



УДК 539.41:621.83.062.6

И. А. Золотов, О. В. Шарков

**АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ  
НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ВНЕШНЕЙ ОБОЙМЫ  
РОЛИКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ СВОБОДНОГО ХОДА**

Внешняя обойма является важным конструктивным элементом роликовых механизмов свободного хода. В настоящее время для расчета напряженного состояния внешней обоймы используют математические модели, полученные с существенными допущениями. Проведен анализ и даны рекомендации по использованию расчетных математических моделей. Установлено, что при изменении числа заклинивающихся роликов в диапазоне от 3 до 10 происходит уменьшение величины максимальных напряжений, а в диапазоне от 10 до 20 – увеличение напряжений.

*The outer shell is an important constructive element of roller one-way clutches. Currently, for the calculation of the stress state of the outer shell using the mathematical models obtained based on the essential assumptions. In the article the analysis is carried out and recommendations about use of design mathematical models are made. It is established that at change of number of wedging rollers in a range from 3 to 10 there is a reduction of value of the maximum stress, and in a range from 10 to 20 – increase of stress.*

**Ключевые слова:** роликовый механизм свободного хода, внешняя обойма, напряженное состояние, прочность, математическая модель.

**Key words:** roller one-way clutch, outer shell, stress state, strength, mathematical model.

Одними из наиболее нагруженных узлов в приводах многих машин является роликовые механизмы свободного хода (МСХ), которые функционируют в условиях высокой частоты включения и больших динамических нагрузок.

Основными конструктивными элементами, передающими нагрузку в роликовых МСХ, служат внутренняя звездочка, заклинивающиеся ролики и внешняя обойма. При проектировании роликовых МСХ чаще всего ограничиваются проверкой на прочность в местах контактов роликов и звездочки по допускаемым касательным или нормальным напряжениям [1–3]. Проверочный расчет внешней обоймы опускается, а ее параметры задаются по конструктивным рекомендациям. Так, толщину обоймы  $h$  в зависимости от ее внутреннего диаметра  $D$  рекомендуется принимать [3]: при малых диаметрах  $1/5 D$ , для больших –  $1/8 D$ .

Такой подход не вполне оправдан, так как на практике разрушение внешней обоймы наблюдается достаточно часто, а ее масса может составлять до  $1/3 \dots 1/2$  от общей массы механизма [4–8].

Следовательно, обоснованный выбор геометрических характеристик внешней обоймы на основе оценки ее напряженного состояния – важный резерв экономии материала.

В настоящее время расчетную схему внешней обоймы получают с использованием существенных упрощений. Ее сводят к кольцу, нагру-



женному сосредоточенными силами, действующими в его плоскости (рис. 1), и используют математические модели, предназначенные для расчета колец простой формы с равномерным распределением напряжений по сечениям.

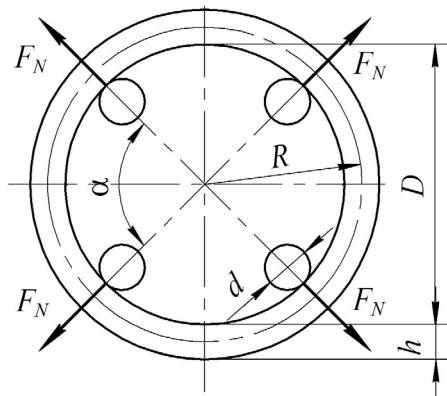


Рис. 1. Расчетная схема внешней обоймы

Для расчета максимальных напряжений, возникающих во внешней обойме роликовых МСХ, наиболее широкое применение нашли несколько моделей, предложенных С.В. Мальцевым, М.Н. Пилипенко и О.А. Ряховским (табл. 1). Все обозначения в моделях (1-1) – (1-III) соответствуют принятым в расчетной схеме на рисунке 1.

