УДК 532.59

А. А. Зайцев, А. И. Руденко, С. М. Алексеева

ПЕРВЫЙ МЕТОД СТОКСА В ЗАДАЧЕ О ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Получено приближенное решение задачи о строении и характеристиках стационарной нелинейной периодической волны на поверхности жидкости конечной глубины. Способ решения: сначала упрощаются кинематическое и динамическое условия (упрощению динамического условия содействует интеграл Бернулли), вводится интегральный оператор типа свертки, определяются четыре функции одной переменной, основной из которых является уровень волны. В результате получены одно линейное и три квадратичных уравнения, определены и обоснованы условия нулевого среднего для уровня и относительной функции тока, а также условие ортогональности уровня волны основной гармонике. Как у Стокса, неизвестные функции и параметры ищутся в виде разложений по безразмерному волновому числу. Получено нелинейное дисперсионное соотношение. Выполнен анализ решений. Рассмотрены случаи коротких и длинных волн.

An approximate solution of the problem of the structure and characteristics of a stationary nonlinear periodic wave on the surface of a liquid of finite depth has been obtained. The solution is as follows: first, the kinematic and dynamic conditions are simplified. The Bernoulli integral contributes to the simplification of the dynamic condition. An integral operator of convolution type is introduced. Four functions of one variable are determined, the main of which is the wave level. One linear and three quadratic equations are obtained. The zero mean conditions for the level and the relative function of the current, as well as the condition of orthogonally of the wave level and the fundamental harmonic, are determined and validated. Like Stokes did, we seek unknown functions and parameters as expansions in a dimensionless wave number. The nonlinear dispersion relation has been obtained. The decision analysis has been completed. The cases of short and long waves have been considered.

Ключевые слова: стационарные периодические потенциальные гравитационные волны на поверхности жидкости, первый метод Стокса.

Keywords: stationary periodic potential gravitational waves on the surface of a liquid, the first Stokes' method.

Введение

Джон Скотт Рассел в 1834 г. наблюдал уединенную волну большой амплитуды, которая быстро перемещалась по узкому каналу, не изменяя своей формы [1; 2]. Сущность наблюдения Скотта Рассела понял

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта.
Сер.: Физико-математические и технические науки. 2020. № 1. С. 64 – 75.

Джордж Габриель Стокс, который создал основы теории стационарной нелинейной периодической волны [3]. Он сформулировал точную математической постановку нелинейной краевой задачи о стационарной волне на поверхности идеальной жидкости. Эта задача не имеет точного аналитического решения, поэтому Стокс разработал специальный вариант теории возмущений и выполнил расчет первых трех приближений для случая жидкости бесконечной глубины (случай жидкости конечной глубины намного сложнее, и Стокс, а также его последователи его не рассматривали). Стоксом найдена первая нелинейная поправка к зависимости скорости волны от длины и амплитуды (в первом приближении получается линейное дисперсионное соотношение). Эта зависимость такова:

$$c^2 = \frac{g}{k}(1 + (ka)^2),$$

где k — волновое число; a — амплитуда волны.

Позже Стокс предложил второй метод решения задачи о стационарной волне [4], суть которого в том, что исходная нелинейная краевая задача отображается на полосу в плоскости комплексного переменного. Новая краевая задача остается нелинейной, но оказывается существенно проще исходной задачи, поскольку обе границы становятся прямолинейными. В литературе появились достаточно работ, например [5—12], в которых второй метод Стокса был усовершенствован и были выполнены расчеты высших приближений. Заметим, что в работах [6; 10; 11] выведено интегро-дифференциальное уравнение для профиля стационарной волны. Теоретическое обоснование наблюдений Скотта Рассела дано в [13; 14]. Теоремы существования стационарной периодической волны конечной амплитуды, а также уединенной волны сформулированы и доказаны в [15—18]. Изложение результатов исследования стационарной периодической волны конечной амплитуды и уединенной волны содержатся в монографиях [19; 20]. Оригинальные подходы к теории стационарной волны конечной амплитуды даны в [19; 21]. Однако, принимая во внимание второй метод Стокса, заметим, что он искажает длину и профиль волны, а глубина жидкости фактически заменена на неизвестный параметр. Недочет второго метода заставил нас вернуться к первоначальному подходу Стокса к решению задачи о стационарной нелинейной волне. Как и Стокс, мы ограничиваемся расчетом трех низших приближений, но делаем это для жидкости конечной глубины.

