если $\overset{*}{L}(u) = \{\tau(u) \mid \tau^\alpha(u) = A^\alpha_i(u)t^i(u),\ \tau(u) \in A_m(u)\}$.

2. О п р е д е л е н и е 1. Расслоением $A^\tau_{n,m}$ называется такое аффинное расслоение $A_{n,m}$ ($n>1$, $m>1$), у которого

$$\tau = Rang\,[A^\alpha_i] < min\ (n,m) \tag{3}$$

на базе M_n. В случае $\tau = min(n,m)$ аффинное расслоение $A_{n,m}$ ($n>1$, $m>1$) называется регулярным.

Из (3) вытекают следующие соотношения для элементов матрицы $[A^\alpha_i]$:

$$A^{\hat a}_{i_1} = A^{j_1}_{i_1} C^{\hat a}_{j_1},\quad A^{i_1}_{i_2} = A^{i_1}_{j_1} C^{j_1}_{i_2},\quad A^{\hat a}_{i_2} = C^{i_1}_{i_2} A^{\hat a}_{i_1},\quad \det\,[A^{j_1}_{i_1}] \neq 0, \tag{4}$$

$$(a, b, c, i_1, j_1, k_1 = \overline{1,\tau};\ i_2, j_2, k_2, \hat a, \hat b, \hat c = \overline{\tau+1, m};\ \alpha, \beta, \gamma = \overline{1,m}).$$

Здесь C^α_i -коэффициенты соответствующих линейных комбинаций. Проведем в слоях $A_m(u)$ и $L_n(u)$ точки $u \in M_n$ расслоений $A^\tau_{n,m}$ и L^1_n нижесле-