Дифференцируя уравнения (3.2) внешним образом и анализиру[я] полученную при этом систему квадратичных уравнений, получае[м] конгруэнции [1,2] существуют и определяются с произволом од[ной] функции двух аргументов.

Конгруэнции [1,2] имеют в общем случае одну невырождающу[юся] фокальную поверхность, описываемую точкой

$$\bar{F}^* = \bar{A}_1 + \lambda^2 \bar{A}_2 - \sqrt{2}\,\lambda \bar{A}_3 .$$

Литература

1. Н.Г.Туганов, О конгруэнции линий второго порядка в трехмер[ном] проективном пространстве. ДАН СССР, 1955, т.100, №1.

2. В.С.Малаховский, Конгруэнции коник, порожденные расслояемо[й] парой C_ℓ. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, (Труды Калининградского университета), 1970, стр.5-26.

3. С.П.Фиников, Теория пар конгруэнций. ГИТТЛ, М., 1956.

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА 1971

вып 2

ТКАЧ Г.П.

ПАРЫ КОНГРУЭНЦИЙ ПАРАБОЛ В ЭКВИАФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

Определение 1. Назовем пару фигур $F=\{F_1,F_2\}$ квадратичной, если одна из фигур F_1 является квадратичным элементом, а другая - F_2 является k-плоскостью $(0 \le k < n-1)$ или квадратичным элементом [1].

Определение 2 Квадратичная пара $F=\{F_1,F_2\}$ называется нецентральной, если каждый квадратичный элемент, входящий в пару, является нецентральным.

Для $n=3$ квадратичными парами являются пары $F=\{F_1,F_2\}$, где F_1—парабола, а F_2 — точка, прямая или парабола.

В данной работе ограничимся рассмотрением двупараметрического семейства нецентральных квадратичных пар в трехмерном эквиаффинном пространстве, т.е. пар конгруэнций парабол. Такие двупараметрические семейства назовем парами B.

§ 1. Пары B с непараллельными плоскостями парабол.

Рассмотрим сначала общий случай, когда плоскости парабол F_i

$(i,j,k=1,2)$ пары B не параллельны.

Пусть ℓ' -линия пересечения плоскостей парабол F_i .Отнесе пару B к каноническому реперу $R=\{A,\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3\}$,где вект $\bar e_3$ направлен по прямой ℓ', векторы $\bar e_i$ – параллельны диаметрам па рабол F_i ,а точка A является центром прямолинейной конгруэ ции $\{A,\bar e_3\}$ и векторы $\bar e_\alpha$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3)$ пронормированы так,что уравнения парабол F_i имеют вид:

$$(x^3)^2-2x^i+2a_3^i x^3+a_0^i=0,\quad x^j=0. \tag{1.1}$$

Здесь и в дальнейшем $i\neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится.

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar A=\omega^\alpha \bar e_\alpha,\quad d\bar e_\alpha=\omega_\alpha^\beta \bar e_\beta, \tag{1.2}$$

где формы Пфаффа ω^α, ω_α^β удовлетворяют уравнениям структур

$$\mathcal{D}\omega^\alpha=\omega^\beta\wedge\omega_\beta^\alpha,\quad \mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta \tag{1.3}$$

и условию эквиаффинности

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=0. \tag{1.4}$$

Система дифференциальных уравнений,определяющих пару B имее вид:

$$\left.\begin{aligned}&\omega^3=\Gamma_k^3\omega^k,\ \ \omega_i^3=\Gamma_{ik}^3\omega^k,\ \ \omega_3^i=\Gamma_{3k}^i\omega^k,\ \ \omega_j^i=\Gamma_{jk}^i\omega^k,\\ &\omega_j^j=\Gamma_{jk}^j\omega^k,\ \ da_3^i=a_{3k}^i\omega^k,\ \ da_0^i=a_{0k}^i\omega^k,\ \ \Gamma_{31}^1+\Gamma_{32}^2=0.\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

Замыкая систему (I.5),находим :

