Библиографический список

I. Г л и з б у р г В.И. Инвариантное описание обыкновенной дифференциальной системы высшего порядка // Изв. вузов. Математика. 1992. № I. С.51-58.

2. Г л и з б у р г В.И. Редукция расслоения p -реперов, инвариантно определяемая обыкновенной дифференциальной системой порядка $p>2$ / Моск. пед. гос. ун-т. М., 1991. 16 с. Деп. в ВИНИТИ 14.II.91. № 4291-В91.

3. Г л и з б у р г В.И. Геометрия системы уравнений
$$\frac{d^p x^a}{(dx^1)^p} = S^a_{(p)}\left(x^1, x^b, \frac{dx^b}{dx^1}, \dots, \frac{d^{p-1}x^b}{(dx^1)^{p-1}}\right);$$
Дис. канд. физ.-мат. наук. М., 1992.

4. Г л и з б у р г В.И. Фундаментальная группа и объект кривизны-кручения связности Картана, инвариантно определяемой обыкновенной дифференциальной системой порядка $p>2$ / Моск. пед. гос. ун-т. М., 1991. 32 с. Деп. в ВИНИТИ 14.II.91, № 4290-В91.

5. Г л и з б у р г В.И. Об объекте кривизны-кручения связности Картана, ассоциированной с обыкновенной дифференциальной системой высшего порядка // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград. 1992. Вып.23. С.23-29.

6. Г л и з б у р г В.И. О группе инвариантности обыкновенной дифференциальной системы $\frac{d^p(x^a)}{(dx^1)^p}=0$ // Матер. науч. сессии по итогам науч.-исслед. работы за 1991 г. Сер. естеств. науки / МПГУ им. В.И.Ленина. М.: Прометей, 1992. С.13-15.

7. Г л и з б у р г В.И. Интегральные кривые как геодезические ассоциированной связности // Междунар. науч. конф. "Лобачевский и современная геометрия". Казань, 1992. С.24-25. Тез. докл. Ч.I.

8. Glizburg V. About the fundamental group G_n^{p-1} of connection generated by the differential system of higher order // Acta et commentationes universitatis Tartuensis: Application of topology in algebra and differential geometry. Tartu, 1992. V. 940. p. 41-46.

9. И б р а г и м о в Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.

10. О в с я н н и к о в Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

11. О л в е р П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.

12. Lie S. Klassifikation und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten // Math. Ann. 1888. V. 32. p. 213-281; also Gesammelte Abhandlungen. Leipzig, 1924. V. 5. p. 240-310.

13. Lie S. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit Bekannten Infinitesimalen Transformationen. Leipzig, 1891.

14. Lie S. Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleihungen beliebeger Ordnung // Leipz. Berich. 1895. V.1. p.53-128; also Gesammelte Abhandlungen. Leipzig, 1929. V.4. p. 320-384.

УДК 514.75

ПРОЕКТИВНЫЕ НОРМАЛИ $\mathcal{H}$-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА A_{n+1}

М.Ф.Г р е б е н ю к

(Киевское ВВАТУ)

Рассматриваются трехсоставные распределения ($\mathcal{H}$-распределения) аффинного пространства A_{n+1} [1]. В окрестности второго порядка вводятся функции $\{\mathfrak{M}^\sigma\}$, определяющие в каждом центре $\mathcal{H}$-распределения нормаль I-го рода $\mathcal{H}$-распределения. Нормаль $\{\mathfrak{M}^\sigma\}$ является обобщением нормали Михэйлеску I-го рода для гиперплоскостного распределения аффинного пространства [2], [3] Построено поле нормалей $\{\mathcal{J}^p\}$, внутренним инвариантным образом присоединенных в третьей дифференциальной окрестности образующего элемента $\mathcal{H}$-распределения. Объект $\{\mathcal{J}^p\}$ определяет в каждом центре A образующего элемента $\mathcal{H}$-распределения проективную нормаль - аналог нормали Фубини для $\mathcal{H}$-распределения. Показано, что квазитензор второго порядка $\{S^\sigma\}$ задает проективную нормаль I-го рода $\mathcal{H}$-распределения. Проективные нормали I-го рода $\{\mathfrak{M}^\sigma\},\{\mathcal{J}^p\},\{S^\sigma\}$ позволяют получить пучки проективных нормалей I-го рода $\mathcal{H}$-распределения в дифференциальных окрестностях второго и третьего порядков. Отмечено, что аналогично в дифференциальных окрестностях второго и третьего порядков находятся пучки проективных нормалей I-го рода Λ-распределения

6 Зак. 2036

и M-распределения.

