ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.8 1977

УДК 513.73

Л.Г.К о р с а к о в а

О НЕКОТОРЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ РАССЛОЯЕМЫХ ПАР КОНГРУЭНЦИЙ ФИГУР

В работе дается обобщение понятия расслоения для пар конгруэнций некоторых типов фигур трехмерного проективного пространства (прямолинейных конгруэнций, пар C_ℓ [I], где C-коника, ℓ-непересекающая её прямая и пар конгруэнций коник). Показано, что понятие расслоения для пар конгруэнций этих типов фигур можно ввести, используя теорию оснащенных многообразий фигур или специализируя фундаментальные объекты соответствующих многообразий. Трехмерное проективное пространство P_3 относится к подвижному реперу $R=\{A_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4)$. Уравнения инфинитезимального перемещения репера R имеют вид $dA_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta$, где линейные дифференциальные формы ω_α^β удовлетворяют структурным уравнениям Картана $\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta$ и условию эквипроективности $\omega_\alpha^\alpha=0$.

В работе принято обозначение

$$\omega_i^4=\omega_i$$

$(i,j,k,q=1,2,\quad i\neq j$ и по индексам i,j суммирование не производится).

Символом δ обозначается дифференцирование по вторичным

параметрам и буквами π_α^β значение форм ω_α^β при фиксированных первичных параметрах.

§ I. Оснащенные пары прямолинейных конгруэнций

В пространстве P_3 рассмотрим пару прямолинейных конгруэнций [2] (ℓ) и (ℓ'), не умаляя общности, предположим, что пара соответствующих прямых ℓ,ℓ' находится в косом положении. Выберем на каждом луче ℓ конгруэнции (ℓ) две несовпадающие точки A_1 и A_2, на соответствующем луче ℓ' – точки A_3 и A_4. Поскольку лучи ℓ,ℓ' – скрещивающиеся, тетраэдр $\{A_\alpha\}$ не вырождается. Поскольку прямые ℓ,ℓ' описывают двупараметрические семейства, имеем:

$$\operatorname{rang}(\omega_1,\omega_2,\omega_1^3,\omega_2^3)=2,\quad \operatorname{rang}(\omega_3^1,\omega_3^2,\omega_4^1,\omega_4^2)=2.$$

Пусть, например, $\omega_1\wedge\omega_2\neq 0$.

Замкнутая система пфаффовых уравнений пары прямолинейных конгруэнций запишется в виде:

$$\omega_i^3=\Gamma_i^{3k}\omega_k,\quad \omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k,\quad \omega_4^i=\Gamma_4^{ik}\omega_k, \tag{1.1}$$

$$\Delta\Gamma_i^{3k}\wedge\omega_k=0,\quad \Delta\Gamma_3^{ik}\wedge\omega_k=0,\quad \Delta\Gamma_4^{ik}\wedge\omega_k=0 \tag{1.2}$$

где

$$\Delta\Gamma_i^{3i}=d\Gamma_i^{3i}+\Gamma_i^{3i}(\omega_3^3-\omega_4^4)-\omega_3^4[(\Gamma_i^{3i})^2+\Gamma_i^{3j}\Gamma_j^{3i}]+\Gamma_i^{3j}\omega_j^i-\Gamma_j^{3i}\omega_i^j+\omega_4^3,$$

$$\Delta\Gamma_i^{3j}=d\Gamma_i^{3j}+\Gamma_i^{3j}(\omega_j^j-\omega_4^4-\omega_i^i+\omega_3^3)-\Gamma_i^{3j}(\Gamma_1^{31}+\Gamma_2^{32})\omega_3^4+(\Gamma_i^{3i}-\Gamma_j^{3j})\omega_i^j,$$

$$\Delta\Gamma_3^{ii}=d\Gamma_3^{ii}+\Gamma_3^{ii}(2\omega_i^i-\omega_3^3-\omega_4^4)-\omega_3^4(\Gamma_3^{ii}\Gamma_i^{3i}+\Gamma_3^{ij}\Gamma_j^{3i}+\Gamma_4^{ii})+\omega_j^i(\Gamma_3^{12}+\Gamma_3^{21}),$$