Для достижения цели нам пришлось видоизменить методику Стокса. Прежде всего мы упростили математическую постановку задачи путем введения относительной функции тока (Стокс и его последователи использовали потенциал скоростей, что усложняет процедуру решения) и преобразования кинематического и динамического граничных условий. Упрощению динамического условия содействует интеграл Бернулли. Введен интегральный оператор типа свертки. Определены четыре функции одной переменной, основной из которых является профиль стационарной волны. Благодаря этому задача о нелинейной стационарной волне сводится к решению одного линейного и трех квадратичных уравнений.

Уравнения динамики жидкости дополнены условиями нулевого среднего для уровня и относительной функции тока. Условие нулевого среднего для уровня фактически определяет глубину жидкости. Условие нулевого среднего для относительной функции тока означает, что дрейф волны отсутствует и, значит, это условие позволяет получить реальное значение для скорости волны.

Для решения используются разложения по степеням произведения ka. Приняты условие ортогональности второго и третьего приближений основной гармонике. Это условие однозначно определяют решение трех систем уравнений для трех низших приближений. Получено решение этих систем.

Постановка задачи

Требуется изучить строение и характеристики стационарной нелинейной волны на поверхности идеальной жидкости глубины h. Жидкость считается однородной и несжимаемой, а волновые движения — двумерными и безвихревыми (то есть потенциальными). Используются стандартные обозначения: x и y — абсцисса и ордината прямоугольной системы координат; u, v — горизонтальная и вертикальная составляющие скорости частиц жидкости; p — давление; ρ — плотность жидкости; η — профиль волны; c — скорость волны. Система координат выбирается так, чтобы ось x совпадала со средним уровнем жидкости, а ось y была направлена вертикально вверх.

Дно жидкости считается горизонтальным, абсолютно твердым и совпадающим с прямой $y=-h$. На дне выполняется условие непротекания.

Требование стационарности движения означает, что неизвестные функции η, u, v, p зависят от координат x, y и времени t следующим образом:

$$\eta=\eta(x-ct),\ u=u(x-ct,y), v=v(x-ct,y), p=p(x-ct,y).$$

Отметим, что функция $\eta=\eta(x)$ описывает профиль стационарной волны.

Изучаемые волны считаются периодическими по переменной x. Длина волны равна L. Условия периодичности имеют вид

$$\eta=\eta(x+L)=\eta(x),\ u(x+L,y)=u(x,y),\ v=v(x+L,y)=v(x,y),$$
$$p(x+L,y)=p(x,y).$$

Кроме того, профиль волны должен подчиняться условию нулевого среднего, $\langle\eta(x)\rangle=0$. Для определенности принято условие нулевого среднего значения для горизонтальной составляющей скорости частиц жидкости, $\langle u(x,y)\rangle=0$.

Упрощает математическую постановку задачи относительная функция тока и специальный линейный оператор типа свертки. Относительная функция тока определяется равенствами $u = c\psi_y, v = -c\psi_x$. Из этого определения следует, что относительная функция тока периодическая по переменной x и удовлетворяет условию нулевого среднего, этим же условиям удовлетворяет функция $\psi(x) = \psi(x,0)$.

Замечание 1. Именно функция одной переменной $\psi(x)$, а не функция двух переменных $\psi(x,y)$ будет использована в нашем способе решения рассматриваемой задачи. Функцию $\psi(x)$ естественно назвать относительной функцией тока на среднем горизонте (ОФТСГ).

