A. Bukusheva, S. Galaev

Geometry of an almost contact hyper-Kähler manifolds

In the paper, the geometry of an almost contact hypercomplex and almost contact hyper-Kähler manifold is studied. The intrinsic connection of Obata, which preserves the almost contact hypercomplex structure, is determined. It is proved that an almost contact hyper-Kähler manifold is an η-Einstein manifold.

Key words: almost contact hyper-Kähler manifold, η-Einstein manifold.

УДК 514.76

А.И. Егоров
Пензенский государственный университет
gormj@mail.ru

Геометрическая интерпретация некоторых максимально-подвижных метрических пространств $\overset{o}{g}_{n,y}$ линейных элементов различных лакунарностей основного случая II

Работа является непосредственным продолжением исследований, начатых нами в статьях [1; 2], здесь используются все принятые в них обозначения и определения. Вводятся в рассмотрение пространства $\Pi_{n,y}$; $A^n(m; n-m)$, $K^n(m; n-m)$ индекса $(m; n-m)$.

***Ключевые слова**:* группа движений; пространства $A^n(m; n-m)$, $K^n(m; n-m)$ индекса $(m; n-m)$.

I. Сначала введем локальные поверхности вращения пространства $\Pi_{n,y}$ в классах более общих метрических пространств векторных элементов $\overset{H}{g}_{n,y}$ [2]. Пространства $\overset{H}{g}_{n,y}$ характеризуются тем, что метрическое тензорное поле $\overset{H}{g}_{jk}(x,y)$ не обязательно однородное нулевой степени относительно координат y^{α}. Пусть имеем трехмерное евклидово пространство с прямоугольными, декартовыми координатами $(x;y;z)$:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Далее, пусть $z = f(y)$ уравнение кривой в плоскости (ZOY) и эта кривая вращается вокруг оси OZ. Уравнение образованной поверхности вращения имеет следующий вид:

$$z = f\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}\right), \tag{1}$$

или

$$z^2 = \phi\left(x^2 + y^2\right),$$

где

$$\phi\left(x^2 + y^2\right) \overset{def}{=} f^2\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Радиус-вектор любой точки поверхности вращения однозначно определяет ортогональную проекцию на плоскость XOY. Уравнение (1) можно записать также в параметрическом виде

$$z^2 = \varphi\left(u^2 + v^2\right), x = u, y = v,$$

где u,v — параметры. Индуцированная метрика $d\sigma^2$ на этой поверхности вращения имеет следующий вид:

$$d\sigma^2 = du^2 + dv^2 + \psi(M)(udu + vdu)^2, \qquad (2)$$

где $\psi(M) \overset{def}{=} \dfrac{\varphi^{1^2}(M)}{\varphi(M)}$, $M = u^2 + v^2$. В n-мерном случае, имеем метрику n-мерной поверхности вращения:

$$d\sigma^2 = \underbrace{du^{1^2} + \ldots + du^{n^2}}_{I} + \psi(M)\underbrace{\left(u^1 du^1 + \ldots + u^n du^n\right)^2}_{II}, \qquad (3)$$

где $M = u^{1^2} + \ldots + u^{n^2}$. Метрика (2) поверхности вращения есть метрика плоскости XOY или ее области с выделенной точкой O, зависящая от компонент вектора, исходящего из этой точки. В общем случае метрика (3) также есть метрика центроаффинного пространства или его области, зависящая от компонент вектора, исходящего из точки O.

Определение 1. *Локальным пространством $\Pi_{2,y}$ поверхности вращения* называется двумерное гладкое многообразие X_2, в каждом касательном пространстве которого задана метрика пространства поверхности вращения, гладким образом зависящая от $x \in X_2$.