В работе используется следующая схема индексов:
$\sigma, \pi, \rho, \xi, \tau = \overline{1,n}$; $\quad r, p, q, s, t, f = \overline{1,r}$; $\quad \alpha, \beta, \gamma, \eta, \delta = \overline{m+1, n+1}$;
$i, j, k, \ell = \overline{r+1, m}$; $\quad u, v, w = \overline{r+1, n}$; $\quad \mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L} = \overline{1, n+1}$.

I. Построим ряд геометрических объектов во второй дифференциальной окрестности. Рассмотрим величины

$$\mathcal{M}^s_{pq} = a^{sr}\left(\Lambda_{p(rq)} + \Lambda_{(r|p|q)} - \Lambda_{(rq)p}\right),$$
$$\mathcal{M}^i_{\ell j} = a^{ik}\left(M_{\ell(kj)} + M_{(k|\ell|j)} - M_{(kj)\ell}\right),$$
$$\mathcal{M}^\eta_{\alpha\gamma} = a^{\eta\beta}\left(H_{\alpha(\beta\gamma)} + H_{(\beta|\alpha|\gamma)} - H_{(\beta\gamma)\alpha}\right)$$

и их свертки

$$\gamma_p = \mathcal{M}^s_{ps}, \quad \gamma_k = \mathcal{M}^i_{ki}, \quad \gamma_\alpha = \mathcal{M}^\beta_{\alpha\beta}, \qquad (\mathrm{I})$$

удовлетворяющие соответственно дифференциальным уравнениям:

$$\begin{cases} \nabla\gamma_p - (r+2)\Lambda_{ps}\omega^s_{n+1} = \gamma_{p\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}, \\ \nabla\gamma_\ell - (m-r+2)M_{i\ell}\omega^i_{n+1} + (m-r-2)\Lambda_{p\ell}\omega^p_{n+1} = \gamma_{\ell\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}, \\ \nabla\gamma_\alpha - (m-n+2)\left(\Lambda_{p\alpha}\omega^p_{n+1} + M_{i\alpha}\omega^i_{n+1}\right) - (n-m+2)H_{\gamma\alpha}\omega^\gamma_{n+1} = \gamma_{\alpha\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}. \end{cases} \qquad (2)$$

Используя функции (I), последовательно вводим в рассмотрение функции

$$B_p = \tfrac{1}{2}(a_p + \gamma_p), \quad B_i = \tfrac{1}{2}(d_i + \gamma_i), \quad B_\alpha = \tfrac{1}{2}(b_\alpha + \gamma_\alpha)$$

и, наконец, квазитензоры второго порядка

$$\begin{cases} B^p = -\frac{1}{r+2}a^{pq}B_q, \quad B^i = -\frac{1}{m-r+2}a^{ji}B_j - \frac{1}{m-r+2}\Lambda_{pk}a^{ki}B^p, \\ B^\alpha = -\frac{1}{m-r+2}\left(H^{\gamma\alpha}B_\gamma + \Lambda_{p\gamma}H^{\gamma\alpha}B^p + M_{i\gamma}H^{\gamma\alpha}B^i\right), \end{cases} \qquad (3)$$

где

$$\begin{cases} \nabla B^p - B^p\omega^{n+1}_{n+1} + \omega^p_{n+1} = B^p_{\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}, \\ \nabla B^i - B^i\omega^{n+1}_{n+1} + \omega^i_{n+1} = B^i_{\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}, \\ \nabla B^\alpha - B^\alpha\omega^{n+1}_{n+1} + \omega^\alpha_{n+1} = B^\alpha_{\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}. \end{cases} \qquad (4)$$

