

Г. А. Банару

Смоленский государственный университет, Россия

mihail.banaru@yahoo.com

doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-3

О тензоре конгармонической кривизны 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли

В данной заметке мы рассматриваем 6-мерные келеровы подмногообразия алгебры октав. Для таких подмногообразий вычислены компоненты тензора конгармонической кривизны. Этот тензор является инвариантом так называемых конгармонических преобразований, то есть конформных преобразований, сохраняющих свойство гармоничности гладких функций.

Ключевые слова: почти эрмитова структура, келерова структура, тензор конгармонической кривизны, 6-мерное подмногообразие алгебры Кэли

1. Конформные преобразования римановых структур являются важным и содержательным объектом дифференциально-геометрических исследований. Существенный интерес представляет специальный тип таких преобразований — конгармонические преобразования, то есть конформные преобразования, сохраняющие свойство гармоничности гладких функций. Этот тип преобразований был введен в рассмотрение в 50-е годы прошлого века японским математиком Йошихито Ишии [1]. Известно, что такие преобразования имеют тензорный инвариант — так называемый тензор конгармонической кривизны. Отметим, что дополнение римановой структуры до почти эрмитовой структуры позволяет выделить еще несколько конгармонических инвариантов.

Поступила в редакцию 17.04.2025 г.

© Банару Г. А., 2025

Обратим внимание на то, что значительный вклад в теорию конгармонических преобразований и, в частности, в геометрическую теорию тензора конгармонической кривизны внес известный отечественный специалист В. Ф. Кириченко, а также некоторые его ученики [2—4].

В настоящей работе рассматривается тензор конгармонической кривизны 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры октав. Келерова (а в общем случае — почти эрмитова) структура на таких подмногообразиях индуцируется так называемыми 3-векторными произведениями Грея — Брауна в алгебре Кэли [5; 6].

2. Напомним, что почти эрмитовой структурой на четномерном многообразии M^{2n} называется пара $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$, где J — почти комплексная структура, а $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика на этом многообразии. При этом J и $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ должны быть согласованы условием

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M^{2n}),$$

где $\mathfrak{X}(M^{2n})$ — модуль гладких векторных полей на рассматриваемом многообразии M^{2n} . Многообразие с фиксированной на нем почти эрмитовой структурой называется *почти эрмитовым*. С каждой почти эрмитовой структурой $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ на многообразии M^{2n} связана так называемая фундаментальная форма, которая определяется равенством

$$F(X, Y) = \langle X, JY \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M^{2n}).$$

Почти эрмитова структура называется **келеровой**, если $\nabla F = 0$.

Задание почти эрмитовой структуры на многообразии M^{2n} равносильно заданию G -структуры на M^{2n} со структурной группой $U(n)$, элементы пространства которой называются А-реперами [2]. Эта G -структура называется присоединенной.

Также напомним, что тензор конгармонической кривизны на римановом многообразии размерности m определяется равенством (см.: [1])

$$\begin{aligned} Ch(X, Y, Z, W) = & R(X, Y, Z, W) - \\ & - \frac{1}{m-2} [\langle X, W \rangle ric(Y, Z) - \langle X, Z \rangle ric(Y, W) + \\ & + \langle Y, Z \rangle ric(X, W) - \langle Y, W \rangle ric(X, Z)], \end{aligned}$$

где R — тензор римановой кривизны, ric — тензор Риччи. Тензор конгармонической кривизны обладает всеми классическими свойствами, которые присущи тензору римановой кривизны и тензору Вейля конформной кривизны [3; 4], а именно:

$$\begin{aligned} Ch(X, Y, Z, W) &= -Ch(X, Y, W, Z), \\ Ch(X, Y, Z, W) &= -Ch(Y, X, W, Z), \\ Ch(X, Y, Z, W) + Ch(Y, Z, X, W) + Ch(Z, X, Y, W) &= 0, \\ Ch(X, Y, Z, W) &= Ch(Z, W, X, Y). \end{aligned}$$