Решению задачи о строении и характеристиках стационарной нелинейной волны содействует специальный линейный оператор, который определим следующим образом.

Определение 1. Пусть функция $\psi = \psi(x,y)$ является гармонической в полосе $-h < y < 0$ и удовлетворяет следующим двум условиям на границе полосы:

$$\psi(x,y) = 0 \text{ при } y = -h, \ \psi(x,y) = \psi(x) \text{ при } y = 0, \qquad (1)$$

где $\psi(x)$ — ограниченная непрерывная функция. Тогда действие оператора V на функцию $\psi(x)$ выражается равенством

$$V(\psi(x)) = \psi_y(x,0). \qquad (2)$$

Несложно найти результат действия оператора V на косинусы.

Утверждение 1. Для действия оператора V на косинус справедливо равенство

$$V(\cos(kx)) = k\,R\cos(kx), R = cth(kh). \qquad (3)$$

Для доказательства достаточно решить задачу определения гармонической функции, удовлетворяющей граничным условиям (1), где $\psi(x)\cos(kx)$. Решение этой простой задачи приводит к формуле $\psi(x,y) = \cos(kx)\dfrac{sh(k(y+h))}{sh(kh)}$, откуда с помощью формулы (2) получаем равенство (3).

Замечание 2. Можно доказать путем решения краевой задачи, сформулированной в определении 1, что для действия оператора V на произвольную непрерывную ограниченную функцию $\psi(x)$ справедлива формула

$$V(\psi(x)) = G(x) * \psi(x),$$

где $G(x) = G_y^*(x,0)$, $G^*(x,y) = -\dfrac{1}{2h}\dfrac{\sin(\frac{\pi y}{h})}{ch(\frac{\pi x}{h}) - \cos(\frac{\pi y}{h})}$.

Таким образом, оператор V является интегральным оператором типа свертки.

Нам потребуются еще один факт, относящийся к функциям, удовлетворяющим условию нулевого среднего.

Утверждение 2. Пусть функция $\psi(x)$ будет периодической и удовлетворяет условию нулевого среднего. Тогда функция $\xi(x)=V(\psi(x))$ также является периодической и удовлетворяет условию нулевого среднего.

Обобщение этого утверждения такое (оно потребуется в пункте 3).

Утверждение 3. Для действия оператора V на косинусы $\cos(2kx)$ и $\cos(3kx)$ имеют место формулы

$$V(\cos(2kx))=kR^{-1}(R^2+1)\cos(2kx), \tag{4}$$

$$V(\cos(3kx))=3k(3R^2+1)^{-1}R(R^2+3)\cos(3kx). \tag{5}$$

Преобразование кинематического и динамического условий. Динамическая глубина

В этом пункте будет выполнено преобразование кинематического и динамического условий. Это поможет сформулировать рациональную математическую постановку задачи о стационарной нелинейной волне на поверхности идеальной жидкости.

Преобразованная форма кинематического условия получается интегрированием стандартной формы этого условия, что дает равенство

$$-\eta(x)+\psi(x,\eta(x))=const. \tag{6}$$

Выполнив расчет объемного расхода жидкости через каждую вертикаль, получаем равенство $Q=-\eta(x)+\psi(x,\eta(x))$. Учитывая, что в отсутствие волн $Q=ch$, введем такое обозначение для расхода жидкости при наличии волн:

$$Q=cd\,. \tag{7}$$

Параметр d назовем динамической глубиной.

Из формул (6) и (7) следует соотношение

$$-\eta(x)+\psi(x,\eta(x))=d-h. \tag{8}$$

Разлагая левую часть соотношения (8) в ряд Маклорена с точностью до слагаемого третьего порядка малости, получаем следующее приближенное равенство:

$$-\eta(x)+\eta(x)\xi(x)-\frac{1}{2}H_2(x)\psi''(x)=d-h. \tag{9}$$

Здесь обозначено

$$\psi(x)=\psi(x,0),\ \xi(x)=\psi_y(x,0)=V(\psi(x)),\ H_2(x)=\eta^2(x) \qquad (10)$$

и учтено, что в силу гармоничности функции $\psi(x,y)$ справедливо равенство $\psi_{yy}(x,0)=\psi''(x)$.

