

**ПОСТРОЕНИЕ НОРМАЛИЗАЦИЙ НОРДЕНА
L-, E-ПОДРАССЛОЕНИЙ \mathcal{FH} -РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА**

Дано построение полей внутренних нормалей 1-го и 2-го рода Нордена L-, E-подрасслоений специального класса (\mathcal{FH} -распределения) регулярных трехсоставных распределений (\mathcal{H} -распределений) проективного пространства.

Norden 1st and 2nd kind inner normals of the L-, E-subbundle of a special class (\mathcal{FH} -distribution) of the regular threefold distributions (\mathcal{H} -distributions) of the projective space are constructed.

Ключевые слова: распределение, подрасслоение, квазинормаль, сопряженная система плоскостей, нормаль, нормализация.

Key words: distribution, subbundle, quasinormal, adjoint surface system, normal, normalization.

В статье использована схема индексов и терминология работ [1; 2].

1. Известно [2], что сильно сопряженное трехсоставное распределение проективного пространства (\mathcal{FH} -распределение) задается в репере 1-го порядка R_1 уравнениями

$$\begin{aligned} \omega_p^n &= \Lambda_{pq}^n \omega_0^{\hat{q}}, \quad \omega_p^\alpha = \Lambda_{pA}^\alpha \omega_0^{\hat{A}}, \quad \omega_\alpha^p = \Lambda_{\alpha A}^p \omega_0^{\hat{A}}, \\ \omega_i^n &= \Lambda_{ij}^n \omega_0^{\hat{j}}, \quad \omega_p^i = \Lambda_{pa}^i \omega_0^{\hat{a}}, \quad \omega_i^p = \Lambda_{ia}^p \omega_0^{\hat{a}}, \\ \omega_\alpha^n &= \Lambda_{\alpha\beta}^n \omega_0^{\hat{\beta}}, \quad \omega_i^\alpha = \Lambda_{i\hat{b}}^\alpha \omega_0^{\hat{b}}, \quad \omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha\hat{b}}^i \omega_0^{\hat{b}}, \end{aligned}$$

где компоненты фундаментального объекта второго порядка $\Gamma_2 = \{\Gamma_1; \Lambda_{\alpha\hat{A}}^p, \Lambda_{i\hat{a}}^p, \Lambda_{\alpha\hat{b}}^i\}$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \nabla \Lambda_{pq}^n + \Lambda_{pq}^n \omega_0^0 &= \Lambda_{pqL}^n \omega_0^L, \\ \nabla \Lambda_{pn}^n + \Lambda_{pn}^n \omega_0^0 - \Lambda_{pq}^n \omega_n^q - \omega_p^0 &= \Lambda_{pnL}^n \omega_0^L, \\ \nabla \Lambda_{ij}^n + \Lambda_{ij}^n \omega_0^0 &= \Lambda_{ijL}^n \omega_0^L, \\ \nabla \Lambda_{in}^n + \Lambda_{in}^n \omega_0^0 - \Lambda_{ij}^n \omega_n^j - \omega_i^0 &= \Lambda_{inL}^n \omega_0^L, \\ \nabla \Lambda_{\alpha\beta}^n + \Lambda_{\alpha\beta}^n \omega_0^0 &= \Lambda_{\alpha\beta L}^n \omega_0^L, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \nabla \Lambda_{\alpha n}^n + \Lambda_{\alpha n}^n \omega_0^0 - \Lambda_{\alpha \beta}^n \omega_n^\beta - \omega_\alpha^0 &= \Lambda_{\alpha n L}^n \omega_0^L, \\ \nabla \Lambda_{p \hat{A}}^\alpha + \Lambda_{p \hat{A}}^\alpha \omega_0^0 + \Lambda_{p \hat{q}}^n \delta_{\hat{A}}^{\hat{q}} \omega_n^\alpha - \delta_{\hat{A}}^\alpha \omega_p^0 &= \Lambda_{p \hat{A} L}^\alpha \omega_0^L, \\ \nabla \Lambda_{\alpha \hat{A}}^p + \Lambda_{\alpha \hat{A}}^p \omega_0^0 + \Lambda_{\alpha \hat{A}}^n \omega_n^p - \delta_{\hat{A}}^p \omega_\alpha^0 &= \Lambda_{\alpha \hat{A} L}^p \omega_0^L, \\ \nabla \Lambda_{i \hat{v}}^\alpha + \Lambda_{i \hat{v}}^\alpha \omega_0^0 + \Lambda_{i \hat{j}}^n \delta_{\hat{v}}^{\hat{j}} \omega_n^\alpha - \delta_{\hat{v}}^\alpha \omega_i^0 &= \Lambda_{i \hat{v} L}^\alpha \omega_0^L, \\ \nabla \Lambda_{\alpha \hat{v}}^i + \Lambda_{\alpha \hat{v}}^i \omega_0^0 + \Lambda_{\alpha \hat{v}}^n \omega_n^i - \delta_{\hat{v}}^i \omega_\alpha^0 &= \Lambda_{\alpha \hat{v} L}^i \omega_0^L, \\ \nabla \Lambda_{p \hat{a}}^i + \Lambda_{p \hat{a}}^i \omega_0^0 + \Lambda_{p \hat{q}}^n \delta_{\hat{a}}^{\hat{q}} \omega_n^i - \delta_{\hat{a}}^i \omega_p^0 &= \Lambda_{p \hat{a} L}^i \omega_0^L, \\ \nabla \Lambda_{i \hat{a}}^p + \Lambda_{i \hat{a}}^p \omega_0^0 + \Lambda_{i \hat{a}}^n \omega_n^p - \delta_{\hat{a}}^p \omega_i^0 &= \Lambda_{i \hat{a} L}^p \omega_0^L. \end{aligned}$$