$$\Delta\Gamma_3^{ij}=d\Gamma_3^{ij}+\Gamma_3^{ij}(\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4)-\omega_3^4(\Gamma_3^{ii}\Gamma_i^{3j}+\Gamma_3^{ij}\Gamma_j^{3j}+\Gamma_4^{ij})+\Gamma_3^{jj}\omega_j^i+\Gamma_3^{ii}\omega_i^j,$$

$$\Delta\Gamma_4^{ii}=d\Gamma_4^{ii}+2\Gamma_4^{ii}(\omega_i^i-\omega_4^4)-\omega_3^4(\Gamma_4^{ii}\Gamma_i^{3i}+\Gamma_4^{ij}\Gamma_j^{3i})+\omega_j^i(\Gamma_4^{12}+\Gamma_4^{21})-\Gamma_3^{ii}\omega_4^3,$$

$$\Delta\Gamma_4^{ij}=d\Gamma_4^{ij}+\Gamma_4^{ij}(\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_4^4)-\omega_3^4(\Gamma_4^{ii}\Gamma_i^{3j}+\Gamma_4^{ij}\Gamma_j^{3j})+\Gamma_4^{ii}\omega_i^j+\Gamma_4^{jj}\omega_j^i-\Gamma_3^{ij}\omega_4^3.$$

Разрешая квадратичные уравнения (I.2) по лемме Картана, получим:

$$\Delta\Gamma_i^{3k}=\Gamma_i^{3kq}\omega_q\,,\quad \Delta\Gamma_3^{ik}=\Gamma_3^{ikq}\omega_q\,,\quad \Delta\Gamma_4^{ik}=\Gamma_4^{ikq}\omega_q\,. \tag{1.3}$$

Система уравнений (I.I),(I.3) является системой дифференциальных уравнений внутреннего фундаментального объекта [3]

$$\Gamma_1=\{\Gamma_i^{3k},\Gamma_3^{ik},\Gamma_4^{ik}\}$$

пары прямолинейных конгруэнций.

Система величин

$$\Gamma_2=\{\Gamma_1,\Gamma_i^{3kq},\Gamma_3^{ikq},\Gamma_4^{ikq}\}$$

образует продолженный внутренний фундаментальный объект.

Определение I.I. Пара прямолинейных конгруэнций (ℓ) и (ℓ') называется односторонне ℓ -оснащенной, если на каждом луче ℓ конгруэнции (ℓ) задана инвариантная точка, описывающая гладкую поверхность.

Оснащающую точку луча $\ell\equiv A_1A_2$ можно задать посредством параметра ρ уравнением

$$M=A_1+\rho A_2\,. \tag{1.4}$$

Односторонне ℓ -оснащенная пара прямолинейных конгруэнций определяется уравнениями Пфаффа (I.I), уравнением

$$d\rho+\rho(\omega_2^2-\omega_1^1)+\omega_1^2-\rho^2\omega_2^1=m^k\omega_k \tag{1.5}$$

и их замыканиями. Анализируя эту систему, приходим к выводу, что односторонне ℓ -оснащенные пары существуют и определяются с произволом семи функций двух аргументов.

Замыкая уравнение (I.5) и фиксируя первичные параметры, получим:

$$\delta m^1=m^1(\pi_4^4-\pi_2^2)+m^1(\Gamma_1^{31}\pi_3^4+2\rho\pi_2^1)+m^2(\Gamma_2^{31}\pi_3^4-\pi_2^1),$$
$$\delta m^2=m^2(\pi_1^1+\pi_4^4-2\pi_2^2)+m^2(\Gamma_2^{32}\pi_3^4+2\rho\pi_2^1)+m^1(\Gamma_1^{32}\pi_3^4-\pi_1^2). \tag{1.6}$$

Из системы уравнений (I.6) следует, что величины m^1, m^2 не образуют геометрического объекта [3], но одновременное обращение их в нуль имеет инвариантный смысл.