Равенство (9) будет первым уравнением в математической постановке рассматриваемой задачи.

Динамическое условие с помощью интеграла Бернулли и разложения в ряд Маклорена с точностью до слагаемого третьего порядка малости принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}&P+(-s\eta(x)+\xi(x))-\eta(x)\psi''(x)-\frac{1}{2}(\psi'(x))^2-\frac{1}{2}\xi^2(x)+\\&+\eta(x)(\psi''(x)\xi(x)-\psi'(x)\xi'(x))-\frac{1}{2}H_2(x)\xi''(x)=0.\end{aligned} \qquad (11)$$

Здесь обозначено

$$s=\frac{g}{c^2}\,. \qquad (12)$$

Равенство (11) будет вторым уравнением в математической постановке рассматриваемой задачи.

Теперь можно сформулировать математическую постановку рассматриваемой задачи. Это делается объединением уравнений (9) и (11), а также второго и третьего из равенств (10).

Математическая постановка задачи. Требуется найти приближенные значения параметров s, d, P и выражения для функций $\eta(x)$, $\psi(x)$, $\xi(x)$, $H_2(x)$, которые подчиняются уравнениям

$$-\eta(x)+\psi(x)+\eta(x)\xi(x)-\frac{1}{2}H_2(x)\psi''(x)\equiv d-h,$$

$$\begin{aligned}&P+(-s\eta(x)+\xi(x))-\eta(x)\psi''(x)-\frac{1}{2}(\psi'(x))^2-\frac{1}{2}\xi^2(x)+\\&+\eta(x)(\psi''(x)\xi(x)-\psi'(x)\xi'(x))-\frac{1}{2}H_2(x)\xi''(x)\equiv 0,\end{aligned}$$

$$\xi(x)=V(\psi(x)),\ H_2(x)=\eta^2(x) \qquad (13)$$

и условиям периодичности и нулевого среднего.

Отметим особенность нашего подхода к решению задачи: математическая постановка содержит только четыре относительно простых уравнений для четырех функций одной независимой переменной. Приближенное решение уравнений (13) ищется в виде разложений по степеням безразмерного волнового числа. Эти *разложения* таковы:

$$s \equiv ks_0(1+s_1(ka)+s_2(ka)^2)\,,$$

$$\eta(x) \equiv k^{-1}(\cos(kx)(ka)+\eta_2(x)(ka)^2+\eta_3(x)(ka)^3),$$

$$\psi(x) \equiv k^{-1}(\psi_1(x)(ka)+\psi_2(x)(ka)^2+\psi_3(x)(ka)^3),$$

$$\xi(x) \equiv \xi_1(x)(ka)+\xi_2(x)(ka)^2+\xi_3(x)(ka)^3\,, \tag{14}$$

$$H_2(x) \equiv k^{-2}H_{22}(x)(ka)^2\,,$$

$$d \equiv h+d_1(ka)+d_2(ka)^2+d_3(ka)^3\,,$$

$$P \equiv P_1(ka)+P_2(ka)^2+P_3(ka)^3\,.$$

Функции $\eta_2(x)$, $\eta_3(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$ считаются периодическими с периодом $L=2\pi/k$. Следствием этой периодичности является периодичность функций $\xi_1(x)$, $\xi_2(x)$, $\xi_3(x)$, $H_{22}(x)$. Ряд Фурье для функций $\eta_2(x)$ и $\eta_3(x)$ не содержит слагаемого, пропорционального $\cos(kx)$ ввиду условия ортогональности этих функций основной гармонике.