Имеет место теорема существования [2]:

Теорема 1. В n -мерном проективном пространстве P_n \mathcal{SH} -распределение существует с произволом $2r(n-t-1)$ функций $(n-s)$ аргументов, $2rs$ функций $(t+1)$ аргументов и $2(n-t-1)(t-r)$ функций $(n-r)$ аргументов.

2. Следуя работам [3–5], систему величин $\{K_\sigma\}$ назовем квазинормалью \mathcal{SH} -распределения, если в выбранном репере R_1 [2] при преобразованиях стационарной подгруппы элемента \mathcal{SH} -распределения имеем один из следующих законов преобразования величин $\{K_\sigma\}$:

$$\nabla_\delta K_\sigma + K_\sigma \pi_0^0 = \varepsilon \Lambda_{\sigma p}^n \pi_n^p + \mu \pi_\sigma^0, \quad (1)$$

$$\nabla_\delta K_\sigma + K_\sigma \pi_0^0 = \varepsilon \Lambda_{p \sigma}^n \pi_n^p + \mu \pi_\sigma^0, \quad (2)$$

$$\nabla_\delta K_\sigma + K_\sigma \pi_0^0 = \varepsilon b_{\sigma p}^n \pi_n^p + \mu \pi_\sigma^0, \quad (3)$$

где ε, μ — константы, отличные от нуля; $b_{\sigma p}^n$ — симметрический тензор:

$$b_{\sigma p}^n = \frac{1}{2} (\Lambda_{\sigma p}^n + \Lambda_{p \sigma}^n), \quad \nabla b_{\sigma p}^n + b_{\sigma p}^n \omega_0^0 = b_{\sigma p k}^n \omega_0^k.$$

Заметим, что если в (1)–(3) σ положить равным p, i, α, v, a, A , то уравнения (1)–(3) задают квазинормали, соответствующие основным структурным подрасслоениям (Λ -, L -, E -, Φ -, M -, Ψ -подрасслоениям [2]) данного \mathcal{SH} -распределения. Каждая из трех типов квазинормалей устанавливает биекцию между нормальями 1-го и 2-го рода Нордена соответствующего основного структурного подрасслоения таким образом:

$$\text{а) } v_\sigma^0 = -\frac{1}{\mu} (K_\sigma + \varepsilon \Lambda_{\sigma p}^n v_n^p), \quad v_n^p = -\frac{1}{\varepsilon} \Lambda_n^{p \sigma} (K_\sigma + \mu v_\sigma^0), \quad (4)$$