Вычислим компоненты тензора конгармонической кривизны на пространстве присоединенной G -структуры для 6-мерного келерова подмногообразия алгебры октав. В терминах ковариантных компонент формулу, определяющую тензор конгармонической кривизны, можно записать в виде

$$\begin{aligned} Ch_{ijkl} = & R_{ijkl} - \frac{1}{4} (ric_{jl} g_{ik} + ric_{ik} g_{jl} - \\ & - ric_{jk} g_{il} - ric_{il} g_{jk}). \end{aligned}$$

Как и в случаях с тензором римановой кривизны [7; 8] и тензором Вейля конформной кривизны [9], исходя из упомянутых выше классических свойств этого тензора, достаточно найти только компоненты $Ch_{abcd}; Ch_{\hat{a}bcd}; Ch_{\hat{a}\hat{b}cd}; Ch_{\hat{a}b\hat{c}d}$, которые полностью определяют этот тензор. Здесь и далее индексы i, j, k, l принимают значения от 1 до 6, индексы $a, b, c, d, \dots$ — значения от 1 до 3. Как во многих работах о 6-мерных подмногообразиях алгебры октав, здесь $\hat{a} = a + 3$.

Известны компоненты, определяющие тензор римановой кривизны 6-мерного келерова подмногообразия алгебры октав [7]:

$$R_{abcd} = 0, \quad R_{\hat{a}bcd} = 0, \quad R_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0, \\ R_{\hat{a}b\hat{c}d} = -2 T_{\hat{a}\hat{c}}^7 T_{bd}^7.$$

Здесь $\{T_{kj}^7\}$ — компоненты конфигурационного тензора (в терминологии Грея), или второй основной формы погружения келерова подмногообразия в алгебру октав.

Компоненты тензора Риччи также известны (отметим, что в [9] вычислены соответствующие компоненты для более общего случая — для 6-мерного уплощающегося эрмитова подмногообразия алгебры Кэли):

$$ric_{ab} = 0, \quad ric_{\hat{a}b} = -2 T_{\hat{a}\hat{c}}^7 T_{cb}^7.$$

Наконец, компоненты метрического тензора на пространстве присоединенной G -структуры таковы:

$$g_{ab} = 0, \quad g_{\hat{a}b} = \delta_b^a, \quad g_{a\hat{b}} = \delta_a^b, \quad g_{\hat{a}\hat{b}} = 0.$$

Воспользовавшись приведенными выше соотношениями, получаем:

$$\begin{aligned} Ch_{abcd} &= R_{abcd} - \frac{1}{4} (ric_{bd} g_{ac} + ric_{ac} g_{bd} - ric_{bc} g_{ad} - \\ &\quad - ric_{ad} g_{bc}) = 0; \\ Ch_{\hat{a}bcd} &= R_{\hat{a}bcd} - \frac{1}{4} (ric_{bd} g_{\hat{a}c} + ric_{\hat{a}c} g_{bd} - ric_{bc} g_{\hat{a}d} - \\ &\quad - ric_{\hat{a}d} g_{bc}) = 0; \\ Ch_{\hat{a}\hat{b}cd} &= R_{\hat{a}\hat{b}cd} - \frac{1}{4} (ric_{\hat{b}d} g_{\hat{a}c} + ric_{\hat{a}c} g_{\hat{b}d} - ric_{\hat{b}c} g_{\hat{a}d} - \\ &\quad - ric_{\hat{a}d} g_{\hat{b}c}) = \\ &= -\frac{1}{2} (T_{\hat{a}\hat{h}}^7 T_{hc}^7 \delta_d^b + T_{\hat{b}\hat{h}}^7 T_{hd}^7 \delta_c^a - T_{\hat{a}\hat{h}}^7 T_{hd}^7 \delta_c^b - T_{\hat{b}\hat{h}}^7 T_{hc}^7 \delta_d^a); \\ Ch_{\hat{a}b\hat{c}d} &= R_{\hat{a}b\hat{c}d} - \frac{1}{4} (ric_{bd} g_{\hat{a}\hat{c}} + ric_{\hat{a}\hat{c}} g_{bd} - ric_{b\hat{c}} g_{\hat{a}d} - \\ &\quad - ric_{\hat{a}d} g_{b\hat{c}}) = -2 T_{\hat{a}\hat{c}}^7 T_{bd}^7 + \frac{1}{2} (T_{\hat{a}\hat{h}}^7 T_{hd}^7 \delta_b^c + T_{\hat{c}\hat{h}}^7 T_{hb}^7 \delta_d^a). \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место следующая