Пусть (x^i) — локальные координаты на X_2; (x^i, y^j) — локальные, естественные координаты на $T(X_2)$, тогда метрика пространства $\Pi_{2,y}$ формально имеет следующий вид:

$$ds^2 = b_{ij}(x)dx^i dx^j + \psi\left(b_{ij}(x)y^i y^j, x\right)\left(b_{ij}(x)y^i dx^j\right)^2,$$

где $b_{ij}(x)$ — метрическое тензорное поле риманова пространства $V_n(x)$. Компоненты метрического тензорного поля $\overset{H}{g}_{ij}(x,y)$ пространства $\Pi_{2,y}$ имеют следующую структуру:

$$\overset{H}{g}_{jk}(x,y) = b_{jk}(x) + \psi(2F, x)b_{jp}(x)b_{ks}(x)y^p y^s,$$

или

$$\overset{H}{g}_{jk}\left(x,y\right)=F_{.j.k}+\psi\left(2F,x\right)F_{.j}F_{.k}, \tag{4}$$

где

$$F=\frac{1}{2}b_{ij}\left(x\right)y^{i}y^{j},\, F_{.k}=b_{kp}\left(x\right)y^{p},\quad F_{.i.j}=b_{ij}\left(x\right),\ b_{ij}\left(x\right)y^{i}y^{j}=2F.$$

Отсюда находим, что

$$\begin{gathered}\overset{H}{g}_{jk\cdot e}=2\psi^{1}_{2F}\left(2F,x\right)F_{.j}F_{\cdot k}F_{\cdot e}+\psi\left(2F,x\right)\left(F_{.j\cdot e}F_{\cdot k}+F_{.j}F_{\cdot k\cdot e}\right),\\ \psi^{1}_{2F}=\frac{\partial\psi}{\partial\left(2F\right)}\quad\left(i,j,k,e=1,2,...,n\right).\end{gathered} \tag{5}$$

II. Рассмотрим теперь шестимерное евклидово пространство E_6 с метрикой ($ds^2\geq 0$ в зависимости от c):

$$dS=dx^2+dy^2+dz^2+dt^2+ds^2+dr^2+cdz\cdot dr,$$

где $c\in \boldsymbol{R}\setminus\{-2;+2\}$.

В этом пространстве E_6 рассмотрим поверхность $\left(S\right)$, заданную уравнениями:

$$\left(S\right):\mathrm{z}^2=\phi_1\left(x^2+y^2\right),\, r^2=\psi_1\left(t^2+s^2\right). \tag{6}$$

В частности, если поверхность $\left(S\right)$ задана уравнениями:

$$\left(S\right):\mathrm{z}^2=a^2\left(x^2+y^2\right),\, r^2=b^2\left(t^2+s^2\right),\ \{a,b\}\in\boldsymbol{R},$$

то получим результаты работы [2], как частный случай. Положив

$$x=u^1,\ y=u^2,\ t=v^1,\ s=v^2,$$

где u^1,u^2,v^1,v^2 — параметры, получим, что индуцированная метрика $\mathrm{d}\sigma^2$ на этой поверхности $\left(S\right)$ необходимо имеет следующий специальный вид:

$$\begin{aligned} d\sigma^2 = {} & \underbrace{du^{1^2} + du^{2^2} + \phi(p)\cdot\left(u^1du^1 + u^2du^2\right)^2}_{I} + \\ & + \underbrace{dv^{1^2} + dv^{2^2} + \psi(k)\cdot\left(v^1dv^1 + v^2dv^2\right)^2}_{II} + \\ & + \underbrace{c\sqrt{\phi(p)\cdot\psi(k)}\left(u^1du^1 + u^2du^2\right)\left(v^1dv^1 + v^2dv^2\right)}_{III}, \end{aligned} \tag{7}$$

где по определению положено:

$$\phi \overset{def}{=} \frac{\phi_1^{1^2}}{\phi_1};\ \psi \overset{def}{=} \frac{\psi_1^{1^2}}{\psi_1},\ p \overset{def}{=} u^{1^2} + u^{2^2},\ k \overset{def}{=} v^{1^2} + v^{2^2}.$$

Метрика $d\sigma^2$ состоит из трех указанных частей I, II, III. Поверхность (S) с метрикой (7) будем называть четырехмерной поверхностью индекса *(2, 2)* и обозначать символом K^4 *(2; 2)*. Метрика (7) есть в тоже время метрика центроаффинного пространства, зависящая от вектора, задающего направление. Метрику (7) будем рассматривать как метрику 4-мерной поверхности $\left(u^1, u^2, v^1, v^2\right)$ с выделенной точкой O и зависящую от вектора $\vec{w}$, исходящую из точки O.

