

*А. Г. Пушкарский*

#### ПЕРВОЕ УПОМИНАНИЕ ТЕОРЕМЫ ГЕДЕЛЯ<sup>1</sup>

*На основании документальных источников делается вывод о том, что впервые знаменитая теорема о неполноте была упомянута Геделем уже 6 сентября 1930 года на конференции в Кенигсбергском университете.*

*The article proves on the basis of documents that the first mention of the well-known incompleteness theory took place as early as September 6, 1930 at a conference at Königsberg University*

Logic will never be the same again  
*John von Neumann*

В недавно вышедшей на русском языке книге «Тени разума» ее автор, известный американский физик и математик Роджер Пенроуз, отмечает следующее событие: «В 1930 году на конференции в Кенигсберге блестящий молодой математик Курт Гедель произвел немалое впечатление на ведущих математиков и логиков со всего мира, представив их вниманию теорему, которая впоследствии получила его имя. Ее довольно быстро признали в качестве фундаментального вклада в основы математики — быть может, наиболее фундаментального из всех возможных, — я же, в свою очередь, утверждаю, что своей теоремой Гедель также положил начало важнейшему этапу развития философии разума» [7, с. 110].

Не входя в изложение биографии Геделя, напомним, что в 1929 году в Вене он защитил докторскую диссертацию, в которой доказал полноту исчисления предикатов первого по-

---

<sup>1</sup> Статья содержит результаты исследований, проведенных в рамках проекта РФФИ №05-06-80254-а «Формирование теории поиска вывода». Автор благодарен за помощь в подготовке материалов к данной статье В. Н. Брюшинкину, А. Н. Саликову и А. И. Троцаку.

рядка (непротиворечивость и независимость аксиом данного исчисления уже была доказана Д. Гильбертом и его учениками). 6 февраля 1930 года ему была присуждена ученая степень доктора философии. Поэтому, когда осенью того же года он участвовал в научном семинаре в г. Кенигсберге, организованном редакцией журнала «Erkenntnis», его имя было уже хорошо известно внутри логического сообщества.

Свой самый известный результат в области логики Гедель получил тоже осенью 1930 года, доказав так называемую теорему о неполноте (Первая теорема Геделя), представляющую собой одно из самых выдающихся достижений за всю историю логики и математики. Первая теорема Геделя утверждает, что если формальная теория  $T$ , включающая арифметику целых чисел, непротиворечива, то она неполна. Иначе говоря, существует имеющее смысл утверждение арифметики целых чисел (обозначим его  $S$ ), которое в рамках данной теории невозможно ни доказать, ни опровергнуть. Но либо утверждение  $S$ , либо утверждение «не  $S$ » истинно. Следовательно, в арифметике существует истинное утверждение, которое недоказуемо, а значит, и неразрешимо. Теорема Геделя о неполноте применима и в случае обращения к исчислению предикатов второго порядка<sup>2</sup>.

Считается, что впервые подробно ее доказательство Гедель изложил 23 октября 1930 года на заседании математической секции Венской академии наук. Статья под названием «Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I» («О формально неразрешимых предложениях Principia Mathematica и родственных систем I») с развернутым изложением теоремы поступила в редакцию лейпцигского журнала «Monatshefte für Mathematik und Physik» 17 ноября и вышла в 38-м томе в 1931 году (см., например [11, с. 91]).

Что же представил Гедель на конференции в Кенигсберге, проходившей с 5 по 7 сентября 1930 года, упоминал ли он здесь свою теорему о неполноте, и если да, то как эта информация была воспринята участниками?

<sup>2</sup> Доказательство этой теоремы, причем различными способами, можно найти в [3, 5, 9, 11].

Американский логик Хао Ван, ученик Геделя, написавший о его жизни и трудах несколько работ, а также участвовавший в систематизации его архива, так вспоминает о своей встрече с Геделем за два года до его смерти: «После своей отставки осенью 1976 года Гедель организовал мой визит в Институт высших исследований<sup>3</sup>. И с июля 1975 года по август 1976-го мне был предоставлен в дом на улице Эйнштейна (Einstein Drive). На протяжении всего этого времени Гедель почти никогда не бывал в своем офисе, и мы встретились только однажды — 9 декабря 1975 года. Однако довольно часто и продолжительно я беседовал с ним по телефону. Между октябрем 1975-го и мартом 1976 года мы обсуждали с ним в основном теоретические вопросы. Примерно в конце марта он был на короткое время госпитализирован и после этого стал остерегаться тем, которые требовали от него концентрации.