Теорема. *Тензор конгармонической кривизны 6-мерного келерова подмногообразия алгебры Кэли определяется равенствами*

$$\begin{aligned}
 Ch_{abcd} &= 0, \quad Ch_{\hat{a}bcd} = 0, \\
 Ch_{\hat{a}\hat{b}cd} &= -\frac{1}{2} (T_{\hat{a}\hat{h}}^7 T_{hc}^7 \delta_d^b + T_{\hat{b}\hat{h}}^7 T_{hd}^7 \delta_c^a - T_{\hat{a}\hat{h}}^7 T_{hd}^7 \delta_c^b - \\
 &\quad - T_{\hat{b}\hat{h}}^7 T_{hc}^7 \delta_d^a), \\
 Ch_{\hat{a}b\hat{c}d} &= -2 T_{\hat{a}\hat{c}}^7 T_{bd}^7 + \frac{1}{2} (T_{\hat{a}\hat{h}}^7 T_{hd}^7 \delta_b^c + T_{\hat{c}\hat{h}}^7 T_{hb}^7 \delta_d^a).
 \end{aligned}$$

3. Ясно, что вычисленные компоненты тензора конгармонической кривизны позволяют исследовать так называемые конгармонические аналоги тождеств Грея из [10]. Такие аналоги были введены в рассмотрение В. Ф. Кириченко и А. Шихабом в [2]. Отметим при этом, что основная часть результатов, полученных в статье [2], а также в работах [3] и [4], относится к приближенно келеровым многообразиям, преимущественно 4-мерным.

Другое возможное приложение полученного результата — это дальнейшее развитие теории 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры октав. К сожалению, после выхода в свет фундаментальной статьи В. Ф. Кириченко [6] работ именно о келеровых 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли опубликовано крайне мало (см.: [11; 12], отчасти [13; 14], а также обзор [7]).

Список литературы

1. Ishii Y. On conharmonic transformations // Tensor (N.S.). 1957. Vol. 7. P. 73—80.
2. Кириченко В. Ф., Шихаб А. А. О геометрии тензора конгармонической кривизны приближенно келеровых многообразий // Фундамент. и прикл. матем. 2010. Т. 16, № 2. С. 43—54.
3. Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р., Шихаб А. А. Геометрия тензора конгармонической кривизны почти эрмитовых многообразий // Матем. заметки. 2011. Т. 90, № 1. С. 87—103.
4. Шихаб А. А. Геометрия тензора конгармонической кривизны приближенно келеровых многообразий : дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2011.

5. Gray A. Six-dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products // Tôhoku Math. J. 1969. Vol. 21, № 4. P. 614—620.

6. Кириченко В. Ф. Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Изв. вузов. Матем. 1980. № 8. С. 32—38.

7. Банару М. Б. Геометрия 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав // Итоги науки и техн. Современ. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2014. Т. 126. С. 10—61.

8. Банару М. Б., Банару Г. А. Об уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли // ДГМФ. 2017. Вып. 48. С. 21—25.

9. Банару Г. А. О некоторых тензорах 6-мерных уплощающихся эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // ДГМФ. 2024. № 55 (2). С. 47—56.

10. Gray A. Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds // Tôhoku Math. J. 1976. Vol. 28, № 4. P. 601—612.

11. Банару М. Б. О косимплектических гиперповерхностях 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли // Изв. вузов. Матем. 2003. № 7. С. 59—63.

12. Банару М. Б. О почти контактных метрических гиперповерхностях с типовым числом 1 в 6-мерных келеровых подмногообразиях алгебры Кэли // Изв. вузов. Матем. 2014. № 10. С. 13—18.

13. Степанова Л. В., Банару Г. А., Банару М. Б. О квазисасакиевых гиперповерхностях келеровых многообразий // Изв. вузов. Матем. 2016. № 1. С. 86—89.

14. Банару М. Б., Банару Г. А. О гиперповерхностях со структурой Кириченко — Ускорева в келеровых многообразиях // Сиб. электрон. матем. изв. 2020. Т. 17. С. 1715—1721.

