ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.I4 1983

УДК 514.75

В.В. Махоркин

ФОКАЛЬНЫЕ ТОЧКИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В работе рассматриваются m-параметрические семейства невырожденных гиперквадрик в P_n $(m<n)$. Устанавливается связь между фокальными точками первого порядка и особыми точками некоторого отображения.

Пусть M множество всех невырожденных гиперквадрик n-мерного проективного пространства P_n, которое является открытым подмножеством проективного пространства P_N (где $2N=n(n+3)$) и естественным образом наделяется комплексно-аналитической структурой. Каждому $a\in M$ соответствует гиперквадрика в P_n, которую обозначим: $Z_a\subset P_n$.

Рассмотрим прямое произведение $P_n\times M$, которое наделим комплексно-аналитической структурой произведения. Отображения

$$\begin{aligned} pr_1&: P_n\times M\to P_n, \\ pr_2&: P_n\times M\to M \end{aligned} \qquad (1.1)$$

являются комплексно-аналитическими.

Пусть множество $Z\subset P_n\times M$ определяется следующим образом: $(x,a)\in Z \Longleftrightarrow a\in M$ и $x\in Z_a$

Z является комплексно-аналитическим подмногообразием в $P_n\times M$ (см. I).

Обозначим

$$\pi_1=pr_1\big|_Z\,,\quad \pi_2=pr_2\big|_Z\,.$$

Таким образом имеем следующие отображения

$$\pi_1: Z\to P_n\,,\quad \pi_2: Z\to M \qquad (1.2)$$

также являющиеся комплексно-аналитическими отображениями. Следуя [I], назовем:

$$\pi_2: Z\to M \qquad (1.3)$$

комплексно-аналитическим семейством всех гиперквадрик n-мерного проективного пространства.

Отображение (I.3) является расслоением с базой M и слоем $\pi_2^{-1}(a)=Z_a\times\{a\}\approx Z_a$, причем все слои изоморфны невырожденной гиперквадрике в P_n.

Пусть

$$\varphi: U\to M \qquad (1.4)$$

комплексно-аналитическое вложение, где $U\subset C^m$ $(m<n)$ открытое подмножество.

Отображение (I.4) и расслоение (I.3) стандартным образом определяют индуцированное расслоение гиперквадрик (семейство гиперквадрик) в P_n с базой U:

$$\pi: \tilde{Z}\to U \qquad (1.5)$$

Здесь $\pi^{-1}(t)=Z_{\varphi(t)}$. Будем рассматривать $\tilde{Z}$ как комплексно-аналитическое подмногообразие в $P_n\times U$ коразмерности один.

Используя системы координат на U и P^n, $\tilde{Z}$ можно задать следующим уравнением:

$$U(x,t)\equiv a_{\alpha\beta}(t^1,t^2,\dots,t^m)=0 \qquad (1.6)$$

Здесь и дальше $x=(x^0,x^1,\dots,x^n)$ координаты в P_n, $t=(t^1,t^2,\dots,t^m)$ координаты на U, а функции $a_{\alpha\beta}(t^1,t^2,\dots,t^m)$ определяются отображением (I.4).

Обозначим $p=pr_1\big|_Z$, где $pr_1: P_n\times U\to P_n$.

Рассмотрим

$$P: Z\to P_n. \qquad (1.7)$$

Определение I. Точка $x\in Z_{\varphi(t)}$ называется фокальной точкой первого порядка гиперквадрики $Z_{\varphi(t)}$ в семействе (I.5), если точка $x=(x^0,x^1,\dots,x^n)$ удовлетворяет системе уравнений (см. 2):

$$a_{\alpha\beta}(t^1,t^2,\dots,t^m)\,x^\alpha x^\beta=0$$

$$\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t^1}(t^1,t^2,\dots,t^m)\,x^\alpha x^\beta=0 \qquad (1.8)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t^m}(t^1,t^2,\dots,t^m)\,x^\alpha x^\beta=0$$

Здесь первое уравнение, уравнение гиперквадрики $Z_{\varphi(t)}$.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть X и Y комплексно-аналитические многообразия, $f: X\to Y$ комплексно-аналитическое отображение, точка $x\in X$ называется особой точкой отображения f, если $rang_x f < min(dim X, dim Y)$ (см. 3).