28 мая 1976 года он упомянул о небольшой конференции, состоявшейся в Кенигсберге осенью 1929-го<sup>4</sup>. Это подсказало мне идею расспросить его о его интеллектуальном развитии, и к 1 июля я уже составил список вопросов. Он согласился ответить на них и предложил мне записать и сохранить его ответы, чтобы опубликовать их после его смерти. В результате появилась вышеупомянутая статья под названием «Some Facts about Kurt Gödel» («Несколько фактов о Курте Геделе»), подсказанном самим Геделем. Он прочитал и одобрил текст, который был впервые опубликован в журнале *Journal of Symbolic Logic* [14], а затем воспроизведен в моей книге «Reflections on Kurt Gödel» («Размышления о Курте Геделе»)...)» [ 16, с. 81—82]. Далее Х. Ван приводит слова самого Геделя с соответствующими вставками: «Осенью 1930 года я принял участие в небольшой конференции в Кенигсберге. На ней присутствовали Карнап и (Джон) фон Нейман. Заседания не были «дискусси-

---

<sup>3</sup> В г. Принстон.

<sup>4</sup> Вероятно, случайная ошибка. Конференция проходила с 5 по 7 сентября 1930 года.

онными»<sup>5</sup>. Там я сделал небольшую ремарку и упомянул о своем результате (о неполноте). (Научный семинар в г. Кенигсберге был организован редакцией журнала «Erkenntnis» и стал вторым в серии семинаров, посвященных точным наукам (Tagung für Erkenntnislehre der exakten Wissenschaften). На нем 6 сентября Гедель сделал доклад о доказательстве полноты исчисления предикатов, полученном им в 1929 году, а на следующий день в рамках дискуссионной сессии попутно упомянул о своем новом результате в этой области, т. е. о теореме о неполноте)» [16, с. 83].

Чтобы более прояснить ситуацию с первым упоминанием этой знаменитой теоремы, обратимся к отчету о кенигсбергской конференции, напечатанному в журнале «Erkenntnis» [13]. В разделе «Дискуссии об основаниях математики» приведены две реплики Геделя:

«Гедель: Согласно формалистической точке зрения к осмысленным предложениям математики присоединяются трансфинитные (мнимые [Schein-]) предложения, которые сами по себе не имеют смысла, но служат лишь для того, чтобы сделать систему законченной, подобно тому, как в геометрии посредством введения бесконечно далеких точек приходят к завер-

---

<sup>5</sup> Действительно, дебатов между представителями трех направлений в основаниях математики не было. Вот как об этом через 30 лет вспоминал А. Гейтинг: «В сентябре 1930 г. редакция журнала организовала в Кенигсберге симпозиум, на котором впервые встретились представители логицизма, формализма и интуиционизма. Доклады об этих трех направлениях сделали соответственно Карнап, Нейман и я. Участники симпозиума серьезно пытались понять друг друга, но каждый был убежден, что его точка зрения единственно правильная, что никакая другая не имеет права называться математикой и что его точка зрения обязательно победит в будущем». Впоследствии и во многом благодаря работам Геделя положение изменилось: «Ни одно из направлений теперь не претендует на право представлять единственно верную математику. Философское значение исследований по основаниям математики состоит, по крайней мере частично, в разделении формальных, интуитивистских, логических и платонистских элементов в структуре классической математики и в точном определении областей действия и ограничений этих элементов...» [6, с. 224—225].

шенной системе. Эта точка зрения предполагает, что если к системе осмысленных предложений  $S$  добавить систему трансфинитных предложений и аксиом  $T$  и затем если из некоторого предложения из  $S$  окружным путем будет доказано определенное предложение из  $T$ , то это предложение также будет являться содержательно истинным, и, таким образом, посредством присоединения трансфинитных аксиом никакие содержательно ложные положения не становятся доказуемыми. Это требование обычно заменяют непротиворечивостью. Здесь я хотел бы указать на то, что оба эти требования ни в коем случае не позволительно рассматривать в дальнейшем как эквивалентные. Потому что, если в непротиворечивой формальной системе  $A$  (как, например, в классической математике) осмысленное предложение  $p$  является доказуемым посредством трансфинитной аксиомы, то из непротиворечивости следует лишь то, что *не- $p$*  *внутри* системы  $A$  формально недоказуемо. Несмотря на это, остается возможность, что посредством каких-либо содержательных (интуиционистских) рассуждений можно было бы представить такое предложение *не- $p$* , которое в  $A$  формально не представимо. В этом случае в  $A$  возможно было бы доказать предложение, ложность которого, несмотря на непротиворечивость  $A$ , могла бы быть показана посредством финитных рассуждений. Ничего подобного не может произойти, только если понятие «осмысленного предложения» понимается достаточно узко (например, ограничивается финитным числовым уравнением). Напротив, было бы, например, вполне возможно доказать положение формы  $(\exists x) F(x)$ , где  $F$  — финитное свойство натуральных чисел (так, например, подобную форму имеет отрицание гольдбаховского<sup>6</sup> положения), трансфинитными средствами математики и, с дру-

