УДК 514.75 (08)

Ю. И. Попов

СИЛЬНО СОПРЯЖЕННЫЕ ТРЕХСОСТАВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Рассмотрено построение общей теории специального класса ($\mathcal{SH}$-распределения) регулярных трехсоставных распределений ($\mathcal{H}$-распределений) проективного пространства P_n, состоящих из базисного распределения 1-го рода r-мерных плоскостей Λ_r, оснащающего распределения 1-го рода m-мерных плоскостей M_m ($m > \underline{r}$) и распределения 1-го рода гиперплоскостных элементов (гиперплоскостей) H_{n-1} с отношением инцидентности их соответствующих элементов в общем центре X: $X \in \Lambda \subset M \subset H$. Эта тройка распределений рассмотрена как единое погруженное многообразие. В силу указанного строения $\mathcal{SH}$-распределения в геометрии этого многообразия имеются аналогии с некоторыми фактами из геометрии m-мерных линейных элементов, $(n-1)$-мерных линейных элементов и гиперполосных распределений. Однако эти аналогии не относятся к геометрии только базисного или оснащающих распределений, взятых в отдельности.

Исследования осуществлены методом Г. Ф. Лаптева. Приведены задание $\mathcal{H}$-распределения и теорема существования $\mathcal{H}$-распределения в репере нулевого порядка. Требуя, чтобы Λ-, L-, E-распределения были попарно сопряженными, вводим специальный класс трехсоставных распределений, который назовем сильно сопряженным распределением, или $\mathcal{SH}$-распределением. Дано задание $\mathcal{SH}$-распределения в репере 1-го порядка и доказана теорема существования. Построены поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов $\mathcal{SH}$-распределения в дифференциальных окрестностях 2-го и 3-го порядков.

Construction of a general theory of a special class ($\mathcal{SH}$-distribution) of the regular threefold distributions ($\mathcal{H}$-distribution) of the projective space P_n consisting of a basic distribution of the 1st kind of r-dimensional planes Λ_r are equipped with the distribution of the 1st kind of m-dimensional planes M_m ($m > \underline{r}$) and equip distribution 1st the first kind of hyperplane elements (hyperplanes) H_{n-1} with the ratio of the incidence of the corresponding elements in the common center X: $X \in \Lambda \subset M \subset H$ is considered in this article. In this paper, these three distributions is considered as a immersed manifold. By virtue of the $\mathcal{SH}$-distribution structure in the geometry of the manifold are similar to some of the facts from the geometry of m-dimensional linear elements $(n-1)$-dimensional linear elements and hyperband distribution. However, the analogy does not relate to the geometry of the base only or equipping distributions taken separately.

Research was carried out by G. F. Laptev method. Determinations of the $\mathcal{H}$-distributionand existence theorems are given in the frame of zero order. Requiring that Λ-, L-, E-distribution were mutually associated we introduce a *special class of threefold distributions, which we call strongly associated distributions or $\mathcal{SH}$-distribution. Definition of $\mathcal{SH}$-distribution is given in the frame of the 1st order and the existence theorem is proved.*

Ключевые слова: распределение, взаимность распределений, сопряженная система плоскостей, тензор, квазитензор, подрасслоение, квазинормаль.

Key words: distribution, duality of distribution, adjoint surface system, tensor, quasitensor, subbundle, quasinormal.

1. Во всей работе использована следующая схема индексов:

$$K, L = \overline{1, n};\ \bar{I}, \bar{K}, \bar{L} = \overline{0, n};\ f, p, q, r, s, t = \overline{1, r}; h, i, j, k, l, m = \overline{r+1, m};$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \eta, \varepsilon, \delta = \overline{m+1, n-1};\ \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} = \overline{1, m};\ \sigma, \rho, \tau = \overline{1, n-1};$$

$$u, v = \overline{r+1, n-1}; \hat{u}, \hat{v} = \overline{r+1, n}; A, B = \{\overline{1, r}; \overline{m+1, n-1}\}; \hat{A}, \hat{B} = \{\overline{1, r}; \overline{m+1, n}\};$$

$$\hat{p}, \hat{q} = \{\overline{1, r}; n\}; \hat{\alpha}, \hat{\beta} = \overline{m+1, n}; \hat{i}, \hat{j} = \{\overline{r+1, m}; n\}; \hat{a}, \hat{b} = \{\overline{1, m}; n\}; s = m - r.$$

2. Оператор ∇ дифференцирования такой же, как и в [1].