Определение I.2. Односторонне ℓ -оснащенная пара прямолинейных конгруэнций называется односторонне инцидентно ℓ -оснащенной, если касательная плоскость к поверхности, описанной оснащающей точкой, инцидентна соответствующему лучу ℓ' конгруэнции (ℓ').

Односторонне инцидентно ℓ -оснащенные пары выделяются из односторонне ℓ -оснащенных пар прямолинейных конгруэнций соотношениями

$$m^1=m^2=0\,. \tag{1.7}$$

Система уравнений односторонне инцидентно ℓ -оснащенной пары содержит уравнения (I.I) и уравнение

$$d\rho+\rho(\omega_2^2-\omega_1^1)+\omega_1^2-\rho^2\omega_2^1=0\,. \tag{1.8}$$

Определение I.3. Односторонне инцидентно ℓ -оснащенная пара прямолинейных конгруэнций $(\ell),(\ell')$ называется односторонне расслояемой от конгруэнции (ℓ) к (ℓ'), если уравнение (I.8) вполне интегрируемо.

Из требования полной интегрируемости уравнения (I.8) получаем систему трех квадратичных уравнений [2, стр.67]:

$$\omega_2^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_2 \wedge \omega_4^1 = 0\,, \quad \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 + \omega_1 \wedge \omega_4^2 = 0\,,$$
$$\omega_1^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_1 \wedge \omega_4^1 - \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 - \omega_2 \wedge \omega_4^2 = 0\,. \tag{1.9}$$

Следовательно, односторонне расслояемые пары конгруэнций являются подклассами односторонне ℓ-оснащенных пар.

К понятию односторонне расслояемой пары конгруэнций можно прийти также, специализируя внутренний фундаментальный объект Γ_1 неоснащенной пары $(\ell),(\ell')$ прямолинейных конгруэнций.

Рассмотрим следующие функции λ, μ, ν, составленные из компонент внутреннего фундаментального объекта Γ_1 :

$$\lambda = \Gamma_1^{31}\Gamma_3^{22} - \Gamma_1^{32}\Gamma_3^{21} + \Gamma_4^{22},$$
$$\mu = \Gamma_2^{31}\Gamma_3^{12} - \Gamma_2^{32}\Gamma_3^{11} - \Gamma_4^{11}, \tag{1.10}$$
$$\nu = \Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12} - \Gamma_1^{32}\Gamma_3^{11} + \Gamma_4^{12} + \Gamma_4^{21} - \Gamma_2^{31}\Gamma_3^{22} + \Gamma_2^{32}\Gamma_3^{21}.$$

Дифференцируя соотношения (I.IO) при фиксированных первичных параметрах, будем иметь:

$$\delta\lambda = 2(\pi_4^4 - \pi_2^2)\lambda + \lambda\pi_3^4(\Gamma_1^{31} + \Gamma_2^{32}) - \pi_1^2\nu,$$
$$\delta\mu = 2(\pi_4^4 - \pi_1^1)\mu + \mu\pi_3^4(\Gamma_1^{31} + \Gamma_2^{32}) + \pi_2^1\nu, \tag{1.11}$$
$$\delta\nu = (2\pi_4^4 - \pi_1^1 - \pi_2^2)\nu + \nu\pi_3^4(\Gamma_1^{31} + \Gamma_2^{32}) + 2\pi_1^2\mu - 2\pi_2^1\lambda.$$

Из системы (I.II) следует, что обращение в нуль величин λ, μ, ν одновременно, т.е.

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 0 \tag{1.12}$$

имеет инвариантный смысл.

Используя уравнения (I.I) в квадратичных уравнениях (I.9), убеждаемся, что система (I.I2) вместе с уравнениями (I.I) и их замыканиями определяет односторонне расслояемую

пару прямолинейных конгруэнций (от конгруэнции (ℓ) к (ℓ')).

Итак, свойство расслояемости является внутренним свойством пары прямолинейных конгруэнций, не зависящим от оснащения.

Определение I.4. Пара прямолинейных конгруэнций $(\ell),(\ell')$ называется двусторонне оснащенной или просто оснащенной, если она является и ℓ-оснащенной, и ℓ'-оснащенной.