Для цитирования: Банару Г. А. О тензоре конгармонической кривизны 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли // ДГМФ. 2025. № 56. С. 20—27. <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-56-3>.



MSC 2010: 53B35, 53B25

G. A. Banaru

*Smolensk State University,
4 Przhevalskogo St., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-3*

On conharmonic curvature tensor
of six-dimensional Kählerian submanifolds of Cayley algebra

Submitted on April 17, 2025

Conharmonic transformations are conformal transformations that preserve the property of harmonicity of smooth functions. This type of transformation was introduced into consideration in the 50s of the last century by the Japanese mathematician Y. Ishii. It is known that such transformations have a tensor invariant — the so-called conharmonic curvature tensor. Note that complementing the Riemannian structure to an almost Hermitian structure allows us to single out some additional conharmonic invariants.

In this paper, we consider the conharmonic curvature tensor of 6-dimensional Kählerian submanifolds of the octave algebra. The Kählerian (and in the general case, almost Hermitian) structure on such submanifolds is induced by the so-called Gray — Brown 3-vector cross products in the Cayley algebra.

The main result of the work is the calculation of the so-called spectrum of the conharmonic curvature tensor for an arbitrary 6-dimensional Kählerian submanifold of the octave algebra. By the concept of the spectrum of a tensor, we mean the minimal set of the components in the space of the associated G-structure that completely determines this tensor.

Keywords: almost Hermitian structure, Kählerian structure, tensor of conharmonic curvature, six-dimensional submanifold of Cayley algebra

References

1. *Ishii, Y.*: On conharmonic transformations. Tensor. (N.S.). 7, 73—80 (1957).

2. Kirichenko, V.F., Shihab, A.A.: On the geometry of conharmonic curvature tensor for nearly Kähler manifolds. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, **16**:2, 43—54 (2010).

3. Kirichenko, V.F., Rustanov, A.R., Shihab, A.A.: Geometry of the conharmonic curvature tensor of almost Hermitian manifolds. *Math. Notes*, **90**:1, 79—93 (2011).

4. Shihab, A.A.: Geometry of the tensor of conharmonic curvature of nearly-Kählerian manifolds. PhD thesis. Moscow State Pedagogical University (2011).

5. Gray, A.: Six-dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products. *Tôhoku Math. J.*, **21**:4, 614—620 (1969).

6. Kirichenko, V.F.: Classification of Kählerian structures, defined by means of three-fold vector cross products on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra. *Izvestia Vuzov. Math.*, **8**, 32—38 (1980).

7. Banaru, M.B.: Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra. *J. of Math. Sci. (New York)*, **207**:3, 354—388 (2015).

8. Banaru, M.B., Banaru, G.A.: On planar 6-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra. *DGMF*, **48**, 21—25 (2017).

9. Banaru, G.A.: On some tensors of six-dimensional Hermitian planar submanifolds of Cayley algebra. *DGMF*, **55**:2, 47—56 (2024).

10. Gray, A.: Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds. *Tôhoku Math. J.*, **28**:4, 601—612 (1976).

11. Banaru, M.B.: On skew-symplectic hypersurfaces of six-dimensional Kählerian submanifolds of the Cayley algebra. *Russian Math. (Izvestia Vuzov)*, **47**:7, 60—63 (2003).

12. Banaru, M.B.: On almost contact metric hypersurfaces with type number 1 in 6-dimensional Kählerian submanifolds of Cayley algebra. *Russian Math. (Izvestia Vuzov)*, **58**:10, 10—14 (2014).

13. Stepanova, L.V., Banaru, G.A., Banaru, M.B.: On quasi-Sasakian hypersurfaces of Kählerian manifolds. *Russian Math. (Izvestia Vuzov)*, **80**:1, 73—75 (2016).

14. Banaru, M.B., Banaru, G.A.: On hypersurfaces with Kirichenko — Uskorev structure in Kählerian manifolds. *Sib. Elektron. Math. Izv.* **17**, 1715—1721 (2020).

For citation: Banaru, G.A.: On conharmonic curvature tensor of six-dimensional Kählerian submanifolds of Cayley algebra. *DGMF*, **56**, 20—27 (2025). <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-56-3>.