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\Gamma_k^3\wedge\omega^k=0,\ \ \Delta\Gamma_{ik}^3\wedge\omega^k=0,\ \Delta\Gamma_{3k}^i\wedge\omega^k=0,\ \Delta\Gamma_{jk}^i\wedge\omega^k=0,\\ &\Delta\Gamma_{jk}^j\wedge\omega^k=0,\ \Delta a_{3k}^i\wedge\omega^k=0,\ \Delta a_{0k}^i\wedge\omega^k=0,\ d\Gamma_{31}^1+d\Gamma_{32}^2=0,\end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta\Gamma_i^3=d\Gamma_i^3+\Gamma_i^3(B^*-2\Gamma_{ij}^i-\Gamma_{jj}^j)\omega^j+\Gamma_{ij}^3\omega^j,\\
&\Delta\Gamma_{ii}^3=d\Gamma_{ii}^3+\Gamma_{ii}^3(B^*-3\Gamma_{ij}^i-\Gamma_{jj}^j)\omega^j+\Gamma_{ii}^j\Gamma_{jj}^3\omega^j,\\
&\Delta\Gamma_{ji}^3=d\Gamma_{ji}^3+\Gamma_{ji}^3[B^*-2(\Gamma_{ij}^i+\Gamma_{jj}^j)]\omega^j+\Gamma_{ji}^i\Gamma_{ij}^3\omega^j,\\
&\Delta\Gamma_{3i}^i=d\Gamma_{3i}^i+\Gamma_{3i}^i(B^*-\Gamma_{ij}^i-\Gamma_{jj}^j)\omega^j+\Gamma_{3i}^j\Gamma_{jj}^i\omega^j,\\
&\Delta\Gamma_{3i}^j=d\Gamma_{3i}^j+\Gamma_{3i}^j(B^*+2\Gamma_{jj}^j)\omega^j+\Gamma_{3i}^i\Gamma_{ij}^j\omega^j,\\
&\Delta\Gamma_{ji}^i=d\Gamma_{ji}^i+\Gamma_{ji}^i(B^*-\Gamma_{jj}^j)\omega^j+\Gamma_{ji}^3\Gamma_{3j}^i\omega^j,\\
&\Delta\Gamma_{ii}^j=d\Gamma_{ii}^j+\Gamma_{ii}^j(B^*-2\Gamma_{ij}^i+\Gamma_{jj}^j)\omega^j+\Gamma_{ii}^3\Gamma_{3j}^j\omega^j,\\
&\Delta\Gamma_{ji}^j=d\Gamma_{ji}^j+\Gamma_{ji}^j(B^*-\Gamma_{ij}^i)\omega^j+(\Gamma_{ji}^i\Gamma_{ij}^j+\Gamma_{ji}^3\Gamma_{3j}^j)\omega^j,\\
&\Delta\Gamma_{ii}^i=d\Gamma_{ii}^i+\Gamma_{ii}^i(B^*-\Gamma_{ij}^i)\omega^j+(\Gamma_{ii}^j\Gamma_{jj}^i+\Gamma_{ii}^3\Gamma_{3j}^i)\omega^j,\\
&\Delta a_{3i}^i=da_{3i}^i+a_{3i}^i(B^*-\Gamma_{ij}^i)\omega^j,\\
&\Delta a_{3i}^j=da_{3i}^j+a_{3i}^j(B^*-\Gamma_{ij}^i)\omega^j,\\
&\Delta a_{0i}^i=da_{0i}^i+a_{0i}^i(B^*-\Gamma_{ij}^i)\omega^j,\\
&\Delta a_{0i}^j\equiv da_{0i}^j+a_{0i}^j(B^*-\Gamma_{ij}^i)\omega^j,\\
&\qquad B^*=\Gamma_{ji}^i-\Gamma_i^3\Gamma_{3j}^i+\Gamma_j^3\Gamma_{3i}^i
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Из (I.5) и (I.6) непосредственно следует, что пара B опреде-ляется с произволом двенадцати функций двух аргументов.