Двусторонне расслояемые пары являются подклассами оснащенных пар, причем можно показать, что это свойство, так же, как и свойство односторонней расслояемости, является внутренним свойством пары прямолинейных конгруэнций.

§ 2. Оснащенные пары C_ℓ

Рассмотрим пару C_ℓ [I] конгруэнций, образованную конгруэнцией (C) коник C типа $(2,2,3)^2$[4] и конгруэнцией (ℓ) прямых ℓ, не имеющих с кониками C общих точек. Пусть M -точка пересечения прямой ℓ с плоскостью коники, ℓ' -поляра точки M относительно коники. Помещая вершины A_i репера $R = \{A_\alpha\}$ в точки пересечения прямой ℓ' с коникой, вершину A_3 в точку M, вершину A_4-на прямую ℓ, приведем (при надлежащей нормировке вершин A_α) уравнение коники C к виду:

$$(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0\,, \quad x^4 = 0\,. \tag{2.1}$$

Пары C_ℓ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\omega_i^j=\Gamma_i^{jk}\omega_k,\quad \omega_i^3=\Gamma_i^{3k}\omega_k,\quad \omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k, \tag{2.2}$$
$$\omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k,\quad \omega_4^i=\Gamma_4^{ik}\omega_k,\quad \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=a^k\omega_k .$$

Замыкая уравнения (2.2) и фиксируя первичные параметры, найдем закон изменения компонент внутреннего фундаментального объекта

$$\Gamma_1=\{\Gamma_i^{jk},\Gamma_i^{3k},\Gamma_3^{ik},\Gamma_3^{4k},\Gamma_4^{ik},a^k\}$$

пары C_ℓ :

$$\delta\Gamma_i^{ji}=\Gamma_i^{ji}(\pi_4^4-\pi_j^j),\quad \delta\Gamma_i^{jj}=\Gamma_i^{jj}(\pi_i^i+\pi_4^4-2\pi_j^j), \tag{2.3}$$
$$\delta\Gamma_i^{3i}=\Gamma_i^{3i}(\pi_4^4-\pi_3^3)-\pi_4^3,\quad \delta\Gamma_i^{3j}=\Gamma_i^{3j}(\pi_i^i+\pi_4^4-\pi_j^j-\pi_3^3),$$
$$\delta\Gamma_3^{ii}=\Gamma_3^{ii}(\pi_3^3+\pi_4^4-2\pi_i^i),\quad \delta\Gamma_3^{ij}=\Gamma_3^{ij}(\pi_3^3+\pi_4^4-\pi_1^1-\pi_2^2),$$
$$\delta\Gamma_3^{4i}=\Gamma_3^{4i}(\pi_3^3-\pi_i^i),\quad \delta\Gamma_4^{ii}=2\Gamma_4^{ii}(\pi_4^4-\pi_i^i)+\Gamma_3^{ii}\pi_4^3,$$
$$\delta\Gamma_4^{ij}=\Gamma_4^{ij}(2\pi_4^4-\pi_1^1-\pi_2^2)+\Gamma_3^{ij}\pi_4^3,\quad \delta a^i=a^i(\pi_4^4-\pi_i^i)+2\Gamma_3^{4i}\pi_4^3.$$

О п р е д е л е н и е 2.1. Пара C_ℓ называется оснащенной, если на каждой конике C конгруэнции (C) задана инвариантная точка, описывающая гладкую поверхность.

Оснащающую точку K коники C можно определить с помощью параметра Θ посредством уравнения

$$K=A_1+\tfrac{1}{2}\Theta^2A_2+\Theta A_3 . \tag{2.4}$$

Оснащенная пара C_ℓ определяется уравнениями (2.2), уравнением

$$\Theta d\Theta-\tfrac{1}{2}\Theta^2(\omega_1^1-\omega_2^2)-\tfrac{1}{2}\Theta^3\omega_3^1-\tfrac{1}{4}\Theta^4\omega_2^1+\Theta\omega_3^2+\omega_1^2=t^k\omega_k \tag{2.5}$$

и их замыканиями.