Таблица 1

**Математические модели для определения напряжений**

Тип модели	Формула
Модель 1-I. Источник [10]	$\sigma_{\max} = \frac{F_N}{2hl} \left( \frac{1}{\sin(\pi/z)} + \frac{1,5\pi(D+h)}{zh} \right), \quad (1)$ <p>где <math>F_N</math> – нормальная сила, действующая на внешнюю обойму со стороны ролика; <math>h</math> – толщина внешней обоймы; <math>l</math> – длина ролика; <math>z</math> – число роликов; <math>D</math> – внутренний диаметр внешней обоймы</p>
Модель 1-II. Источник [9]	$\sigma_{\max} = \frac{F_N \operatorname{ctg}(\pi/z)}{2hl} + \frac{M_{\max}(h-2s)}{hDls}, \quad (2)$ <p>где <math>M_{\max}</math> – максимальный изгибающий момент, возникающий во внешней обойме; <math>R</math> – радиус кривизны окружности, проходящей через центр тяжести сечения обоймы; <math>s</math> – расстояние нейтральной оси обоймы до центра тяжести ее сечения.</p> <p>Здесь:</p> $M_{\max} = F_N R \left[ \frac{z}{2\pi} \left( 1 + \frac{h^2}{12R^2} \right) - 0,5 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{z} \right],$ $R = 0,5(D+h), \quad s = \frac{h^2}{12R}$



Тип модели	Формула
Модель 1-III источник [3]	$\sigma_{\max} = \sqrt{(\sigma + \sigma_{II})^2 + (1,5\tau)^2}, \quad (3)$ <p>где <math>\sigma</math> – нормальное напряжение; <math>\sigma_{II}</math> – напряжение изгиба; <math>\tau</math> – касательное напряжение. Здесь:</p> $\sigma = \frac{\pi F_N}{2lhz}, \quad \sigma_{II} = \frac{3F_N R}{lh^2} \left( \operatorname{ctg} \frac{\pi}{z} - \frac{z}{\pi} \right), \quad \tau = \frac{F_N}{2lh}$

Предлагаемые модели приведены в источниках без уточнения диапазона возможного применения и численных примеров их использования для расчета реальных конструкций внешней обоймы МСХ.

В связи с этим вначале определим возможный диапазон использования моделей исходя из следующих соображений. Число нормальных сил  $F_N$ , действующих на внешнюю обойму, равно числу заклинивающихся роликов  $z$ . Исходя из проектных рекомендаций [2; 3; 5; 9] и анализа реальных конструкций роликовых МСХ [3; 5–8] диаметр заклинивающихся роликов находится из соотношения  $d = (0,066 \dots 0,20)D$ .

Нетрудно определить, что наибольшее число роликов такого диаметра, которое может быть вписано в окружность диаметром  $D$ , не превышает 20. Это подтверждается справочниками [3; 5] и каталогами фирм-производителей МСХ [3; 6–8], из которых следует, что число роликов чаще всего составляет 3...8, но может доходить до 20.

Теоретически число роликов можно увеличить до 25...30 за счет уменьшения их диаметра, что обеспечивает более равномерное распределение действующих сил, но в этом случае наблюдается значительный рост контактных напряжений между роликами и внешней обоймой.

На рисунке 2 представлены результаты расчета по формулам (1)–(3), характеризующие влияние числа  $z$  на возникающего во внешней обойме напряжение  $\sigma_{\max}$ .

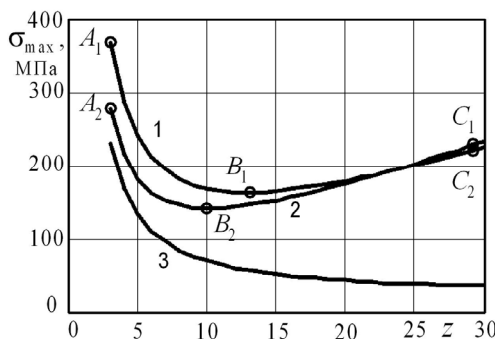


Рис. 2. Изменение наибольших напряжений в зависимости от числа роликов:  
1 – модель 1-I; 2 – модель 1-II; 3 – модель 1-III



Геометрические и силовые параметры выбраны как для реальной конструкции внешней обоймы:

$$D = 140 \text{ мм}; h = 14 \text{ мм}; l = 48 \text{ мм}; F_N = 22700 \text{ Н}.$$

Как видно из полученных результатов, для моделей 1-I и 1-II при увеличении числа роликов наблюдается два участка. Первые участки – это участки (соответственно  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$ ), на которых происходит уменьшение напряжений, вторые – участки (соответственно  $B_1C_1$  и  $B_2C_2$ ), на котором происходит их увеличение. Таким образом, для участков  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  отмечается «парадоксальное» с физической точки зрения явление, когда вследствие увеличения числа роликов (числа сил  $F_N$ , т. е. суммарной нагрузки действующей на внешнюю обойму) величина возникающих в ней напряжений уменьшается. При использовании модели 1-III уменьшение напряжений происходит для всего диапазона роста суммарной нагрузки.