Пример 1 (общий случай). Для n-мерной поверхности $K^n(m; n-m)$ индекса $(m; n-m)$ имеем по определению формально следующую метрику:

$$\begin{aligned} d\sigma^2 \overset{def}{=} {} & \underbrace{\left(du^{1^2} + \ldots + du^{m^2}\right) + \phi(p)\left(u^1du^1 + \ldots + u^mdu^m\right)^2}_{I} + \\ & + \underbrace{\left(du^{m+1^2} + \ldots + du^{n^2}\right) + \psi(k)\left(u^{m+1}du^{m+1} + \ldots + u^ndu\right)^2}_{II} + \\ & + c\sqrt{\phi(p)\psi(k)}\left(u^1du^1 + \ldots + u^mdu^m\right)\left(u^{m+1}du^{m+1} + \ldots + u^ndu^n\right), \end{aligned}$$

где

$$p \overset{def}{=} u^{1^2} + u^{2^2} + \ldots + u^{m^2},\ k \overset{def}{=} u^{m+1^2} + u^{m+2^2} + \ldots + u^{n^2}.$$

Пример 2. В частности, метрика n-мерной поверхности $K^n(2; n-2)$ индекса $(2; n-2)$ имеет следующий вид по определению:

$$d\sigma^2 \overset{def}{=} \underbrace{\left(du^{1^2} + du^{2^2}\right) + \phi(p)\left(u^1du^1 + u^2du^2\right)^2}_{I} +$$

$$+\underbrace{\left(du^{3^2} + du^{4^2} + \ldots + du^{n^2}\right) + \psi(k)\left(u^3du^3 + u^4du^4 + \ldots + u^ndu^n\right)^2}_{II} +$$

$$+\underbrace{c\sqrt{\phi(p)\psi(k)} \cdot \left(u^1du^1 + u^2du^2\right)\left(u^3du^3 + u^4du^4 + \ldots + u^ndu^n\right)}_{III},$$

где $p \overset{def}{=} u^{1^2} + u^{2^2}$, $k \overset{def}{=} u^{3^2} + u^{4^2} + \ldots + u^{n^2}$.

Пример 3. Метрика n-мерной поверхности $K^n(0; n)$ индекса $(0; n)$ имеет следующий вид (исключительный случай):

$$d\sigma^2 \overset{def}{=} du^{1^2} + \ldots + du^{n^2} + \phi(p)\left(u^1du^1 + \ldots + u^ndu^n\right)^2, \tag{8}$$

где положено, что

$$p \overset{def}{=} u^{1^2} + u^{2^2} + \ldots + u^{n^2},$$

и совпадает с введенной нами ранее метрикой пространства $\Pi_{n,y}$. В этом «исключительном случае» поверхность (S) задается в евклидовом пространстве уже одним уравнением, характеризующим n-мерную поверхность вращения.

III. Пусть дано гладкое многообразие $X_n(x)$ и на нем задано приводимое риманово пространство $V_n(x)$, то есть

$$ds^2 \overset{*}{=} a_{ab}(x)dx^a dx^b + b_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta,$$

или

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2,$$

где

$$ds_1^2 = 2Mdt^2,\ ds_2^2 = 2Ndt^2;$$

$$M = \frac{1}{2}a_{ab}\left(x^1, x^2, ..., x^m\right)y^a y^b, \quad M_{\cdot c \cdot d} = a_{cd}\left(x\right);$$

$$\left(a, b, c, ... = 1, ..., m;\ i, j, k = 1, 2, ..., n;\ \alpha, \beta, \tau, \sigma, ... = m+1, ..., n\right)$$

$$N = \frac{1}{2}b_{\tau\sigma}\left(x^{m+1}, x^{m+2}, ..., x^n\right)y^\tau y^\sigma, \quad N_{\cdot\alpha\cdot\beta} = b_{\alpha\beta}\left(x\right);$$

$$\det\left\|a_{ab}\right\| \neq 0,\ \det\left\|b_{\alpha\beta}\left(x\right)\right\| \neq 0.$$