Из уравнений (4) следует, что объект $\{B^\sigma\} = \{B^p, B^i, B^\alpha\}$ также является квазитензором второго порядка. Таким образом, геометрический объект $\{B^\sigma\}$ определяет внутренним инвариантным образом нормаль B I-го рода $\mathcal{H}$-распределения. В случае гиперплоскостного распределения нормаль B совпадает с нормалью Бляшке $\vec{B}$ [2]. Учитывая это, назовем аффинную нормаль B нормалью Бляшке для оснащающего $\mathcal{H}$-распределения данного $\mathcal{H}$-распределения. Аналогично, будем называть аффинные нормали I-го рода $B_{n-r+1}(A)$, $B_{n-m+1}(A)$, определяемые в каждом центре A квазитензорами $\{B^p\}$, $\{B^a\} \equiv \{B^p, B^i\}$, соответственно нормалями Бляшке Λ-распределения и M-распределения данного $\mathcal{H}$-распределения.

2. С помощью функций (I) и их дифференциальных уравнений (2) последовательно находим квазитензоры второго порядка:

$$\begin{cases} \gamma^p = -\frac{1}{r+2}\Lambda^{pq}\gamma_q, \quad \nabla\gamma^p - \gamma^p\omega^{n+1}_{n+1} + \omega^p_{n+1} = \gamma^p_{\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}; \\ \gamma^i = -\frac{1}{m-r+2}M^{ji}\gamma_j + \frac{m-r-2}{m-r+2}\Lambda_{pk}M^{ki}\gamma^p, \\ \nabla\gamma^i = \gamma^i\omega^{n+1}_{n+1} - \omega^i_{n+1} + \gamma^i_{\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}; \\ \gamma^\alpha = -\frac{1}{n-m+2}H^{\alpha\beta}\gamma_\beta + \frac{n-m-2}{n-m+2}\left(\Lambda_{p\gamma}H^{\alpha\gamma}\gamma^p + M_{i\gamma}H^{\alpha\gamma}\gamma^i\right), \\ \nabla\gamma^\alpha = \gamma^\alpha\omega^{n+1}_{n+1} - \omega^\alpha_{n+1} + \gamma^\alpha_{\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}} \end{cases} \qquad (5)$$

Таким образом, поля геометрических объектов $\{\gamma^p\}, \{\gamma^i\}, \{\gamma^\alpha\}$, $\{\gamma^a\} = \{\gamma^p, \gamma^i\}, \{\gamma^\sigma\} = \{\gamma^p, \gamma^i, \gamma^\alpha\}$, определяемые дифференциальными уравнениями (5), порождают соответственно поля нормалей I-го рода Λ-распределения, $M(\Lambda)$-распределения, Φ-распределения, M-распределения и H-распределения.

Функции $\{\gamma^\sigma\}$ (5) и $\{\mathcal{L}^\sigma\}$ [4, с.36] позволяют ввести в рассмотрение в окрестности второго порядка квазитензор $\{\mathcal{M}^\sigma\}$:

$$\mathcal{M}^\sigma = \tfrac{1}{2}(\mathcal{L}^\sigma + \gamma^\sigma), \quad \nabla\mathcal{M}^\sigma - \mathcal{M}^\sigma\omega^{n+1}_{n+1} + \omega^\sigma_{n+1} = \mathcal{M}^\sigma_{\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}, \qquad (6)$$

который в каждом центре A $\mathcal{H}$-распределения задает нормаль I-го рода H-распределения, инвариантную относительно проективной группы преобразований. Как показано в работе [3], нормаль $\{\mathcal{M}^\sigma\}$ является нормалью Михэйлеску I-го рода $\vec{\mathcal{M}}$ для гиперплоскостного распределения аффинного пространства.

Следуя работе [3], назовем нормаль $\mathcal{M}$ (6) нормалью Михэйлеску I-го рода $\mathcal{H}$-распределения. Отметим, что подобъекты $\{\mathcal{M}^p\}, \{\mathcal{M}^i\}, \{\mathcal{M}^\alpha\}, \{\mathcal{M}^a\}$ квазитензора второго порядка $\{\mathcal{M}^\sigma\}$ задают проективные нормали I-го рода $\mathcal{M}_{n-r+1}(A), \mathcal{M}_{n-m+r+1}(A), \mathcal{M}_{m+1}(A), \mathcal{M}_{n-m+1}(A)$ соответственно Λ-распределения, $M(\Lambda)$-распределения, Φ-распределения и M-распределения, которые назовем нормалями Михэйлеску I-го рода этих распределений.