если квазинормаль 1-го типа (1);

$$\text{б) } v_\sigma^0 = -\frac{1}{\mu} (K_\sigma + \varepsilon \Lambda_{p \sigma}^n v_n^p), \quad v_n^p = -\frac{1}{\varepsilon} \Lambda_n^{\sigma p} (K_\sigma + \mu v_\sigma^0), \quad (5)$$

если квазинормаль 2-го типа (2);



$$в) v_{\sigma}^0 = -\frac{1}{\mu}(K_{\sigma} + \varepsilon b_{\sigma\rho}^n v_n^{\rho}), v_n^{\rho} = -\frac{1}{\varepsilon} b_n^{\rho\sigma}(K_{\sigma} + \mu v_{\sigma}^0), \quad (6)$$

если квазинормаль 3-го типа (3).

Используя результаты работ [1; 2], введем в рассмотрение в разных дифференциальных окрестностях квазинормали L -подрасслоения:

а) в окрестности 1-го порядка квазинормаль 1-го типа

$$K_i^1 = \Lambda_{in}^n \stackrel{def}{=} t_i, \nabla_{\delta} t_i + t_i \pi_0^0 = \Lambda_{ij}^n \pi_n^j + \pi_i^0;$$

б) в окрестности 2-го порядка квазинормали 2-го типа

$$K_i^2 = \frac{1}{r} \Lambda_i, K_i^3 = \frac{1}{s+2} L_i, K_i^4 = \frac{1}{n-m-1} E_i, K_i^5 = \frac{1}{m+2} \tilde{M}_i, K_i^6 = \frac{1}{n-r+1} \Phi_i, \\ K_i^7 = \frac{1}{n-s-1} \Psi_i, K_i^8 = \frac{1}{n+1} \tilde{H}_i, K_i^9 = \varepsilon_i, K_i^{10} = \zeta_i = \frac{1}{r} b_{pq}^n b_n^{pq},$$

каждая из которых удовлетворяет уравнению вида

$$\nabla_{\delta} K_i + K_i \pi_0^0 = \Lambda_{ji}^n \pi_n^j - \pi_i^0,$$

и квазинормаль 3-го типа

$$K_i^{11} = b_i \stackrel{def}{=} \frac{1}{s+2} b_{ijk}^n b_n^{jk}, \nabla_{\delta} b_i + b_i \pi_0^0 = b_{ik} \pi_n^k + \pi_i^0;$$

в) в окрестности 3-го порядка квазинормали 3-го типа [4; 5]

$$K_i^{12} = D_i \stackrel{def}{=} D_i, \nabla_{\delta} D_i + D_i \pi_0^0 = -\Lambda_{ji}^n \pi_n^j - \pi_i^0, \\ K_i^{13} = D_i + 3B_i, \nabla_{\delta} K_i^{13} + K_i^{13} \pi_0^0 = 2b_{ij}^n \pi_n^j - 4\pi_i^0.$$

3. Будем определять нормали $\{v_n^i\}$ и $\{v_i^0\}$ соответственно 1-го и 2-го рода в смысле Нордена [6] элемента L -подрасслоения, используя способ нахождения общих нормалей двух квазинормалей [4; 5].

3а. В окрестности 2-го порядка пара квазинормалей (K_i^1, K_i^2) задает в каждом центре A_0 нормаль 1-го рода $\{\mathcal{S}_n^i\}$ L -подрасслоения:

$$\mathcal{S}_n^i = -\frac{1}{2} b_n^{ij} (K_j^1 + K_j^2).$$

Однако общей нормали 2-го рода они не имеют, а при $r_{ij}^n = 0$, где $\{r_{ij}^n\}$ — подтензор тензора $\{r_{ij}^{\hat{A}}\}$ неголономности L -подрасслоения, для этой пары существует нормаль 2-го рода $\{\mathcal{S}_i^0\}$, где

$$\mathcal{S}_i^0 = \frac{1}{2} (K_i^2 - K_i^1).$$



В дальнейшем это соответствие будем обозначать кратко следующим образом:

$$(K_i^1, K_i^\varepsilon) \rightarrow \left(\mathcal{F}_n^i = -\frac{1}{2} b_n^{ij} (K_j^1 + K_j^\varepsilon), \mathcal{F}_i^0 = \frac{1}{2} (K_i^2 - K_i^1) \right).$$