Определение 2. Гладкое многообразие $X_n(x)$ называется метрическим пространством $A^n(m; n-m)$ индекса $(m; n-m)$, если в касательном пространстве $T_x(X_n)$ базисного многообразия $X_n(x)$ задана метрика индекса $(m; n-m)$, характеризующая пространство $K^n(m; n-m)$, причем эта метрика гладким образом зависит от $x \in X_n(x)$. Если (x^i) локальные координаты на $X_n(x)$, (x^i, y^i) — локальные, естественные координаты на $T(X_n)$, то метрика пространства $A^n(m; n-m)$ индекса $(m; n-m)$ определяется формально следующим образом:

$$ds^2 \overset{def}{=} \underbrace{a_{ab}(x)dx^a dx^b + \phi(2M, x)a_{ac}(x)a_{bd}(x)y^c y^d dx^a dx^b}_{I} +$$
$$+\underbrace{b_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta + \psi(2N, x)b_{\alpha\tau}(x)b_{\beta\sigma}(x)y^\tau y^\sigma dx^\alpha dx^\beta}_{II} +$$
$$+\underbrace{c\sqrt{\phi(2M, x)\psi(2N, x)}\left(a_{ab}(x)b_{\tau\sigma}(x) + a_{\tau b}(x)b_{a\sigma}(x)\right)y^b y^\sigma dx^a dx^\tau}_{III}.$$

Компоненты метрического тензорного поля $\overset{H}{g}_{ij}(x,y)$ для этой метрики имеют следующий алгебраический вид:

$$\overset{H}{g}_{ab}(x,y)=a_{ab}(x)+\varphi(2M,x)a_{ac}(x)a_{bd}(x)y^c y^d,$$

$$\overset{H}{g}_{\alpha\beta}(x,y)=b_{\alpha\beta}(x)+\varphi(2N,x)b_{\alpha\tau}(x)b_{\beta\sigma}(x)y^\tau y^\sigma,$$

$$\overset{H}{g}_{a\tau}(x,y)=c\cdot\sqrt{\varphi(2M,x)\psi(2N,x)}\cdot\left(a_{ab}(x)b_{\tau\sigma}(x)+a_{\tau b}(x)b_{a\sigma}(x)\right)y^b y^\sigma.$$

Замечание 1. Если в определении пространства $A^n(m;n-m)$ потребовать, что в каждой точке базы $X_n(x)$ касается «одно и тоже пространство $K^n(m;n-m)$», то получим пространство $B^n(m;n-m)$. Очевидно, что справедливо следующее включение:

$$B^n(m;n-m)\subset A^n(m;n-m).$$

Для пространств $B^n(m;n-m)$ имеем $\varphi=\varphi(2M)$, $\psi=\psi(2N)$.

Замечание 2. Метрика касательных пространств введенных выше пространств $A^n(m;n-m)$, $B^n(m;n-m)$ не является евклидовой или псевдоевклидовой как в случае римановых пространств $V_n(x)$, а является метрикой пространства $K^n(m;n-m)$ индекса $(m;n-m)$, которая индуцируется на поверхности (S) второго класса, как нами было установлено выше.

Замечание 3 (о метрике пространства $K^n(m;n-m)$). В пункте II рассматривалось пространство E_6 с метрикой

$$dS=dx^2+dy^2+dz^2+dt^2+ds^2+dr^2+cdz\cdot dr,\quad c\in\boldsymbol{R},c\neq\pm2.$$

Остановимся подробнее на этой метрике пространства E_6. Перейдем в этом пространстве к новой системе координат по следующим формулам:

$$\tilde{x}=x,\ \tilde{y}=y,\ \tilde{z}=z+r,\ \tilde{t}=t,\ \tilde{s}=s,\ \tilde{r}=z-r.$$