3. Проведем построения проективных нормалей, следуя работам Г.Ф.Лаптева [5] и Э.Д.Алшибая [2]. Рассмотрим относительный инвариант $\hat{B} = a^{pq}a^{st}a^{rf}B_{psr}B_{qtf}$:

$$d\ln\hat{B} - \omega^{n+1}_{n+1} = \hat{B}_{\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}, \qquad (7)$$

дифференциальные уравнения (7) которого вводят систему величин

$\{\hat{B}_{\varkappa}\}$. В частности, при $\varkappa=\tau$ для величин $\{\hat{B}_{\tau}\}$, имеем:

$$\nabla\hat{B}_{\tau} + H_{\rho\tau}\,\omega^{\rho}_{n+1} = \hat{B}_{\tau\varkappa}\,\omega^{\varkappa}. \qquad (8)$$

Учитывая (8), для величин

$$\hat{B}^{\tau} = H^{\rho\tau}\hat{B}_{\rho} \qquad (9)$$

получим:

$$\nabla\hat{B}^{\tau} - \hat{B}^{\tau}\omega^{n+1}_{n+1} + \omega^{\tau}_{n+1} = \hat{B}^{\tau}_{\varkappa}\,\omega^{\varkappa} \qquad (10)$$

Дифференциальные уравнения (10) задают поле аффинной нормали I-го рода H-распределения в дифференциальной окрестности третьего порядка.

С помощью тензоров третьего порядка

$$\hat{k}_{\sigma} = \frac{1}{2}\left(\hat{B}_{\sigma} + \frac{1}{r+2}a^{st}a_{ts\sigma} - \frac{2}{r+2}H_{u\sigma}a^{u}\right),\ \hat{k}^{\sigma} = H^{\sigma\rho}\hat{k}_{\rho}$$

и функций (9) построим квазитензор $\{\mathcal{J}^{\sigma}\}$ третьего порядка:

$$\mathcal{J}^{\sigma} = \hat{B}^{\sigma} + \hat{k}^{\sigma},\quad \nabla\mathcal{J}^{\sigma} - \mathcal{J}^{\sigma}\omega^{n+1}_{n+1} + \omega^{\sigma}_{n+1} = \mathcal{J}^{\sigma}_{\varkappa}\,\omega^{\varkappa} \qquad (11)$$

Объект $\{\mathcal{J}^{\sigma}\}$ (11) определяет в каждой точке A образующего элемента H-распределения проективную нормаль [5] - аналог нормали Фубини для H-распределения. Подобъекты $\{\mathcal{J}^{p}\}, \{\mathcal{J}^{i}\}, \{\mathcal{J}^{\alpha}\}, \{\mathcal{J}^{a}\}$ квазитензора $\{\mathcal{J}^{\sigma}\}$ задают проективные нормали I-го рода $\mathcal{J}_{n-r+1}(A), \mathcal{J}_{n-m+r+1}(A), \mathcal{J}_{m+1}(A), \mathcal{J}_{n-m+1}(A)$ соответственно Λ-распределения, $M(\Lambda)$-распределения, Φ-распределения и M-распределения, которые назовем нормалями Фубини 1-го рода этих распределений. Далее рассмотрим квазитензор второго порядка $\{S^{\sigma}\}$, компоненты которого имеют следующее строение [6],[7]:

$$S^{\sigma} = -\frac{1}{2}\left(H_{\rho n+1} + \frac{1}{n+2}p_{\rho}\right)\cdot H^{\rho\sigma}, \qquad (12)$$

где

$$\nabla S^{\sigma} - S^{\sigma}\omega^{n+1}_{n+1} + \omega^{\sigma}_{n+1} = S^{\sigma}_{\varkappa}\,\omega^{\varkappa},$$

$$H_{\rho n+1} = \{\Lambda_{p,n+1};\ M_{i,n+1};\ H_{\alpha,n+1}\},$$

$$p_{\varkappa} = t^{\rho\tau}t_{\tau\rho\varkappa},\quad t_{\sigma\rho} = \frac{1}{2}(H_{\sigma\rho} + H_{\rho\sigma}).$$