Замыкая уравнение (2.5) и фиксируя первичные параметры, будем иметь:

$$\delta t^1=t^1(\pi_4^4-\pi_2^2),\quad \delta t^2=t^2(\pi_1^1+\pi_4^4-2\pi_2^2).$$

Следовательно, величины t^1, t^2 – относительные инварианты.

Рассмотрим линии $\omega_i=0$ на поверхности (A_i). Это линии, огибаемые линиями пересечения касательной плоскости к поверхности (A_i) в точке A_i с плоскостью $(A_1A_2A_3)$ коники C.

Условие $t^i=0$ означает, что вдоль линий $\omega_j=0$ касательная плоскость к поверхности (K) в точке K инцидентна ребру A_3A_4. Если же $t^1=t^2=0$, то

$$(dK\,K A_3A_4)=0$$

и касательная плоскость к поверхности (K) в точке K инцидентна прямой A_3A_4.

О п р е д е л е н и е 2.2. Оснащенная пара C_ℓ называется инцидентно-оснащенной, если касательная плоскость к поверхности, описанной оснащающей точкой, инцидентна соответствующему лучу ℓ конгруэнции (ℓ) .

Система уравнений инцидентно-оснащенной пары C_ℓ состоит из уравнений (2.2) и уравнения

$$\Theta d\Theta-\tfrac{1}{2}\Theta^2(\omega_1^1-\omega_2^2)-\tfrac{1}{4}\Theta^4\omega_2^1-\tfrac{1}{2}\Theta^3\omega_3^1+\Theta\omega_3^2+\omega_1^2=0. \tag{2.6}$$

О п р е д е л е н и е 2.3. Инцидентно-оснащенная пара C_ℓ называется односторонне расслояемой (от конгруэнции (C) к конгруэнции (ℓ)),если уравнение (2.6) вполне интегрируемо.

Из условия полной интегрируемости уравнения (2.6) получаем следующие семь квадратичных уравнений:

$$\omega_3^i \wedge \omega_j^i = 0, \quad \omega_i^3 \wedge \omega_3^j + \omega_i \wedge \omega_4^j = 0,$$
$$(\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3) \wedge \omega_3^i + \omega_3^j \wedge \omega_j^i - 2\omega_3^4 \wedge \omega_4^i = 0, \tag{2.7}$$
$$2\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_1 \wedge \omega_4^1 - \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 - \omega_2 \wedge \omega_4^2 = 0.$$

Значит,односторонне расслояемые пары C_ℓ являются подклассами оснащенных пар C_ℓ .Точно так же,как и для прямолинейных конгруэнций, к понятию односторонне расслояемой пары C_ℓ можно подойти,определенным образом специализируя внутренний фундаментальный объект Γ_1 неоснащенной пары C_ℓ .

Действительно,введем в рассмотрение следующие функции $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \xi$, составленные из компонент объекта Γ_1 :

$$\alpha_i = \Gamma_3^{ii}\Gamma_j^{ij} - \Gamma_3^{ij}\Gamma_j^{ii}, \quad \beta_i = \Gamma_j^{3i}\Gamma_3^{ij} - \Gamma_j^{3j}\Gamma_3^{ii} - \Gamma_4^{ii},$$
$$\gamma_i = a^i\Gamma_3^{ij} - a^j\Gamma_3^{ii} + \Gamma_3^{ji}\Gamma_j^{ij} - \Gamma_3^{jj}\Gamma_j^{ii} - 2(\Gamma_3^{4i}\Gamma_4^{ij} - \Gamma_3^{4j}\Gamma_4^{ii}), \tag{2.8}$$
$$\xi = 2(\Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22} - \Gamma_3^{12}\Gamma_3^{21}) + \Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12} - \Gamma_1^{32}\Gamma_3^{11} + \Gamma_4^{12} - \Gamma_2^{31}\Gamma_3^{22} + \Gamma_2^{32}\Gamma_3^{21} + \Gamma_4^{21}.$$

Дифференцируя соотношения (2.8) при фиксированных первичных параметрах,используя при этом уравнения (2.3), получим:

$$\delta\alpha_i = (2\pi_4^4 + \pi_3^3 - 3\pi_i^i)\alpha_i, \quad \delta\beta_i = 2(\pi_4^4 - \pi_i^i)\beta_i,$$
$$\delta\gamma_i = (\pi_3^3 + 2\pi_4^4 - \pi_j^j - 2\pi_i^i)\gamma_i, \quad \delta\xi = (2\pi_4^4 - \pi_1^1 - \pi_2^2)\xi. \tag{2.9}$$

Следовательно,все величины $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \xi$-относительные инварианты.