Аналогично получаем следующие соответствия ($\varepsilon = \overline{2, 10}$) при $r_{ij}^n = 0$ на L -подрасслоении в дифференциальной окрестности 2-го порядка:

$$(K_i^1, K_i^\varepsilon) \rightarrow \left(\begin{matrix} \mathcal{F}_n^i \\ (\varepsilon) \end{matrix} = -\frac{1}{2} b_n^{ij} (K_j^1 + K_j^\varepsilon), \begin{matrix} \mathcal{F}_i^0 \\ (\varepsilon) \end{matrix} = \frac{1}{2} (K_i^\varepsilon - K_i^1) \right).$$

8

3б. В окрестности 3-го порядка имеем соответствия

$$\begin{aligned} (K_i^{12}, K_i^\varepsilon) &\rightarrow \left(\begin{matrix} Q_n^i \\ (\varepsilon) \end{matrix} = \frac{1}{2} \Lambda_n^{ij} (D_j - K_j^\varepsilon), \begin{matrix} Q_i^0 \\ (\varepsilon) \end{matrix} = \frac{1}{2} (D_i + K_i^\varepsilon) \right), \\ (K_i^{11} \stackrel{\text{def}}{=} b_i, K_i^{13}) &\rightarrow \left(\Phi_n^i = \frac{1}{2} b_n^{ij} (K_j^{13} - 4K_j^{11}), \Phi_i^0 = \frac{1}{2} (K_i^{13} - 2K_i^{11}) \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что в случае регулярной гиперполосы [7], гиперполосного распределения [4] и трехсоставного распределения [5] эти нормали (7) являются аналогами нормалей Фубини. Учитывая это замечание, пару нормалей (Φ_n^i, Φ_i^0) в каждом центре A_0 назовем *первыми аналогами* нормалей Фубини L -подрасслоения данного \mathcal{SH} -распределения.

4. В работе [2] нами построены для L -подрасслоения \mathcal{SH} -распределения нормали 1-го рода Фубини $\{F_n^i\}$ и Вильчинского $\{W_n^i\}$. В биекции (6), определяемой квазинормалью $K_i^{11} \stackrel{\text{def}}{=} b_i$, находим им соответствующие нормали 2-го рода:

$$F_i^0 = b_i + b_{ij}^n F_n^j, W_i^0 = b_i + b_{ij}^n W_n^j. \quad (8)$$

Таким образом, пара нормалей (F_n^i, F_i^0) (8) Λ -подрасслоения задает *второй аналог* нормалей Фубини (в отличие от первого аналога (Φ_n^i, Φ_i^0)), а пара нормалей (W_n^i, W_i^0) задает в каждом центре A_0 нормализацию Вильчинского [5; 7].

5. На L -подрасслоении \mathcal{SH} -распределения в дифференциальной окрестности 2-го порядка введем, согласно [8], поле квазитензора

$$M_n^i = -\frac{1}{r(r+2)} \Lambda_n^{il} b_n^{jk} (\Lambda_{ijk}^n + \Lambda_{lj}^n K_k^1 + \Lambda_{lk}^n K_j^1 + \Lambda_{kj}^n K_l^1). \quad (9)$$

Для гиперплоскостных линейных элементов [8] и для гиперполосных распределений проективного пространства [7] нормаль (9) является нормалью Михэйлеску 1-го рода. Имея это в виду, мы за нормальями