---

<sup>6</sup> Имеется в виду проблема Гольбаха, одна из самых известных проблем теории чисел. Она заключается в утверждении, что любое целое число, большее или равное шести, может быть представлено в виде суммы трех простых чисел. Х. Гольдбах сформулировал ее в 1742 году в письме Л. Эйлеру. И хотя данное утверждение проверено для очень больших чисел, оно так и не доказано до сих пор.

гой стороны, можно было бы показать посредством содержательных рассуждений то, что все числа имеют качества *не- $F$* , а именно то, и на это я хотел обратить особое внимание, что не могло бы быть возможным, если бы непротиворечивость формальной системы классической математики была бы доказана. Поэтому нельзя ни о какой формальной системе с уверенностью утверждать, что все содержательные рассуждения в ней представимы».

И далее:

«Гедель: Можно (при условии непротиворечивости классической математики) даже привести примеры таких положений (а именно, такого рода, какие мы находим у Гольдбаха или Ферма<sup>7</sup>), которые хотя и содержательно истинны, но в формальной системе классической математики недоказуемы. Если же добавить сюда отрицание подобного положения к аксиомам классической математики, то получится непротиворечивая система, в которой содержательно ложное положение доказуемо» [13, с. 147—148].

На реплики Геделя, видимо, обратили внимание, поскольку в конце указанного раздела напечатано «Добавление», написанное самим Геделем позже, по просьбе редакции “Erkenntnis”, возможно, для разъяснения его высказываний, сделанных в процессе дискуссий. Отметим, правда, что к этому моменту уже было известно доказательство теоремы Геделя о неполноте, представленное им буквально через месяц после конгресса математиков в Берлине. Приведем «Добавление» полностью:

---

<sup>7</sup> Имеется в виду великая теорема Ферма. Французский математик Пьер Ферма записал ее условия на полях своего экземпляра «Арифметики» Диофанта, изданной в 1621 году, с припиской: «...я нашел этому поистине чудесное доказательство, однако поля слишком узки, чтобы оно здесь вместились». Этот текст был издан Ферма-сыном в 1670 году, и более 300 лет она привлекала внимание математиков всего мира. В 1995 году теорема Ферма была доказана Эндрю Уайлсом, причем, это стало возможным в результате реализации целой исследовательской программы, результаты которой намного перекрыли ценность самой теоремы Ферма в области теории чисел.

## «Добавление

Ответственным редактором журнала “Erkenntnis” мне предложено написать резюме о результате моего недавнего исследования, опубликованного в «Ежемесячнике по математике и физике», том XXXVIII, “Über formal unentscheidbare Sätze der “Principia Mathematica“ und verwandter Systeme“ («О формально неразрешимых предложениях “Principia Mathematica“ и родственных систем), который на кенигсбергской встрече еще не мог быть представлен. В этой работе рассматриваются проблемы двоякого рода, а именно: 1. вопрос о полноте (разрешимости) формальной системы математики, 2. вопрос о непротиворечивости такой системы. Формальная система называется полной, когда каждый ее символ, обозначающий предложение, разрешим с помощью ее формальных аксиом, то есть если для каждого такого предложения  $A$  существует конечная цепь выводов, совершаемых по правилам логического исчисления, которое начинается с каких-либо аксиом и заканчивается предложением  $A$  или предложением  $не-A$ . Система  $S$  называется полной относительно определенного класса предложений  $R$ , если, по меньшей мере, каждое предложение  $R$  разрешимо из аксиом  $S$ . В вышеупомянутой работе было показано, что никакая система с конечным количеством аксиом не будет полна даже относительно только предложений арифметики\*. Под «арифметическими предложениями» понимаются такие предложения, в которых нет никаких других терминов кроме как  $+$ ,  $\cdot$ ,  $=$  (сложение, умножение, тождество, а именно, относящиеся к натуральным числам). Сюда же включаются также логические связки исчисления высказываний и, наконец, знаки для «все» и «существует», относящиеся только к переменным, которые входят в область натуральных чисел (в предложениях арифметики поэтому нет вообще ничего другого, что бы не относилось к натуральным числам). Даже для систем, которые содержат бесконечное множество аксиом,

---

\* При условии, что ложность арифметических предложений относительно данной системы недоказуема (прим. К. Геделя).