Разложения для функции $\eta_2(x)$ и параметра d учитывают, что в линейном приближении $\eta(x)=a\cos(kx)$, $d=h$.

Системы уравнений для трех низших приближений и их решение

В этом пункте выполняется процедура вывода систем уравнений для трех низших приближений. Сначала делается подстановка степенных рядов (14) в уравнения (13), которые расщепляются. Это дает четыре семейства уравнений, которые сгруппированы в три системы уравнений для трех низших приближений. Результат такой:

— система уравнений линейного приближения:

$$\psi_1(x)=\cos(kx), \xi_1(x)=s_0\cos(kx),\ \ \xi_1(x)-k^{-1}V(\psi_1(x))=0;$$

— система уравнений второго приближения:

$$-\eta_2(x)+\psi_2(x)=B_{21}(x)+d_2\,,\ -s_0\eta_2(x)+\xi_2(x)=$$
$$=B_{22}(x)-P_2\,,\ \xi_2(x)-k^{-1}V(\psi_2(x))=0,$$

где

$$B_{21}(x)=-\cos(kx)\cdot\xi_1(x),$$

$$B_{22}(x)=s_0s_1\cos(kx)+k^{-2}(\frac{1}{2}(\psi_1'(x))^2+\cos(kx)\psi_1''(x))+\frac{1}{2}\xi_1^2(x);$$

— система уравнений третьего приближения:

$$-\eta_3(x)+\psi_3(x)=B_{31}(x)+d_2\,,\ -s_0\eta_3(x)+\xi_3(x)=$$
$$=B_{32}(x)-P_3\,,\ \xi_3(x)-k^{-1}V(\psi_3(x))=0,$$

где

$$B_{31}(x) = -\eta_2(x)\xi_1(x) - \cos(kx)\xi_2(x) + \frac{1}{2}k^{-2}H_{22}(x)\psi_1''(x),$$

$$B_{32}(x) = s_0(s_2\cos(kx) + s_1\eta_2(x)) + k^{-2}(\eta_2(x)\psi_1''(x) + \psi_1'(x)\psi_2'(x) +$$
$$+\cos(kx)\psi_2''(x)) - \cos(kx)(\psi_1''(x)\xi_1(x) - \psi_1'(x)\xi_1'(x)) + \frac{1}{2}H_{22}(x)\xi_1''(x) + \xi_1(x)\xi_2(x),$$

$$H_{22}(x) = \frac{1}{2}k^{-2}(1+\cos(2kx)).$$

Эти уравнения необходимо дополнить условиями периодичности и нулевого среднего для функций $\eta_2(x)$, $\eta_3(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$,$\psi_3(x)$, $\xi_1(x)$, $\xi_2(x)$ и $\xi_3(x)$.

Решение системы уравнений линейного приближения имеет вид

$$\psi_1(x) = \cos(kx), \xi_1(x) = R\cdot\cos(kx),\ s_0 = R.$$

Замечание 4. Следствием значения параметра s_0 и равенства (12) является хорошо известное линейное дисперсионное соотношение

$$c = \sqrt{\frac{g\ \ th(kh)}{k}}\ .$$

Значение s_0 позволит упростить вторые уравнения систем уравнений второго и третьего приближений. В свое время это будет сделано.

Переходим к решению системы уравнений второго приближения. Для этого сначала необходимо выполнить процедуры приведения исходных выражений функций $B_{21}(x)$ и $B_{22}(x)$ к косинус-многочленам. Выполнение этих процедур дает следующий результат:

$$B_{21}(x) = -\frac{1}{2}R - \frac{1}{2}R\cos(2kx),$$
$$B_{22}(x) = \frac{1}{2^2}(R^2-1) + R\cdot s_1\cos(kx) + \frac{1}{2^2}(R^2-3)\cos(2kx).$$