Рассмотрим случай, когда параболы F_i касаются друг друга в точке A. Назовем такую пару парой B°. Пары B° существуют и определяются с произволом восьми функций двух аргументов. Урав-нения (I.I) приводятся для этого случая к виду:

$$(x^3)^2 - 2x^i = 0, \quad x^j = 0. \qquad (1$$

О п р е д е л е н и е 3. Пара B° называется индуцированно расслояемой или парой B°_ℓ, если прямолинейные конгруэнции (ℓ') и (ℓ), где ℓ — прямая, соединяющая концы векторов $\bar{e}$ образуют двусторонне расслояемую пару [2].

Т е о р е м а 1. Пары B°_ℓ существуют и определяются с произ-волом трех функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия двусторонней расслояемос-ти прямолинейных конгруэнций (ℓ) и (ℓ') приводятся к виду:

$$\begin{aligned}
&\omega^1\wedge\omega_3^2 - \omega^2\wedge\omega_3^1 = 0,\\
&\omega^1\wedge(\omega^3+\omega_1^3) + \omega^2\wedge(\omega^3+\omega_2^3) = 0,\\
&\omega^i\wedge(\omega_j^j + \omega_j^i + \omega^j) + (\omega^3+\omega_j^3)\wedge\omega_3^i = 0,\\
&\omega^i\wedge(\omega_i^i + \omega_i^j + \omega^j) - (\omega^3+\omega_j^3)\wedge\omega_3^j = 0
\end{aligned} \qquad (1$$

Учитывая (I.5), имеем :

$$\left\{\begin{aligned}
&\Gamma^2_{32} - \Gamma^1_{31} = 0,\\
&\Gamma^3_2 + \Gamma^3_{12} - \Gamma^3_1 - \Gamma^3_{21} = 0,\\
&\Gamma^j_{jj} + \Gamma^i_{jj} + 1 + (\Gamma^3_i + \Gamma^3_{ji})\Gamma^i_{3j} - (\Gamma^3_j + \Gamma^3_{jj})\Gamma^i_{3i} = 0,
\end{aligned}\right. \qquad (1$$

$$\Gamma^i_{ij} + \Gamma^j_{ij} + 1 - (\Gamma^3_i + \Gamma^3_{ji})\Gamma^j_{3j} + (\Gamma^3_j + \Gamma^3_{jj})\Gamma^j_{3i} = 0. \qquad (1.10)$$

Из (I.5), (I.6) и (I.10) вытекает утверждение теоремы.

§ 2. Характеристические пары B°_F.

В P_3 для пар конгруэнций коник В.С.Малаховским было введе-но понятие расслояемых пар [3].

В эквиаффинном пространстве можно ввести определение расслоя-емой пары конгруэнций парабол следующим образом.

О п р е д е л е н и е 4. Пара B конгруэнций $(F_1), (F_2)$ парабол F_1, F_2 называется двусторонне расслояемой или парой B_F, если существуют односторонние расслоения от конгруэнции (F_i) парабол к линейчатому многообразию, описываемому прямой ℓ.

О п р е д е л е н и е 5. Пара B°_F называется характеристической, если прямая ℓ инцидентна характеристическим точкам плоскостей парабол.

Т е о р е м а 2. Характеристическая пара B°_F существует с про-изволом двух функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Замкнутая система уравнений, опре-деляющих характеристическую пару B°_F приводится к виду:

$$\left.\begin{aligned}
&\omega^i_i + \omega^i = 0, \ \omega^i_j + \omega^i = 0, \ \omega^3_i + \omega^3 = 0,\\
&\omega^3 = \Gamma^3_k\omega^k, \ \omega^i_3 = \Gamma^i_{3k}\omega^k, \ \Gamma^1_{31} + \Gamma^2_{32} = 0;
\end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

$$\left\{\begin{aligned}
&d\Gamma^3_1\wedge\omega^1 + d\Gamma^3_2\wedge\omega^2 + [(\Gamma^3_1)^2\Gamma^1_{32} - (\Gamma^3_2)^2\Gamma^2_{31} - 2\Gamma^3_1\Gamma^3_2\Gamma^1_{31} - \Gamma^3_1 + \Gamma^3_2]\,\omega^1\wedge\omega^2 = 0,\\
&d\Gamma^i_{3i}\wedge\omega^i + d\Gamma^i_{3j}\wedge\omega^j + \{3(\Gamma^i_{3i} - \Gamma^i_{3j}) - \Gamma^3_j[(\Gamma^i_{3i})^2 + \Gamma^i_{3j}\Gamma^j_{3i}]\}\,\omega^i\wedge\omega^j = 0.
\end{aligned}\right. \qquad (2.2)$$