Такой «парадоксальный» характер изменения напряжений требует дополнительного анализа достоверности предложенных моделей 1-I–1-III на основании широко используемых и хорошо проверенных моделей, применяемых для расчета напряженного состояния плоских колец методами сопротивления материалов.

В общем случае наибольшее нормальное напряжение  $\sigma_{\max}$  в криволинейном брус (кольце) находится по формуле [11]

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_N = \frac{M}{W} + \frac{N}{F}, \quad (4)$$

где  $\sigma_m$  – напряжения от изгибающего момента;  $\sigma_N$  – напряжения от нормальных сил;  $M$  и  $N$  – изгибающий момент и нормальная сила в сечении кольца;  $W$  – момент сопротивления сечения кольца;  $F$  – площадь поперечного сечения кольца.

Для расчета силовых факторов (изгибающего момента  $M$  и нормальной силы  $N$ ), действующих в сечении плоского кольца можно использовать несколько моделей (табл. 2). Обозначения в таблице 2 приняты как для рисунка 1 и таблицы 1.

Таблица 2

Математические модели для определения силовых факторов

Тип модели	Формула
Модель 2-I. Источник [11]	$M = \frac{F_N R}{2} \left[ \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\pi/z)} - \frac{z}{\pi} \right], \quad (5)$
	$N = \frac{F_N}{2 \sin(\pi/z)} \cos(\varphi) \quad (6)$

Тип модели	Формула
Модель 2-II. Источник [12]	$M = F_N R \left[ \frac{z}{2\pi} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{z} - \varphi\right)}{2 \sin \frac{\pi}{z}} \right],$ $N = \frac{F_N}{2 \sin(\pi/z)} \cos\left(\frac{\pi}{z} - \varphi\right)$
Модель 2-III. Источник [13]	$M = F_N R \left[ \frac{z}{2\pi} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{z} - \varphi\right)}{2 \sin \frac{\pi}{z}} \right],$ $N = \frac{F_N}{2 \sin(\pi/z)} \cos\left(\frac{\pi}{z} - \varphi\right)$

Из таблицы 2 следует, что формулы моделей 2-II и 2-III после несложных преобразований принимают вид модели 2-I, которую и будем использовать в дальнейших расчетах.

На рисунке 3 представлены результаты расчета по формуле (4), возникающий в кольце напряжений:  $\sigma_M$ ,  $\sigma_N$ ,  $\sigma_{\max}$ . Определение силовых факторов проводилось по формулам (5) и (6) модели 2-I при условии  $\varphi = \alpha$ . Для наглядности все напряжения представлены в безразмерном виде, полученном в результате деления текущего напряжения  $\sigma_i$  на величину напряжения  $\sigma_M = 255$  МПа при  $z = 3$ .

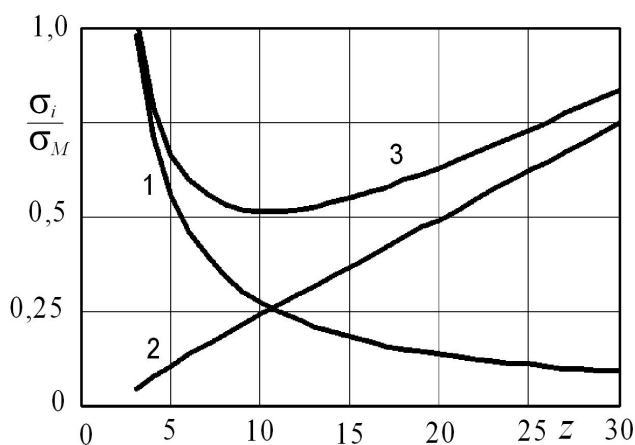


Рис. 3. Изменение относительных напряжений в зависимости от числа роликов по модели II-1:

1 -  $\sigma_M$ ; 2 -  $\sigma_N$ ; 3 -  $\sigma_{\max}$



Анализ приведенных кривых дает следующие результаты. Для всего диапазона увеличения числа сил  $F_N$  (числа роликов  $z$ ) происходит нелинейное уменьшение напряжения  $\sigma_M$  от изгибающего момента и линейный рост напряжения от нормальных сил. Физическая картина этого явления объясняется тем, что при увеличении числа сил  $F_N$  уменьшаются расстояния между ними (плеч действия сил), вследствие чего уменьшается величина изгибающего момента  $M$  согласно формуле (5). Одновременно происходит пропорциональный рост нормальной силы в сечении кольца  $N$  по формуле (6).