Благодаря найденным выражениям значению параметра s_0 система уравнений второго приближения становится следующей:

$$-\eta_2(x) + \psi_2(x) = d_2 - \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}R\cos(2kx),$$
$$-R\eta_2(x) + \xi_2(x) = -P_2 + \frac{1}{2^2}(R^2-1) + R\cdot s_1\cos(kx) + \frac{1}{2^2}(R^2-3)\cos(2kx),$$
$$\xi_2(x) - k^{-1}V(\psi_2(x)) = 0.$$

Поскольку функции $\eta_2(x)$, $\psi_2(x)$ и $\xi_2(x)$ должны подчиняться условию нулевого среднего, то параметры d_2 и P_2 должны иметь следующие значения:

$$d_2 = \frac{1}{2}R,\ P_2 = \frac{1}{2^2}(R^2-1).$$

Оба параметра имеют положительные значения.

Положительность значения параметра d_2 означает, что объемный расход жидкости, переносимой нелинейной волной, больше расхода жидкости, переносимой линейной волной. Кроме того, выражение для параметра d_2 показывает, что объемный расход жидкости, переносимой нелинейной волной, увеличивается с ростом амплитуды волны.

Благодаря найденным значениям параметров d_2 и P_2 система уравнений второго приближения упрощается и принимает вид

$$-\eta_2(x)+\psi_2(x)=-\frac{1}{2}R\cos(2kx),$$
$$-R\eta_2(x)+\xi_2(x)=R\cdot s_1\cos(kx)+\frac{1}{2^2}(R^2-3)\cos(2kx),$$
$$\xi_2(x)-k^{-1}V(\psi_2(x))=0.$$

Ясно, что решение этой системы уравнений следует искать в виде следующих выражений:

$$\eta_2(x)=\eta_{22}\cos(2kx),\ \psi_2(x)=\psi_{22}\cos(2kx),\ \xi_2(x)=\xi_{22}\cos(2kx). \qquad (15)$$

Для того чтобы найти значения коэффициентов η_{22}, ψ_{22} и ξ_{22}, следует подставить выражения (15) в систему уравнений второго приближения. Эта процедура, использующая равенство (4), приводит к следующему результату:

$$\eta_2(x)=\frac{1}{2^2}R(3R^2-1)\cos(2kx),\ \ \psi_2(x)=\frac{3}{2^2}R(R^2-1)\cos(2kx),$$
$$\xi_2(x)=\frac{3}{2^2}(R^4-1)\cos(2kx),\ \ s_1=0.$$

Переходим к решению системы уравнений третьего приближения. Действуя как в предыдущем случае, с помощью равенства (5) получаем следующий результат:

$$\eta_3(x)=\frac{3}{2^6}R(3R^2-1)(3R^4+1)\cos(3kx),$$
$$\psi_3(x)=\frac{1}{2^3}R^2(6R^2-1)\cos(kx)+\frac{1}{2^6}R(R^2-1)(3R^2+1)(9R^2-13)\cos(3kx),$$
$$\xi_3(x)=\frac{1}{2^3}R^3(6R^2-1)\cos(kx)+\frac{3}{2^6}R^2(R^2-1)(R^2+3)(9R^2-13)\cos(3kx),$$
$$s_2=\frac{1}{2^3}R(9R^4-10R^2+9).$$

Решение систем уравнений для трех низших приближений завершено.

Результаты решения систем уравнений для трех низших приближений дают следующие выражения для уровня свободной поверхности, образуемого стационарной нелинейной периодической волной, ОФТСР, а также значения параметра s, динамической глубины и параметра P.