Система (2.I) и (2.2) в инволюции и определяет характеристическую пару B°_{F} с произволом двух функций двух аргументов.

Т е о р е м а 3. Плоскости парабол характеристической пары B°_{F} образуют связки плоскостей с центром в характеристических точках.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая (2.I), находим

$$d\bar{M}_i = d(\bar{A} + \bar{e}_j) = 0 \,, \tag{2.3}$$

откуда непосредственно вытекает утверждение теоремы.

Т е о р е м а 4. Вершина A репера R° является фокальной точкой конгруэнции парабол (F_j) для характеристической пары B°_{F}.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система уравнений для определения фокальных поверхностей и фокальных семейств конгруэнций (F_j) характеристической пары B°_{F} приводятся к виду:

$$\left.\begin{aligned} &(x^j)^2 - 2x^i = 0, \quad x^j = 0, \quad x^i\omega^j - x^3\omega^j_3 - \omega^j = 0, \\ &(x^3)^2(\omega^i + \omega^j) - x^i x^3\omega^3 + x^i\omega^i - x^3\omega^i_3 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

откуда непосредственно следует, что A - фокальная точка парабол F_j.

§ 3. Пары B с параллельными плоскостями парабол.

Рассмотрим пару B, когда F_i расположены в параллельных плоскостях π_i. Назовем такую пару, парой $\bar{B}$.

Канонический репер $\bar{R}$ построен следующим образом. Начало репера помещено в середину отрезка, соединяющего характеристические точки M_i параллельных плоскостей π_i, вектор $\bar{e}_3 = \overline{AM_1}$, а векторы $\bar{e}_i$ направлены параллельно диаметрам парабол F_i. Уравнения параболы F_i относительно репера R имеет вид:

$$(x^j)^2 - 2px^i + 2a^j_j x^j + a^j_0 = 0, \quad x^3 = (-1)^j. \tag{3.1}$$

Система дифференциальных уравнений, определяющих пару $\bar{B}$ записывается в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\omega^3 = 0, \ \omega^k_k = 0, \ \omega^3_i = \Gamma^3_{ik}\omega^k, \ \omega^i_3 = \Gamma^i_{3k}\omega^k, \ \omega^1_1 = \Gamma^1_{1k}\omega^k, \\ &\omega^i_j = \Gamma^i_{jk}\omega^k, \ dp = p_k\omega^k, \ da^i_i = a^i_{ik}\omega^k, \ da^i_0 = a^i_{0k}\omega^k. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Пары $\bar{B}$ существуют и определяются с произволом десяти функций двух аргументов.

Назовем пару $\bar{B}$ парой $\bar{B}^{\circ}$, если характеристические точки M_1 и M_2 инцидентны соответственно параболам F_1 и F_2, и уравнения парабол имеют вид:

$$(x^j)^2 - x^i = 0, \quad x^3 = (-1)^j. \tag{3.3}$$

Пары $\bar{B}^{\circ}$ существуют с произволом шести функций двух аргументов. Анализируя систему уравнений пары $\bar{B}^{\circ}$, убеждаемся, что :

I. Характеристические точки M_i являются фокальными точками конгруэнции (F_i) парабол пары $\bar{B}^{\circ}$.

2. Касательная плоскость к поверхности (A) параллельна плоскостям парабол.

3. Одно семейство торсов прямолинейных конгруэнций $(A, \bar{e}_i)$ и $(M_i, \bar{e}_i)$ соответствуют.