есть всегда неразрешимые арифметические предложения, если только они вообще (в самом общем случае) удовлетворяют условиям «правилом аксиом». Следуя сказанному, во всех известных формальных системах математики, например, “Princ. Math.” (вместе с аксиомами сводимости, выбора и бесконечности), аксиомы теории множеств Цермело-Френкеля и фон Неймана, формальная система школы Гильберта — во всех них есть неразрешимые предложения арифметики. Относительно доказательства непротиворечивости, прежде всего, следует заметить, что она здесь трактуется в формальном (гильбертовском) смысле, т. е. это означает, что непротиворечивость будет пониматься как чисто комбинаторное свойство правильно построенной знаковой системы, действующей по «правилам игры». Такие комбинаторные факты можно представить, выразив их в символах математической системы (примерно так как в “Princ. Math.”). И поэтому утверждение о том, что некоторая система  $S$  непротиворечива, будет выражено в символах самой этой системы (в особенности это распространяется на все выше перечисленные системы). Теперь становится ясным следующее: всем формальным системам, для которых доказано существование неразрешимых предложений арифметики, прежде всего принадлежит высказывание о непротиворечивости рассматриваемых систем, которое добавляется к неразрешимым предложениям в этих системах. Т. е. это означает: непротиворечивость такой системы  $S$  может быть выведена только с помощью умозаключений, которые в самой системе  $S$  не формализованы. Для системы, в которой формализованы все финитные (интуитивно бесспорные) формы доказательства, было бы, следовательно, вообще невозможно финитное доказательство ее непротиворечивости в том виде, в каком его ищут формалисты. Вопрос о том, являются ли представленные системы, такие как “Princ. Math.” (или вообще любая столь же обширная система), непротиворечивыми, разумеется, остается открытым.

Курт Гедель, Вена» [ 13, с. 149—151].



Как мы видим, Гедель, действительно, впервые и довольно недвусмысленно упомянул о своем знаменитом результате 6 сентября 1930 года на конференции в Кенигсберском университете. Но был ли он тогда же был адекватно воспринят участниками конференции и, тем более, произвел ли он «сильное» и «ошеломляющее» впечатление? Что это не так, свидетельствует тот факт, что редакция журнала сочла необходимым предложить Геделю написать «добавление» для разъяснения его высказываний. Интересно отметить и следующий факт. На конференции присутствовал Давид Гильберт, великий немецкий математик, кстати родившийся в Кенигсберге. Гильберт известен кроме всего прочего тем, что выдвинул свою программу обоснования математики, получившую название «формализма», или «финитизма», очень точно охарактеризованную Геделем в приведенном выше добавлении.

На съезде Общества немецких естествоиспытателей и врачей 8 сентября Гильберт сделал доклад «Естествознание и логика», в конце которого он говорит буквально следующее: «Я твердо уверен, что истинная причина, по которой Канту не удалось обнаружить неразрешимую проблему, заключается в том, что неразрешимой проблемы вообще не существует. В противоположность глупому Ignorabimus<sup>8</sup> выскажем наш лозунг:

Мы должны знать —  
Мы будем знать!» [1, с. 127].

Более того, в предисловии к первому изданию монографии по основаниям математики, написанной им совместно с Паулем Бернайсом, он отмечает: «Состояние этих результатов одновременно указывает нам и направление дальнейших исследований в области теории доказательств, ставя в качестве конечной цели установление непротиворечивости всех без исключения применяемых в математике методов.

Имея в виду эту цель, я хотел бы подчеркнуть, что возникшее на определенное время мнение, будто из некоторых

---

<sup>8</sup> Мы не будем знать (лат.).