3. Символом δ обозначим дифференцирование по вторичным параметрам, а значение форм ω_I^K при фиксированных параметрах — через π_I^K. В этом случае оператор обозначается символом ∇_δ.

4. Символ $\equiv$ обозначает сравнение по модулю базисных форм ω_0^K.

§ 1. Дифференциальные уравнения трехсоставного $\mathcal{SH}$-распределения проективного пространства. Теорема существования

1. Рассмотрим n-мерное проективное пространство P_n, отнесенное к подвижному реперу $\{A_{\bar{I}}\}$, состоящему из $(n+1)$ аналитических точек $A_{\bar{I}}$. Дифференциальные уравнения инфинитезимального движения репера имеют вид

$$dA_{\bar{I}} = \omega_{\bar{I}}^{\bar{K}} A_{\bar{K}},$$

где формы Пфаффа $\omega_{\bar{I}}^{\bar{K}}$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\omega_{\bar{I}}^{\bar{K}} = \omega_{\bar{I}}^{\bar{L}} \wedge \omega_{\bar{L}}^{\bar{K}}$$

и линейному соотношению $\sum\limits_{\bar{I}=0}^{n} \omega_{\bar{I}}^{\bar{I}} = 0$.

Потребуем, чтобы в некоторой области $U \subset P_n$ для любого центра X имели место следующие соотношения инцидентности:

$$X \in \Lambda_r \in M_m \subset H_{n-1}.$$

Проведем канонизацию репера $\{A_{\bar{I}}\}$: $X \equiv A_0$, а грань $[A_{\bar{\sigma}}]$ совместим с плоскостью $H_{n-1}(A_0)$ $\mathcal{H}$-распределения так, чтобы $\{A_p\} \subset \Lambda(A_0)$, $\{A_p\} \subset \Lambda(A_0), \{A_a\} \subset M(A_0)$. Такой репер $\{A_{\bar{I}}\}$ — репер 0-го порядка R_0.

Относительно репера R_0 дифференциальные уравнения трехсоставного распределения $\mathscr{H}\ P_n$ имеют вид [1]

$$\omega_p^n = \Lambda_{pK}^n \omega_0^K,\ \ \omega_i^n = \Lambda_{iK}^n \omega_0^K,\ \ \omega_\alpha^n = \Lambda_{\alpha K}^n \omega_0^K,$$
$$\omega_p^\alpha = \Lambda_{pK}^\alpha \omega_0^K,\ \ \omega_i^\alpha = \Lambda_{iK}^\alpha \omega_0^K,\ \ \omega_p^i = \Lambda_{pK}^i \omega_0^K, \tag{1}$$

$$\nabla\Lambda_{pK}^n + \Lambda_{pK}^n\omega_0^0 - \delta_K^n\omega_p^0 = \Lambda_{pKL}^n\omega_0^L,$$
$$\nabla\Lambda_{iK}^n + \Lambda_{iK}^n\omega_0^0 - \Lambda_{qK}^n\omega_i^q - \delta_K^n\omega_i^0 = \Lambda_{iKL}^n\omega_0^L,$$
$$\nabla\Lambda_{\alpha K}^n + \Lambda_{\alpha K}^n\omega_0^0 - \Lambda_{qK}^n\omega_\alpha^q - \Lambda_{iK}^n\omega_\alpha^i - \delta_K^n\omega_\alpha^0 = \Lambda_{\alpha KL}^n\omega_0^L,$$
$$\nabla\Lambda_{pK}^\alpha + \Lambda_{pK}^\alpha\omega_0^0 + \Lambda_{pK}^n\omega_n^\alpha - \delta_K^\alpha\omega_p^0 = \Lambda_{pKL}^\alpha\omega_0^L, \tag{2}$$
$$\nabla\Lambda_{iK}^\alpha - \Lambda_{IK}^\alpha\omega_0^0 - \Lambda_{pK}^\alpha\omega_i^p + \Lambda_{iK}^n\omega_n^\alpha - \delta_K^\alpha\omega_i^0 = \Lambda_{iKL}^\alpha\omega_0^L,$$
$$\nabla\Lambda_{pK}^i + \Lambda_{pK}^i\omega_0^0 + \Lambda_{pK}^\alpha\omega_\alpha^i + \Lambda_{pK}^n\omega_n^i - \delta_K^i\omega_p^0 = \Lambda_{pKL}^i\omega_0^L.$$