Таким образом, имеется диапазон, в котором при увеличении числа сил (роликов) от 3 до 10 снижение напряжения  $\sigma_M$  происходит быстрее, чем рост напряжения  $\sigma_N$ . Вследствие этого наблюдается уменьшение величины максимальных напряжений  $\sigma_{max}$ . При увеличении числа сил (роликов) свыше 10 рост напряжения  $\sigma_N$  начинает существенно превосходить уменьшение напряжения  $\sigma_M$ . Для этого диапазоне наблюдается нелинейный рост максимальных напряжений  $\sigma_{max}$ .

Следует заметить, что изменение величины напряжения  $\sigma_{max}$  носит аналогичный характер для широкого диапазона изменения внутреннего диаметра внешней обоймы  $D = 40 \dots 240$  мм.

Как видно из рисунка 3, изменение напряжений  $\sigma_{max}$  носит характер аналогичный полученному на основании моделей 1-I и 1-II (рис. 2).

На основе полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Использование моделей 1-I и 1-II позволяет оценить характер влияния различных конструктивных и силовых параметров внешней обоймы роликовых МСХ на возникающие в ней наибольшие напряжения. Однако применение данных моделей для определения величины напряжения  $\sigma_{max}$  может привести к грубым ошибкам, так как они получены с использованием существенных допущений.

2. Использование модели 1-III не рекомендуется, так как полученные на ее основе результаты нельзя объяснить с физической точки зрения.

3. Оценка напряженного состояния внешней обоймы роликовых МСХ необходимо выполнять на основе моделей, полученных с использованием методов, позволяющих более полно учесть их конструктивную и силовую схемы, например за счет использования метода конечных элементов.

#### Список литературы

1. Orthwein W. C. Clutches and brakes: design and selection. N. Y., 2004.
2. Архангельский Г. В., Архангельский А. Г. Роликовые механизмы свободного хода. Одесса, 2009.
3. Ряховский О. А., Иванов С. С. Справочник по муфтам. Л., 1991.
4. Золотов И. А., Шарков О. В. Анализ напряженно-деформированного состояния внешней обоймы роликовых механизмов свободного хода // Известия вузов. Сер.: Машиностроение. 2013. № 10. С. 42–47.



5. *Анурьев В.И.* Справочник конструктора-машиностроителя : в 3 т. М., 2006. Т. 2.
6. *Freewheels (Trapped roller freewheel devices)* // Product catalogue Renold Power Transmission Ltd. Cardiff, 2005.
7. *Overrunning clutches and backstops* // Product catalogue Stieber GmbH. Heidelberg, 2008.
8. *Roller ramp clutches.* // Product catalogue № 9082 E 03/00 GMN (Paul Müller Industrie GmbH & Co. KG). Nürnberg, 2000.
9. *Мальцев В. Ф.* Роликовые механизмы свободного хода. М., 1968.
10. *Пилипенко М.Н.* Механизмы свободного хода. Л., 1966.
11. *Писаренко Г. С., Яковлев А.П., Матвеев В.В.* Справочник по сопротивлению материалов. Киев, 1988.
12. *Прочность. Устойчивость. Колебания* : справочник : в 3 т. М., 1968. Т. 1.
13. *Биргер И.А., Шорр Б.Я., Иосилевич Г.Б.* Расчет на прочность деталей машин. М., 1993.

### Об авторах

Иван Анатольевич Золотов – соиск., Калининградский государственный технический университет.

E-mail: zolivan@rambler.ru

Олег Васильевич Шарков – д-р техн. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: o\_sharkov@mail.com

### About authors

Ivan Zolotov, applicant, Kaliningrad State Technical University.

E-mail: zolivan@rambler.ru

Prof. Oleg Sharkov, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: o\_sharkov@mail.com