Тогда рассматриваемая метрика примет вид:

$$dS = d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 + \alpha d\tilde{z}^2 + d\tilde{t}^2 + d\tilde{s}^2 + \beta d\tilde{r}^2 ,$$

где $\alpha \overset{def}{=} \frac{1}{2} + \frac{c}{4}$; $\beta \overset{def}{=} \frac{1}{2} - \frac{c}{4}$. Здесь возможны пять случаев:

1) $\left\{\begin{matrix} \alpha > 0 \\ \beta > 0 \end{matrix}\right|$ — это возможно, если $-2 < c < 2$;

2) $\left\{\begin{matrix} \alpha < 0 \\ \beta > 0 \end{matrix}\right|$ — это возможно, если $c < 2$;

3) $\left\{\begin{matrix} \alpha > 0 \\ \beta < 0 \end{matrix}\right|$ — это возможно, если $c > -2$;

4) $\left\{\begin{matrix} \alpha < 0 \\ \beta < 0 \end{matrix}\right|$ — не возможен;

5) если $c = -2$ или $c = 2$, то метрика вырожденная.

Рассмотрим случай 1 (остальные случаи рассматриваются аналогично). В этом случае $-2 < c < 2$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Метрика здесь будет знакоопределенная $dS > 0$. Перейдем к новой системе координат по следующим формулам:

$$\tilde{\tilde{z}} = \sqrt{\alpha}\tilde{z},\ \tilde{\tilde{x}} = \tilde{x};\ \tilde{\tilde{t}} = \tilde{t},\ \tilde{\tilde{r}} = \sqrt{\beta}\tilde{r},\ \tilde{\tilde{y}} = \tilde{y};\ \tilde{\tilde{s}} = \tilde{s},$$

тогда окончательно получим метрику

$$dS = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2 + ds^2 + dr^2 , \tag{9}$$

и уравнение поверхности (S), определяющей пространство $K^4(2;2)$:

$$(S):\ \left(\frac{z}{\sqrt{\alpha}} + \frac{r}{\sqrt{\beta}}\right)^2 = 4\phi_1\left(x^2 + y^2\right),\ \left(\frac{z}{\sqrt{\alpha}} - \frac{r}{\sqrt{\beta}}\right)^2 = 4\psi_1\left(t^2 + s^2\right),$$

где

$$\alpha \overset{def}{=} \frac{1}{2}+\frac{c}{4},\ \beta \overset{def}{=} \frac{1}{2}-\frac{c}{4},\ \alpha+\beta=1,\ \alpha-\beta=\frac{c}{2},\ -2<c<2\,.$$

В последних записях мы опустили две тильды над переменными x, y, z, t, s, r. Метрика (9) записана уже в прямоугольной, декартовой системе координат. В работе [2] уравнения поверхности (S), задающей пространство $\Pi^4(2;2)$, имеют аналогичный вид.

Вопрос о построении связности в этих и введенных выше пространствах очень интересный, и мы его рассмотрим в следующих работах.

Список литературы

1. *Егоров А.И., Егоров И.П., Егорова Л.И.* Приводимые и полуприводимые метрические пространства линейных элементов и их место в теории движений // Межвуз. сб. науч. тр. Пенза, 1991. С. 38—62.

2. *Егоров А.И.* Геометрическая интерпретация некоторых максимально подвижных метрических пространств $\overset{0}{g}_{n,y}$ линейных элементов различных лакунарностей основного случая I // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2015. Вып. 46. С. 76—88.

A. Egorov

Geometrical interpretation of some movable metric spaces $\overset{o}{g}_{n,y}$ of linear elements of different lacunae in the main case II

This paper is dedicated to the research described in [1; 2] in which the same designations and definitions are used. The article considers such spaces as $A^n(m; n-m)$, $B^n(m; n-m)$ as metric spaces of linear elements whose metrics of tangent Riemannian space is space $K^n(m; n-m)$ in each point.

Key words: group of movements; spaces $A^n(m; n-m)$, $K^n(m; n-m)$ of index $(m; n-m)$.