Теорема 1. *$\mathscr{H}$-распределение, заданное в репере R_0 уравнениями (1), (2), существует с произволом $(n-m-1)(m+1)+r(m-r)+m$ функций n аргументов.*

2. Проведем канонизацию репера R_0 следующим образом. Рассмотрим в каждом центре A_0 плоскости

$$\Phi(A_0) \overset{\text{def}}{=} \Phi_{n-r-1}(A_0),\ E(A_0) \overset{\text{def}}{=} E_{n-m-1}(A_0),\ \Psi(A_0) \overset{\text{def}}{=} \Psi_{n-s-1}(A_0) -$$

характеристики гиперплоскости $H(A_0)$, полученные при смещении центра A_0 вдоль кривых, принадлежащих соответственно Λ-распределению, M-распределению и L-распределению. Поместим вершины репера R_0 следующим образом:

$$\{A_\alpha\} \subset E(A_0);\ \{A_i\} \subset L(A_0);\ \{A_p\} \subset \Lambda(A_0),\ A_n \notin H_{n-1}(A_0).$$

Выбранный репер является репером первого порядка R_1, в котором

$$\Lambda_{ip}^n = 0;\ \Lambda_{\alpha p}^n = 0;\ \Lambda_{\alpha i}^n = 0;\ \Lambda_{p\alpha}^n = 0,$$

а формы ω_α^p, ω_i^p, ω_α^i становятся главными:

$$\omega_\alpha^p = \Lambda_{\alpha K}^p \omega^K,\ \ \omega_i^p = \Lambda_{iK}^p\omega^K,\ \ \omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha K}^i\omega^K. \tag{3}$$

Согласно работе [6], введем определение сопряженных направлений $\Lambda \overset{def}{=} \Lambda(A_0)$ и $L \overset{def}{=} L_{n-r}(A_0) = L_s(A_0)$ на $\mathscr{H}$-распределении проективного пространства P_n.

Определение 1. Направления Λ и L, соответственно размерности r и $s=m-r$, выходящие из центра A_0 $\mathscr{H}$-распределения и принадлежащие m-плоскости $M(A_0)=[\Lambda(A_0),\ L(A_0)]$, назовем *сопряженными*, если

$$d_\Lambda d_L A_0 \equiv 0 \pmod M,$$

где d_Λ и d_L – операторы дифференцирования в направлениях Λ и L.

Геометрически это условие означает, что при инфинитезимальном перемещении вдоль направления Λ плоскости L эта плоскость остается в касательной плоскости $M(A_0)$.

Из предыдущего условия следует также, что

$$d_L d_\Lambda A_0 \equiv 0 \pmod M$$

и при инфинитезимальном перемещении вдоль направления L плоскость Λ не выходит из касательной плоскости M.

Более того, будем полагать, что M-подрасслоение несет двухкомпонентную неприводимую сопряженную систему $S(\Lambda, L)$ [7]. Это означает, что:

а) в каждом центре A_0 $\mathscr{H}$-распределения существует пара сопряженных направлений $\Lambda(A_0)$ и $L(A_0)$ $(r+(m-r)=m)$, линейная оболочка которых совпадает с плоскостью $M(A_0)=[\Lambda(A_0), L(A_0)]$;

б) направления Λ и L не содержат полных сопряженных подсистем или асимптотических направлений.

Итак, введем в рассмотрение новый класс $\mathscr{H}$-распределений, для которых выполняются следующие условия:

а) M-подрасслоение несет сопряженную систему $S(\Lambda, L)$, что приводит к условиям

$$\Lambda^n_{pi}=0,\ \Lambda^n_{ip}=0, \tag{4}$$

$$\Lambda^\alpha_{pi}=0,\ \Lambda^\alpha_{ip}=0; \tag{5}$$

б) Ф-подрасслоение несет сопряженную систему $S(L, E)$, откуда следует

$$\Lambda^n_{i\alpha}=0,\ \Lambda^n_{\alpha i}=0, \tag{6}$$

$$\Lambda^p_{i\alpha}=0,\ \Lambda^p_{\alpha i}=0; \tag{7}$$

в) Ψ-подрасслоение несет сопряженную систему $S(\Lambda, E)$, т. е. выполняются соотношения

$$\Lambda^n_{p\alpha}=0,\ \Lambda^n_{\alpha p}=0, \tag{8}$$

$$\Lambda^i_{p\alpha}=0,\ \Lambda^i_{\alpha p}=0. \tag{9}$$

Определение 2. $\mathscr{H}$-распределение, которое удовлетворяет условиям (4)—(9), назовем *сильно сопряженным* трехсоставным распределением или, кратко, $\mathscr{SH}$-распределением.

Определение 3. В каждом центре A_0 $\mathscr{SH}$-распределения плоскости (Λ, L, E), удовлетворяющие (4)—(9), назовем *попарно сопряженными*.

Определение 4. Распределения плоскостей $\Lambda(A_0)$, $L(A_0)$, $E(A_0)$, $\Phi(A_0)$, $\Psi(A_0)$, $M(A_0)$, $H(A_0)$ назовем *основными структурными подрасслоениями* данного $\mathscr{SH}$-распределения.

В каждом центре A_0 $\mathscr{SH}$-распределения имеют место следующие отношения инцидентности линейных элементов основных структурных подрасслоений данного $\mathscr{SH}$-распределения [1]:

$$[\Lambda;\, L] = M\,;\ [L;\, E] = \Phi\,;\ [\Lambda;\, E] = \Psi\,;$$

$$\Phi \cap M = L\,;\ \Psi \cap \Phi = E\,;\ \Psi \cap M = \Lambda\,.$$

Из условий (4), (6), (8) следует, что $\mathscr{SH}$-распределения образуют подкласс сильно взаимных $\mathscr{VH}$-распределений [8].

Учитывая в уравнениях (1)—(3) соотношения (4)—(9), получаем задание $\mathscr{SH}$-распределения в репере 1-го порядка R_1:

$$\omega_p^n = \Lambda_{p\hat{q}}^n \omega_0^{\hat{q}},\ \ \omega_p^\alpha = \Lambda_{p\hat{A}}^\alpha \omega_0^{\hat{A}},\ \ \omega_\alpha^p = \Lambda_{\alpha\hat{A}}^p \omega_0^{\hat{A}};\ \text{(а)}$$

$$\omega_i^n = \Lambda_{i\hat{j}}^n \omega^{\hat{j}},\ \ \omega_p^i = \Lambda_{p\hat{a}}^i \omega_0^{\hat{a}},\ \ \omega_i^p = \Lambda_{i\hat{a}}^p \omega_0^{\hat{a}};\ \text{(б)} \qquad (10)$$

$$\omega_\alpha^n = \Lambda_{\alpha\hat{\beta}}^n \omega_0^{\hat{\beta}},\ \ \omega_i^\alpha = \Lambda_{i\hat{v}}^\alpha \omega_0^{\hat{v}},\ \ \omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha\hat{v}}^i \omega_0^{\hat{v}},\ \text{(в)}$$