Т е о р е м а. Пусть дано семейство (I.5). Точка $x\in Z_{\varphi(t)}$ является фокальной точкой первого порядка гиперквадрики $Z_{\varphi(t)}$ в семействе (I.5) тогда и только тогда, когда точка $(x,t)\in\tilde{Z}$ является критической точкой отображения I.7.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(x,t)\in\tilde{Z}$ является особой точкой отображения (I.7), это значит, что касательное отображение:

$$T_{(x,t)}P: T_{(x,t)}\tilde{Z}\to T_x P_n \qquad (1.9)$$

не является сюръективным, или что эквивалентно кокасательное отображение

$$T^*_{(x,t)}P: T^*_x P_n\to T^*_{(x,t)}\tilde{Z} \qquad (1.10)$$

не является инъюктивным.

Таким образом, существует $v\in T_x P_n$ такой, что

$$T^*_{(x,t)}(v)=0, \qquad (1.11)$$

но $P=Pz_1|_{\tilde{Z}}$, поэтому

$$(T^*_{(x,t)}P)(v)=(T_{(x,t)}Pz_1)(v)|_{\tilde{Z}} \qquad (1.12)$$

В правой части (I.I2) стоит ограничение $(T^*_{(x,t)}Pz_1)(v)$ на подмногообразие $\tilde{Z}$ (см.[3]). Получаем:

$$(T^*_{(x,t)}Pz_1)(v)|_{\tilde{Z}}=0 \qquad (1.13)$$

Так как подмногообразие $\tilde{Z}$ в $P_n\times U$ определяется уравнением (I.6), то для того, чтобы некоторый ковектор имел нулевое ограничение на $\tilde{Z}$ необходимо и достаточно чтобы он имел вид (см.[3]): $\alpha\,du$.

Для того, чтобы ковектор имел вид $(T^*_{(x,t)}Pz_1)(v)$ необходимо и достаточно, чтобы его ограничение на $T^*_t U$ было нулевым.

Таким образом, точка $(x,t)\in\tilde{Z}$ будет критической точкой отображения (I.7) тогда и только тогда, когда (см.[3])

$$du(x,t)|_{x=const}=0. \qquad (1.14)$$

Из (I.I4) получаем

$$\left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t^1}(t^1,t^2,\dots,t^m)x^\alpha x^\beta\right)dt^1+\dots+\left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t^m}(t^1,t^2,\dots,t^m)x^\alpha x^\beta\right)dt^m=0 \qquad (1.15)$$

В силу независимости dt^i получаем

$$\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t^1}(t^1,t^2,\dots,t^m)x^\alpha x^\beta=\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t^m}(t^1,t^2,\dots,t^m)x^\alpha x^\beta=0. \qquad (1.16)$$

Так как $x\in Z_{\varphi(t)}$, то окончательно получаем для нахождения критических точек (x,t) систему уравнений:

$$a_{\alpha\beta}(t^1,t^2,\dots,t^m)\,x^\alpha x^\beta=0,$$

$$\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}(t^1,t^2,\dots,t^m)\,x^\alpha x^\beta=0, \qquad (1.17)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t^m}(t^1,t^2,\dots,t^m)\,x^\alpha x^\beta=0.$$

Список литературы

1. Kodaira K., Spencer D.C. On deformations of complex analitic structures. I, II. Annals of Mathematics 67, 1958.

2. Махоркин В.В. Некоторые типы многообразий гиперквадрик.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3, Калининград, 1973, с.50-60.

3. Фам Ф. Особенности процессов многократного рассеяния. М., Мир, 1972.