Применяя в квадратичных уравнениях(2.7) систему (2.2), убеждаемся,что уравнения

$$\alpha_i = 0, \ \beta_i = 0, \ \gamma_i = 0, \ \xi = 0 \tag{2.10}$$

и система уравнений (2.2) вместе с их замыканиями определяют односторонне расслояемую пару C_ℓ .

Поэтому свойство расслояемости для пар C_ℓ так же,как и для пар прямолинейных конгруэнций,является внутренним свойством пары.

§ 3. Оснащенные пары конгруэнций коник.

Рассмотрим в пространстве P_3 пару $(C_1, C_2)[I]$ конгруэнций $(C_1),(C_2)$ коник,не лежащих в одной плоскости и не касающихся линии ℓ пересечения своих плоскостей,описывающих двупараметрические семейства.Пусть A_i -одна из точек пересечения коники C_j с прямой ℓ, A_3 и A_4-полюсы прямой ℓ относительно коник C_1 и C_2 .Будем предполагать, что линейчатое многообразие (A_3A_4),ассоциированное с парой (C_1, C_2),является конгруэнцией.Уравнения коник C_1 и C_2 относительно геометрически фиксированного репера $R=\{A_\alpha\}$ при соответствующей нормировке вершин запишутся в виде:

$$(x^3)^2 - (a_1 x^1)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0; \tag{3.1}$$

$$(x^4)^2 - (a_2 x^2)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^3 = 0. \tag{3.2}$$

Система пфаффовых уравнений пары (C_1, C_2) имеет вид:

$$\omega_i^j=\Gamma_i^{jk}\omega_k, \quad \omega_i^3=\Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k,$$

$$\omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k, \quad \omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k, \quad \omega_4^i=\Gamma_4^{ik}\omega_k, \tag{3.3}$$

$$\Theta_i=A_i^k\omega_k, \quad \Omega_i=b_i^k\omega_k,$$

где

$$\Theta_i=da_i-a_i(\omega_i^i-\omega_{i+2}^{i+2}), \quad \Omega_i=\omega_i^i+\omega_j^j-2\omega_{i+2}^{i+2}.$$

О п р е д е л е н и е 3.I. Пара (C_1, C_2) конгруэнций коник C_1 и C_2 называется оснащенной, если на каждой конике C_i конгруэнции (C_i) пары (C_1, C_2) задана инвариантная точка, описывающая гладкую поверхность.

Оснащающую точку M коники C_1 можно определить с помощью параметра σ уравнением:

$$M=A_1+\sigma\left(\tfrac{1}{2}\sigma+a_1\right)A_2+(\sigma+a_1)A_3, \tag{3.4}$$

а точку N коники C_2 с помощью параметра τ посредством уравнения

$$N=A_2+\tau\left(\tfrac{1}{2}\tau+a_2\right)A_1+(\tau+a_2)A_4. \tag{3.5}$$

Оснащенная пара (C_1, C_2) определяется уравнениями (3.3), уравнениями

$$(\sigma+a_1)d\sigma-\tfrac{1}{4}\sigma^4\omega_2^1-\sigma^3\left(a_1\omega_2^1+\tfrac{1}{2}\omega_3^1\right)-\sigma^2\Big[(a_1)^2\omega_2^1+\tfrac{3}{2}a_1\omega_3^1+$$
$$+\tfrac{1}{2}(\omega_1^1-\omega_2^2)\Big]-\sigma\left[(a_1)^2\omega_3^1+a_1(\omega_1^1-\omega_2^2)-da_1-\omega_3^2\right]+\omega_1^2+$$
$$+a_1\omega_3^2=\ell^k\omega_k, \tag{3.6}$$