Выражение уровня свободной поверхности, образуемого стационарной нелинейной периодической волной и ОФТСГ:

$$\eta(x) \equiv a\cos(kx) + \frac{1}{2^2} k\,R(3R^2-1)a^2\cos(2kx) + \frac{3}{2^6} k^2\,R(3R^2-1)(3R^4+1)a^3\cos(3kx),$$

$$\psi(x) \equiv a\cos(kx) + \frac{3}{2^2} k\,R(R^2-1)a^2\cos(2kx) - \frac{1}{2^3} k^2\,R^2(6R^2-1)a^3\cos(kx) +$$

$$+\frac{1}{2^6} k^2\,R(R^2-1)(3R^2+1)(9R^2-13)a^3\cos(3kx).$$

Значения параметра s, динамической глубины и параметра P:

$$s \equiv k\,R(1-\frac{1}{2^3}R(9R^4-10R^2+9)(ka)^2), \quad d \equiv h + \frac{1}{2}R(ka)^2,\; P = \frac{1}{2^2}(R^2-1)(ka)^2.$$

Нелинейное дисперсионное соотношение

Воспользовавшись соотношением (12), которое связывает скорость волны и параметр s, и приближенным выражением для параметра s, получаем нелинейное дисперсионное соотношение, которое имеет следующий вид:

$$c = \sqrt{\frac{g}{k\,R}}(1+\frac{1}{2^4}R(9R^4-10R^2+9)(ka)^2).$$

Это выражение показывает, что скорость нелинейной стационарной волны растет с ростом ее амплитуды. Для уединенной волны это свойство обнаружил Скотт Рассел.

Строение и характеристики коротких и длинных волн

Короткие волны на поверхности жидкости конечной глубины можно рассматривать так же, как волны произвольной длины на поверхности жидкости бесконечной глубины.

В случае коротких волн $kh >> 1$, поэтому $R \approx 1$. Тогда выражения уровня свободной поверхности, образуемого короткой стационарной нелинейной периодической волной, и ОФТСГ таковы:

$$\eta(x) \equiv a\cos(kx) + \frac{1}{2} k\,a^2\cos(2kx) + \frac{3}{2^3} k^2\,a^3\cos(3kx),$$

$$\psi(x) \equiv a(1-\frac{5}{2^3}(ka)^2)\cos(kx).$$

Значения динамической глубины и параметра P:

$$d - h \equiv \frac{1}{2}(ka)^2, P = 0.$$

Нелинейное дисперсионное соотношение:

$$c = \sqrt{\frac{g}{k\,R}}(1+\frac{1}{2}(ka)^2).$$

В случае длинных волн $kh<<1$, поэтому $R\approx(kh)^{-1}$. Тогда выражение уровня свободной поверхности, выражение ОФТСГ, значения динамической глубины и параметра P, а также нелинейное дисперсионное соотношение принимают следующий вид:

$$\eta(x)\equiv a\cos(kx)+\frac{3}{2^2k^2h^3}a^2\cos(2kx)+\frac{3^3}{2^6k^5h^7}a^3\cos(3kx),$$

$$\psi(x)\equiv a\cos(kx)+\frac{3}{2^2k^2h^3}a^2\cos(2kx)-\frac{5}{2^3k^2h^4}a^3\cos(kx)+\frac{3^3}{2^6k^5h^7}a^3\cos(3kx),$$

$$d\equiv h+\frac{1}{2h}ka^2,\, P=\frac{1}{2^2h^2}a^2,\, c=\sqrt{gh}(1+\frac{3^2}{2^4k^3h^5}a^2).$$

Замечание 5. В формулах этого пункта следует считать, что $\frac{a}{kh^2}<<1$.

Заключение

Получено приближенное решение задачи о стационарной нелинейной волне на поверхности жидкости конечной глубины. Нами модифицирован первый метод Стокса. Особенности нашего метода: упрощены кинематическое и динамическое граничные условия, введен интегральный оператор типа свертки, определены четыре функции одной переменной, основной из которых является профиль стационарной волны. Благодаря этому рассматриваемая задача сведена к решению трех систем уравнений для трех низших приближений. Эти системы дополняются условием нулевого среднего для уровня и ОФТСГ, а также условием ортогональности уровня основной гармонике.

Список литературы

1. *Scott Russel J.* Report on waves // Reports of the Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science. L., 1845. P. 311—390.