Подобъекты $\{S^{p}\}, \{S^{i}\}, \{S^{\alpha}\}, \{S^{a}\}$ квазитензора второго порядка $\{S^{\sigma}\}$ задают проективные нормали 1-го рода $S_{n-r+1}(A), S_{n-m+r+1}(A), S_{m+1}(A), S_{n-m+1}(A)$ соответственно Λ-распределения, $M(\Lambda)$-распределения, Φ-распределения и M-распределения.

4. Проективные нормали 1-го рода $\mathcal{M}, \mathcal{J}, S$ позволяют получить пучки проективных нормалей I-го рода $\mathcal{H}$-распределения [6]

а) в окрестности второго порядка

$$\tilde{M}^{\sigma}(\varepsilon) = \mathcal{M}^{\sigma} - \varepsilon(\mathcal{M}^{\sigma} - S^{\sigma});$$

б) в окрестности третьего порядка

$$\hat{\Phi}^{\sigma}(\varepsilon) = \mathcal{J}^{\sigma} - \varepsilon(\mathcal{J}^{\sigma} - \mathcal{M}^{\sigma}),$$

$$\hat{\mathcal{J}}^{\sigma}(\varepsilon) = \mathcal{J}^{\sigma} - \varepsilon(\mathcal{J}^{\sigma} - S^{\sigma}),$$

где ε - абсолютный инвариант. Эти пучки индуцируют пучки проективных нормалей I-го рода соответственно Λ-распределения, $M(\Lambda)$-распределения, Φ-распределения и M-распределения:

а) в окрестности второго порядка

$$\tilde{M}^{p}(\varepsilon) = \mathcal{M}^{p} - \varepsilon(\mathcal{M}^{p} - S^{p}),\quad \tilde{M}^{i}(\varepsilon) = \mathcal{M}^{i} - \varepsilon(\mathcal{M}^{i} - S^{i}),$$

$$\tilde{M}^{\alpha}(\varepsilon) = \mathcal{M}^{\alpha} - \varepsilon(\mathcal{M}^{\alpha} - S^{\alpha}),\quad \tilde{M}^{a}(\varepsilon) = \mathcal{M}^{a} - \varepsilon(\mathcal{M}^{a} - S^{a}),$$

б) в окрестности третьего порядка $\{\hat{\Phi}^{p}(\varepsilon)\}, \{\hat{\mathcal{J}}^{p}(\varepsilon)\}$; $\{\hat{\Phi}^{i}(\varepsilon)\}, \{\hat{\mathcal{J}}^{i}(\varepsilon)\}$; $\{\hat{\Phi}^{\alpha}(\varepsilon)\}, \{\hat{\mathcal{J}}^{\alpha}(\varepsilon)\}$; $\{\hat{\Phi}^{a}(\varepsilon)\}, \{\hat{\mathcal{J}}^{a}(\varepsilon)\}$.

Библиографический список

1. Гребенюк М.Ф. К геометрии $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределений аффинного пространства/ Калинингр. ун-т. Калининград, 1988. 17 с. Деп в ВИНИТИ 18.11.1988. № 8204-1388.

2. Алшибая Э.Д. О распределении гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве // Сообщения АН Груз. ССР. 1970. Т.60. № 3. С.545-548.

3. Алшибая Э.Д. К геометрии распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т.5. С.169-193.

4. Гребенюк М.Ф. Соприкасающиеся гиперквадрики трехсоставного распределения аффинного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1991. Вып. 22. С.35-41.

5. Лаптев Г.Ф. Гиперповерхности в пространстве проективной связности // Докл. АН СССР. 1958. Т.121. № 1. С.41-44.

6. Попов Ю.И. Поля геометрических объектов гиперполосного распределения аффинного пространства / Калинингр. ун-т. Калининград, 1987. 50 с. Деп. в ВИНИТИ 21.09.87. № 6807 - В87.

7. Попов Ю.И. Нормали гиперполосного распределения аффинного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1988. Вып.19. С.69-79.