$$(\tau+a_2)d\tau-\tfrac{1}{4}\tau^4\omega_1^2-\tau^3\left(a_2\omega_1^2+\tfrac{1}{2}\omega_4^2\right)-\tau^2\Big[(a_2)^2\omega_1^2+\tfrac{3}{2}a_2\omega_4^2+$$
$$+\tfrac{1}{2}(\omega_2^2-\omega_1^1)\Big]-\tau\left[(a_2)^2\omega_4^2+a_2(\omega_2^2-\omega_1^1)-da_2-\omega_4^1\right]+\omega_2^1+$$
$$+a_2\omega_4^1=p^k\omega_k \tag{3.7}$$

и их замыканиями.

Замыкая уравнения (3.6) и (3.7) и фиксируя первичные параметры, получим:

$$d\ell^1=\ell^1(\pi_4^4-\pi_2^2), \quad \delta\ell^2=\ell^2(\pi_1^1+\pi_4^4-2\pi_2^2),$$
$$\delta p^1=p^1(\pi_4^4+\pi_2^2-2\pi_1^1), \quad \delta p^2=p^2(\pi_4^4-\pi_1^1). \tag{3.8}$$

Значит, величины ℓ^i, p^i -относительные инварианты.

Условие $\ell^i=0\,(p^i=0)$ означает, что вдоль линий $\omega_j=0$ касательная плоскость к поверхности $(M)\,((N))$ в точке $M\,(N)$ инцидентна ребру A_3A_4. Геометрическая характеристика линиям $\omega_i=0$ дана в §2.

Если

$$\ell^1=\ell^2=0,$$

то

$$(dM\,M\,A_3A_4)=0$$

и касательная плоскость к поверхности (M) в точке M инцидентна ребру A_3A_4.

Если же

$$p^1=p^2=0,$$

то

$$(dN\,N\,A_3A_4)=0,$$

касательная плоскость к поверхности (N) в точке N инцидентна прямой A_3A_4.

О п р е д е л е н и е 3.2. Оснащенная пара (C_1, C_2) называется инцидентно-оснащенной, если касательные плоскости к поверхностям, которые описывают оснащающие точки, инцидентны прямой A_3A_4.

Инцидентно-оснащенные пары (C_1, C_2) характеризуются условиями:

$$\ell^1 = \ell^2 = p^1 = p^2 = 0 \qquad (3.9)$$

и, следовательно, удовлетворяют уравнениям (3.3) и уравнениям.

$$(\sigma + a_1)d\sigma - \frac{1}{4}\sigma^4\omega^1_2 - \sigma^3\left(a_1\omega^1_2 + \frac{1}{2}\omega^1_3\right) - \sigma^2\Big[(a_1)^2\omega^1_2 + \frac{3}{2}a_1\omega^1_3 + \frac{1}{2}(\omega^1_1 - \omega^2_2)\Big] - \sigma\left[(a_1)^2\omega^1_3 + a_1(\omega^1_1 - \omega^2_2) - da_1 - \omega^2_3\right] + \omega^2_1 + a_1\omega^2_3 = 0, \qquad (3.10)$$

$$(\tau + a_2)d\tau - \frac{1}{4}\tau^4\omega^2_1 - \tau^3\left(a_2\omega^2_1 + \frac{1}{2}\omega^2_4\right) - \tau^2\Big[(a_2)^2\omega^2_1 + \frac{3}{2}a_2\omega^2_4 + \frac{1}{2}(\omega^2_2 - \omega^1_1)\Big] - \tau\left[(a_2)^2\omega^2_4 + a_2(\omega^2_2 - \omega^1_1) - da_2 - \omega^1_4\right] + \omega^1_2 + a_2\omega^1_4 = 0. \qquad (3.11)$$

О п р е д е л е н и е 3.3. Инцидентно-оснащенная пара (C_1, C_2) конгруэнций коник C_1, C_2 называется расслояемой, если уравнения (3.10) и (3.11) вполне интегрируемые.