Т е о р е м а 5. Индуцированно расслоение пары $\bar{B}^{\circ}$ существует с произволом двух функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие двусторонней расслояемости прямолинейных конгруэнций (ℓ) и (m), где $m = M_1M_2$, приводится к виду:

$$\begin{aligned} &\omega^1 \wedge \omega^3_1 + \omega^2 \wedge \omega^3_2 = 0, \\ &\omega^1 \wedge (\omega^2_1 + \omega^1_1) + \omega^2 \wedge (\omega^1_2 - \omega^1_1) = 0, \\ &\omega^3_1 \wedge \omega^1_3 + \omega^3_2 \wedge \omega^2_3 = 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\omega^1 \wedge (\omega_1^2 + \omega_1^1 + \omega^2) - \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 = 0, \qquad (3.4)$$
$$\omega^i \wedge (\omega_j^j + \omega_j^i + \omega^j) + \omega_j^3 \wedge \omega_3^i = 0,$$

или, учитывая систему уравнений Пфаффа, определяющих пару $\overline{B}^{\circ}$, получаем конечные соотношения:

$$\Gamma_{12}^3 - \Gamma_{21}^3 = 0,$$
$$\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{11}^1 = 0,$$
$$\Gamma_{11}^3 \Gamma_{32}^1 - \Gamma_{12}^3 \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{21}^3 \Gamma_{32}^2 - \Gamma_{22}^3 \Gamma_{31}^2 = 0,$$
$$\qquad (3.5)$$
$$\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^1 + 1 - \Gamma_{21}^3 \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{31}^2 = 0,$$
$$\Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^1 + 1 + \Gamma_{21}^3 \Gamma_{32}^1 - \Gamma_{22}^3 \Gamma_{31}^1 = 0,$$
$$\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^2 + 1 + \Gamma_{12}^3 \Gamma_{31}^2 - \Gamma_{11}^3 \Gamma_{32}^2 = 0.$$

Из (2.3) и (2.5) следует утверждение теоремы.

Литература

I. В.С.Малаховский, Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. Геометрический сборник, вып. 3 (Труды Томского университета, I68), I963, 28-42.

2. С.П. Фиников, Теория пар конгруэнций. ГИТТЛ, М., I956.

3. В.С.Малаховский, Расслояемые пары конгруэнций фигур в трехмерном проективном пространстве. Труды геометрического семинара ВИНИТИ, т.3 (печатается).

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

вып 2 1971

Л И П А Т О В А Ф.А.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПАР ФИГУР, ПОРОЖДЕННЫХ ЭЛЛИПСОМ И ТОЧКОЙ.

В трехмерном аффинном пространстве A_3 рассматривается двупараметрическое семейство V (конгруэнция) пар фигур C, M, где C -эллипс, а M -точка, не инцидентная плоскости эллипса.

Семейство V называется парой V_0, если характеристическая точка A_1 плоскости эллипса лежит на эллипсе.

Помещая начало A репера R в центр эллипса C, конец вектора $\bar{e}_1$ в точку A_1, конец вектора $\bar{e}_3$ в точку M, конец вектора $\bar{e}_2$ в точку эллипса и, направляя вектор $\bar{e}_2$ по сопряженному к $\bar{e}_1$ направлению, приводим систему пфаффовых уравнений пары V_0 к виду:

$$\begin{gathered}\omega^3 = a\omega^1 + b\omega^2,\ \omega_1^2 = c\omega^1 + f\omega^2,\ \omega_2^1 = e\omega^1 + h\omega^2,\\ \omega_1^3 = -a\omega^1 - b\omega^2,\ \omega_2^3 = p\omega^1 + k\omega^2,\ \omega_3^3 = s\omega^1 + t\omega^2,\\ \omega_1^1 = \eta\omega^1 + \alpha\omega^2,\ \omega_2^2 = \beta\omega^1 + \gamma\omega^2,\ \omega_3^2 = m_1\omega^1 + m_2\omega^2,\\ \omega_3^1 = q\omega^1 + r\omega^2,\end{gathered} \qquad (1)$$