2. *Scott Russel J.* The Wave of Translation. L., 1885.

3. *Stokes G.G.* On the theory of oscillatory waves // Cambr. Trans. 1847. Vol. 8. P. 443—473.

4. *Stokes G.G.* Math. Phys. Papers. 1880.

5. *Shwartz B.* Journal of Fluid Mechanics. 1974.

6. *Бабенко К.И.* Несколько замечаний к теории поверхностных волн конечной амплитуды // Доклады АН СССР. 1987. Т. 29, №5. С. 1033—1037.

7. *Karabut E.A.* An approximation for the highest gravity waves on water of finite depth // J. Fluid Mech. 1998. Vol. 372. P. 45—70.

8. *Карабут Е.А.* О суммировании ряда Вайтинга в задаче об уединенной волне // Прикладная механика и техническая физика. 1999. Т. 40, №1. С. 44—54.

9. *Карабут Е.А.* Высшие приближения теории кноидальных волн // Прикладная механика и техническая физика. 2000. Т. 41, №1. С. 92—104.

10. *Zaitsev A.A., Rudenko A.I.* Stationary waves on the shear stream // Тезисы докладов Междунар. конф. по избранным трудам современной математики, приуроченной к 200-летию со дня рождения К.Г. Якоби. Калининград, 2005. С. 267—268.

11. *Зайцев А.А., Руденко А.И.* К теории стационарных волн на горизонтальном течении с линейным профилем скорости // Прикладная механика и техническая физика. 2006. Т. 47, №3. С. 43—49.

12. *Руденко А.И.* Нелинейные стационарные волны на сдвиговом горизонтальном течении жидкости : автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. Калининград, 2007.

13. *Boussinesq J.* Theorie des ondes et des remous qei se propagent // Jour. Math. Pures Appl. 1872. Vol. 17, №2. P. 55—108.

14. *Korteweg D.J., Vries G.* On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves // Phil. Mag. 1895. Vol. 39. P. 422—443.

15. *Некрасов А.И.* О волнах установившегося вида // Известия Иваново-Вознесенского политехнического института. 1921. №3. С. 52—65.

16. *Levi-Civita T.* Determination rigoutruse des ondes irrotationeless d'ampleur finite // Mathematical Annales. 1925. Vol. 93. P. 264—313.

17. *Красовский Ю.П.* Теория установившихся волн конечной амплитуды // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1961. Т. 1. С. 836—855.

18. *Тер-Крикоров А.М.* Существование периодических волн, вырождающихся в уединенную // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 24, вып. 4. С. 622—636.

19. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М., 1984.

20. *Габов С.А.* Введение в теорию нелинейных волн. М., 1988.

21. *Овсянников Л.В., Макаренко Н.И., Налимов В.И. и др.* Нелинейные проблемы теории нелинейных поверхностных и внутренних волн. Новосибирск, 1985.

Об авторах

Анатолий Алексеевич Зайцев — канд. физ.-мат. наук, доц., Калининградский государственный технический университет, Россия.

E-mail: alex-rudenko@bk.ru

Алексей Иванович Руденко — канд. физ.-мат. наук, доц., Калининградский государственный технический университет, Россия.

E-mail: alex-rudenko@bk.ru

Светлана Михайловна Алексеева — канд. физ.-мат. наук, доц., Калининградский государственный технический университет, Россия.

E-mail: alekseeva-sm@mail.ru

The authors

Dr Anatoly A. Zaitsev, Associate Professor, Kaliningrad State Technical University, Russia.

E-mail: alex-rudenko@bk.ru

Dr Alexey I. Rudenko, Associate Professor, Kaliningrad State Technical University, Russia.

E-mail: alex-rudenko@bk.ru

Dr Svetlana M. Alekseeva, Associate Professor, Kaliningrad State Technical University, Russia.

E-mail: alekseeva-sm@mail.ru