$N_{n-s-1}(M_n^i)$ сохраним название *нормалей Михэйлеску* 1-го рода L -подрасслоения (не обязательно сильно сопряженного или взаимного). Используя биекцию (4), определенную квазинормалью $\{K_i^1\}$, найдем нормаль Михэйлеску 2-го рода L -подрасслоения:

$$M_i^0 = -(K_i^1 + \Lambda_{ij}^n M_n^j).$$

Таким образом, нормализация (M_n^i, M_i^0) L -подрасслоения определена первыми аналогами нормалей Михэйлеску в дифференциальной окрестности 2-го порядка. Для L -подрасслоения при $r_{ij}^n = 0$ нормали Михэйлеску 1-го и 2-го рода примут вид

$$m_n^i = -\frac{1}{2} b_n^{ij} (b_j + K_j^1), m_i^0 = \frac{1}{2} (b_i - K_i^1).$$

Будем говорить, что нормализация (m_n^i, m_i^0) L -подрасслоения определена вторыми аналогами нормалей Михэйлеску [5; 7].

Итак, имеет место

Теорема 2. На L -подрасслоении \mathcal{H} -распределение порождает 23 внутренние нормализации в смысле Нордена:

а) $(\mathcal{S}_n^i, \mathcal{S}_i^0), (M_n^i, M_i^0), (m_n^i, m_i^0)$ в дифференциальной окрестности (ε) (ε)

2-го порядка;

б) $(Q_n^i, Q_i^0), (\Phi_n^i, \Phi_i^0), (F_n^i, F_i^0), (W_n^i, W_i^0)$ в дифференциальной окрестности (ε) (ε)

ности 3-го порядка.

6. Рассмотрим квазинормали E -подрасслоения [1; 2]:

а) в окрестности 1-го порядка

$$K_\alpha^1 = \Lambda_{\alpha i}^n \stackrel{\text{def}}{=} t_\alpha; \tag{10}$$

б) в окрестности 2-го порядка

$$\begin{aligned} K_\alpha^2 &= \frac{1}{r} \Lambda_\alpha, K_\alpha^3 = \frac{1}{s} L_\alpha, K_\alpha^4 = \frac{1}{n-m+1} E_\alpha, K_\alpha^5 = \frac{1}{m} \tilde{M}_\alpha, \\ K_\alpha^6 &= \frac{1}{n-r+1} \Phi_\alpha, K_\alpha^7 = \frac{1}{n-s+1} \Psi_\alpha, K_\alpha^8 = \frac{1}{n+1} \tilde{H}_\alpha, \\ K_\alpha^9 &= \zeta_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{r} \Lambda_{pq\alpha}^n b_n^{pq}, K_\alpha^{10} = \xi_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{s} \Lambda_{ij\alpha}^n b_n^{ij}, K_\alpha^{11} = b_\alpha; \end{aligned} \tag{11}$$

в) в окрестности 3-го порядка

$$K_\alpha^{12} = \varepsilon_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_\alpha, K_\alpha^{13} = \varepsilon_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_\alpha + 3b_\alpha. \tag{12}$$



Теперь, используя квазинормали (10)–(12), получаем следующие соответствия ($\varepsilon = 2, 10$) при $r_{ij}^n = 0$:

а) в дифференциальной окрестности 2-го порядка:

$$(K_\alpha^1, K_\alpha^\varepsilon) \rightarrow \left(P_n^\alpha = -\frac{1}{2} b_n^{\alpha\beta} (K_\beta^1 + K_\beta^\varepsilon), P_\alpha^0 = \frac{1}{2} (K_\alpha^\varepsilon - K_\alpha^1) \right)$$

б) в дифференциальной окрестности 3-го порядка:

$$(\varepsilon_\alpha, K_\alpha^\varepsilon) \rightarrow \left(Q_n^\alpha = \frac{1}{2} \Lambda_n^{\alpha\beta} (\varepsilon_\beta - K_\beta^\varepsilon), Q_\alpha^0 = \frac{1}{2} (\varepsilon_\alpha + K_\alpha^\varepsilon) \right),$$

$$(K_\alpha^{11}, K_\alpha^{13}) \rightarrow \left(\Phi_n^\alpha = \frac{1}{2} b_n^{\alpha\beta} (K_\beta^{13} - 4b_\beta), \Phi_\alpha^0 = \frac{1}{2} (K_\alpha^{13} - 2b_\alpha) \right).$$

Замечание. В работе [2] квазинормаль $\{\varepsilon_\alpha\}$ обозначена через $\{E_\alpha\}$.