недавних результатов Геделя следует неосуществимость моей теории доказательств, является заблуждением. Этот результат, на самом деле, показывает только то, что для более глубоких доказательств непротиворечивости финитная точка зрения должна быть использована некоторым более сильным образом, чем это оказалось необходимым при рассмотрении элементарных формализмов.

Геттинген, март 1934 г.» [2, с. 19].

И это несмотря на то, что еще в 1932 году Гедель доказывает еще одну, не менее поразительную, теорему, являющуюся непосредственным следствием первой<sup>9</sup> — так называемую *вторую теорему Геделя*. Она утверждает, что непротиворечивость любой достаточно богатой математической системы, включающей арифметику целых чисел, не может быть установлена средствами самой этой системы на основе математических принципов, принятых различными школами в основаниях математики. Обе геделевские теоремы действительно потрясли современную математику, правда, это произошло не в сентябре 1930 года, а несколько позже, когда логики и математики, а затем и философы осознали значение результатов, полученных Геделем. Они ясно показали не только невыполнимость программы формалистской философии Гильберта, ведь Гедель фактически доказал, что, какой бы подход к математике на основе надежных логических принципов мы ни избрали, нам все равно не удастся доказать непротиворечивость математики. Ни один из предложенных подходов к основаниям математики не будет исключением. А это означает, что математика вынуждена бесповоротно отказаться от претензий на абсолютную достоверность или значимость своих результатов, т. е. лишиться одной из основных своих особенностей, на которую она всегда претендовала.

---

<sup>9</sup> Ее условия довольно четко Гедель сформулировал в приведенном выше «Дополнении».

Несмотря на множество интереснейших работ в области математики, логики и физики, опубликованных Геделем в дальнейшем, самыми известными его работами остаются две его теоремы, которые до сих пор будоражат умы ученых и философов и значение которых выходит за рамки логики и математики. Упомянем хотя бы того же Р. Пенроуза, выдающегося современного американского математика и физика, книга которого “The Emperor’s New Mind” во многом основывалась на геделевских результатах. Она была опубликована в 1989 году (русский перевод — 2003 г. [8]) и стала мировым интеллектуальным бестселлером. В ней автор, в частности, утверждает, «что математическое мышление, а следовательно, и умственная деятельность в целом, не может быть полностью описано при помощи чисто «компьютерной» модели разума». Таким образом, Пенроуз затрагивает фундаментальную проблему современной философии сознания, критикуя теорию так называемого «сильного ИИ (искусственного интеллекта)» [8, с. 11]. Он показывает, что, как только нам удастся формализовать какую-либо область человеческого мышления, а, следовательно, в принципе компьютеризировать ее, у нас появляется возможность понять, как выйти за пределы полученного формализма.

#### *Список литературы*

1. Гильберт Д. Естествознание и логика. Публикация, предисловие и перевод В. Н. Брюшинкина // Кантовский сборник. Калининград: Изд-во КГУ, 1990. Вып. 15.
2. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики: Логические исчисления и формализация арифметики. М.: Наука, 1979.
3. Клини С. К. Математическая логика. М.: Мир, 1973.
4. Козн Пол Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза. М.: Мир, 1969.
5. Линдон Р. Заметки по логике. М.: Мир, 1968.
6. Математическая логика и ее применение: Сб. ст. под ред. Э. Нагеля, П. Салпса и А. Тарского. М.: Мир, 1965.
7. Пенроуз Р. Тени разума: в поисках науки о сознании. Часть: Понимание разума и новая физика. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

8. *Пенроуз Р.* Новый ум короля. М.: Едиториал УРСС, 2003.
9. *Подниекс К. М.* Вокруг теоремы Геделя. Рига, 1981.
10. *Фейс Р.* Модальная логика. М.: Наука, 1974.
11. *Успенский В. А.* Теорема Геделя о неполноте. М.: Наука, 1982.
12. *Gödel K.* Collected Works, V.3. Feferman, S., Dawson, J., Kleene, S., Moore, G., Solovay, R., and van Heijenoort, J. (eds.). N. Y.: Oxford University Press, 1995.
13. Erkenntnis Bd.2 H.3, Leipzig: Meiner Verlag, 1931.
14. *Wang Hao.* Some Facts about Gödel // Journal of Symbolic Logic. Vol. 46. № 3 (1981). P. 653—659.
15. *Wang Hao.* Reflections on Kurt Godel. Cambridge: MIT Press, 1987.
16. *Wang Hao.* A Logical Joinery: From Gödel to Philosophy. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1987.