Из условия полной интегрируемости уравнений (3.10) и (3.11) получаем следующую систему квадратичных уравнений: [1, с.211-212]:

$$\omega^1_3 \wedge \omega^1_2 = 0, \quad \omega^3_2 \wedge \omega^1_3 + \omega_2 \wedge \omega^1_4 = 0, \qquad (3.12)$$

$$\Omega_1 \wedge \omega^1_3 + \omega^2_3 \wedge \omega^1_2 - 2\omega^4_3 \wedge \omega^1_4 = 0,$$

$$2\omega^1_3 \wedge \omega^2_3 + \omega^3_1 \wedge \omega^1_3 + \omega_1 \wedge \omega^1_4 - \omega^3_2 \wedge \omega^2_3 - \omega_2 \wedge \omega^2_4 = 0,$$

$$\Omega_1 \wedge \omega^2_3 + \omega^1_3 \wedge \omega^2_1 - 2\omega^4_3 \wedge \omega^2_4 + a_1\Theta_1 \wedge \omega^1_3 + (a_1)^2(\omega^4_3 \wedge \omega^1_4 - \omega^2_3 \wedge \omega^1_2) = 0,$$

$$(a_1)^2\omega^2_3 \wedge \omega^1_3 + \omega^3_1 \wedge \omega^2_3 + \omega_1 \wedge \omega^2_4 = 0,$$

$$(a_1\Theta_1 - \omega^2_1) \wedge \omega^2_3 + (a_1)^2\omega^4_3 \wedge \omega^2_4 = 0,$$

$$\omega^2_4 \wedge \omega^2_1 = 0, \quad \omega^3_1 \wedge \omega^2_3 + \omega_1 \wedge \omega^2_4 = 0, \qquad (3.13)$$

$$\Omega_2 \wedge \omega^2_4 + \omega^1_4 \wedge \omega^2_1 - 2\omega^3_4 \wedge \omega^2_3 = 0,$$

$$2\omega^2_4 \wedge \omega^1_4 + \omega_2 \wedge \omega^2_4 + \omega^3_2 \wedge \omega^2_3 - \omega_1 \wedge \omega^1_4 - \omega^3_1 \wedge \omega^1_3 = 0,$$

$$\Omega_2 \wedge \omega^1_4 + \omega^2_4 \wedge \omega^1_2 - 2\omega^3_4 \wedge \omega^1_3 + a_2\Theta_2 \wedge \omega^2_4 + (a_2)^2(\omega^3_4 \wedge \omega^2_3 - \omega^1_4 \wedge \omega^2_1) = 0,$$

$$(a_2)^2\omega^1_4 \wedge \omega^2_4 + \omega_2 \wedge \omega^1_4 + \omega^3_2 \wedge \omega^1_3 = 0,$$

$$(a_2\Theta_2 - \omega^1_2) \wedge \omega^1_4 + (a_2)^2\omega^3_4 \wedge \omega^1_3 = 0.$$

Итак, расслояемые пары (C_1, C_2) являются подклассами оснащенных пар (C_1, C_2). Система (3.12) характеризует одностороннее расслоение [1] от конгруэнции (C_1) к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4), а расслоение от конгруэнции (C_2) коник к (A_3A_4) определяется системой (3.13).

Можно показать, пользуясь инвариантными аналитическими характеристиками, что свойство пары (C_1, C_2) конгруэнций коник быть расслояемой суть её внутреннее свойство, которое от оснащения не зависит.

Список литературы

1. Малаховский В.С. Расслояемые пары конгруэнций фигур.-"Труды геом.семинара".ВИНИТИ АН СССР,М.,1971,3, с.193-220.

2. Фиников С.П. Теория пар конгруэнций.ГИТТЛ,М.,1956.

3. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий."Труды Моск.матем.об-ва",1953,т.2,с.275-383.

4. Малаховский В.С. Многообразия алгебраических элементов в п-мерном проективном пространстве."Тр.Томского ун-та", т.168, 1963,с.28-42.