Далее по аналогии с построениями п. 4, 5 находим аналоги нормализаций Михэйлеску (M_n^α, M_α^0) , (m_n^α, m_α^0) , Фубини (F_n^α, F_α^0) и Вильчинского (W_n^α, W_α^0) .

Итак, справедлива

Теорема 3. \mathcal{SH} -распределение порождает на E -подрасслоении 23 внутренние нормализации в смысле Нордена:

а) (P_n^α, P_α^0) , (M_n^α, M_α^0) , (m_n^α, m_α^0) в дифференциальной окрестности 2-го порядка;

б) (Q_n^α, Q_α^0) , $(\Phi_n^\alpha, \Phi_\alpha^0)$, (F_n^α, F_α^0) , (W_n^α, W_α^0) в дифференциальной окрестности 3-го порядка.

Список литературы

1. Попов Ю.И. Сильно взаимные трехсоставные распределения проективного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2015. Вып. 10. С. 62–76.
2. Попов Ю.И. Сильно сопряженные трехсоставные распределения проективного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2016. № 1. С. 5–18.
3. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. Распределения m -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности // Тр. геом. семинара. ВИНТИ АН СССР. М., 1971. Том 3. С. 49–94.
4. Столяров А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m -мерных линейных элементов // Проблемы геометрии. Итоги науки и техники. ВИНТИ АН СССР. М., 1975. Т. 7. С. 117–151.
5. Попов Ю.И. Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства. СПб., 1992.
6. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М., 1976.
7. Столяров А.В. Двойственная теория оснащенных многообразий. Чебоксары, 1992.
8. Остиану Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр. геом. семинара. ВИНТИ АН СССР. М., 1973. Т. 4. С. 71–120.



Об авторе

Юрий Иванович Попов – канд. физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: yurij.popoff2015@yandex.ru

About the author

Dr Yuriy Popov – Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: yurij.popoff2015@yandex.ru

УДК 550.388.2

11

Н. М. Каценко, С. В. Мациевский, А. А. Викторов

МОДЕЛЬ СРЕДНЕМАСШТАБНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ НИЗКОШИРОТНОЙ ИОНОСФЕРЫ ЗЕМЛИ: ОЦЕНКА МЕТОДА НЕЛИНЕЙНОЙ КОРРЕКЦИИ Z-СХЕМЫ

Рассмотрена нелинейная коррекция разностной схемы решения уравнений поперечного переноса в рамках моделей неустойчивости Рэлея – Тейлора в экваториальной области ионосферы Земли. Для тестовых задач численно получено экспериментальное значение порядка аппроксимации предлагаемого метода нелинейной коррекции разностной схемы для разных видов ограничителей.

A nonlinear correction of the finite-differential scheme for solution of the cross convection-diffusion equations within models of the Rayleigh – Taylor instability in the equatorial region of the Earth ionosphere is considered. For test problems the experimental value of the approximation order of the offered method of non-linear correction of the finite-differential scheme for different types of limiters is received numerically.

Ключевые слова: математическое моделирование, численное моделирование, уравнение переноса, монотонная разностная схема, ионосфера.

Key words: mathematical modeling, numerical simulating, convection-diffusion equations, monotonic finite-differential scheme, ionosphere.

1. Математическая модель экваториального F-слоя ионосферы Земли

Хорошо известно, что Рэлей-Тейлоровская неустойчивость в экваториальной ионосфере Земли приводит к развитию плазменных неоднородностей с характерными масштабами по времени 10–1000 с и по пространству 1–100 км [1; 4]. При математическом исследовании таких процессов могут использоваться в соответствии с работами [1–8] следующие два приближения:

- 1) плазма тепловая;
- 2) плазма равновесная.