где компоненты фундаментального объекта второго порядка $\Gamma_2 = \{\Gamma_1,\ \Lambda_{\alpha\hat{A}}^p,\ \Lambda_{i\hat{a}}^p,\ \Lambda_{\alpha\hat{v}}^i\}$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered}
\nabla\Lambda_{pq}^n + \Lambda_{pq}^n\omega_0^0 = \Lambda_{pqL}^n\omega_0^L,\\
\nabla\Lambda_{pn}^n + \Lambda_{pn}^n\omega_0^0 - \Lambda_{pq}^n\omega_n^q - \omega_p^0 = \Lambda_{pnL}^n\omega_0^L,\\
\nabla\Lambda_{ij}^n + \Lambda_{ij}^n\omega_0^0 = \Lambda_{ijL}^n\omega_0^L,\\
\nabla\Lambda_{in}^n + \Lambda_{in}^n\omega_0^0 - \Lambda_{ij}^n\omega_n^j - \omega_i^0 = \Lambda_{inL}^n\omega_0^L,\\
\nabla\Lambda_{\alpha\beta}^n + \Lambda_{\alpha\beta}^n\omega_0^0 = \Lambda_{\alpha\beta L}^n\omega_0^L,\\
\nabla\Lambda_{\alpha n}^n + \Lambda_{\alpha n}^n\omega_0^0 - \Lambda_{\alpha\beta}^n\omega_n^\beta - \omega_\alpha^0 = \Lambda_{\alpha nL}^n\omega_0^L,\\
\nabla\Lambda_{p\hat{A}}^\alpha + \Lambda_{p\hat{A}}^\alpha\omega_0^0 + \Lambda_{p\hat{q}}^n\delta_{\hat{A}}^{\hat{q}}\omega_n^\alpha - \delta_{\hat{A}}^\alpha\omega_p^0 = \Lambda_{p\hat{A}L}^\alpha\omega_0^L,\\
\nabla\Lambda_{\alpha\hat{A}}^p + \Lambda_{\alpha\hat{A}}^p\omega_0^0 + \Lambda_{\alpha\hat{A}}^n\omega_n^p - \delta_{\hat{A}}^p\omega_\alpha^0 = \Lambda_{\alpha\hat{A}L}^p\omega_0^L,\\
\nabla\Lambda_{i\hat{v}}^\alpha + \Lambda_{i\hat{v}}^\alpha\omega_0^0 + \Lambda_{i\hat{j}}^n\delta_{\hat{v}}^{\hat{j}}\omega_n^\alpha - \delta_{\hat{v}}^\alpha\omega_i^0 = \Lambda_{i\hat{v}L}^\alpha\omega_0^L,\\
\nabla\Lambda_{\alpha\hat{v}}^i + \Lambda_{\alpha\hat{v}}^i\omega_0^0 + \Lambda_{\alpha\hat{v}}^n\omega_n^i - \delta_{\hat{v}}^i\omega_\alpha^0 = \Lambda_{\alpha\hat{v}L}^i\omega_0^L,\\
\nabla\Lambda_{p\hat{a}}^i + \Lambda_{p\hat{a}}^i\omega_0^0 + \Lambda_{p\hat{q}}^n\delta_{\hat{a}}^{\hat{q}}\omega_n^i - \delta_{\hat{a}}^i\omega_p^0 = \Lambda_{p\hat{a}L}^i\omega_0^L,\\
\nabla\Lambda_{i\hat{a}}^p + \Lambda_{i\hat{a}}^p\omega_0^0 + \Lambda_{i\hat{a}}^n\omega_n^p - \delta_{\hat{a}}^p\omega_i^0 = \Lambda_{i\hat{a}L}^p\omega_0^L.
\end{gathered} \qquad (11)$$

3. Исследуем систему (10), (11) уравнений, определяющую $\mathscr{SH}$-распределение в проективном пространстве P_n. Разобьем систему на три части (10 а, 10 б, 10 в) вместе с их замыканиями (11).

а) Чистое замыкание системы уравнений (10 а) представим в виде

$$\Delta\Lambda_{p\hat{q}}^n \wedge \omega_0^{\hat{q}} = 0;\ \ \Delta\Lambda_{p\hat{A}}^\alpha \wedge \omega_0^{\hat{A}} = 0;\ \ \Delta\Lambda_{\alpha\hat{A}}^p \wedge \omega_0^{\hat{A}} = 0\,. \qquad (12)$$

Найдем характеры системы (12) и число Q [10]:

$$s_1 = r + 2r(n-m-1) = r + B \text{, где } B = 2r(n-m-1),$$

$$s_2 = r + B, \ldots, s_{r+1} = r + B,\ s_{r+2} = B, \ldots, s_{n-s} = B.$$

$$Q = (r+B)\{1+2+3+\ldots+(r+1)\} + B\{(r+2)+(r+3)+\ldots+(n-s)\} =$$
$$= \tfrac{1}{2} r(r+1)(r+2) + \tfrac{1}{2} B[(r+1)(r+2)+(r+2)(n-m-1)+(r+1)(n-m-1)+(n-m-1)^2].$$

Разложим уравнения (12) по лемме Картана [9] и подсчитаем число N новых функций, полученных при этом в правых частях:

$$\Delta\Lambda^n_{p\hat{q}} = \Lambda^n_{p\hat{q}\hat{t}}\omega_0^{\hat{t}},\ \Delta\Lambda^\alpha_{p\hat{A}} = \Lambda^\alpha_{p\hat{A}\hat{B}}\omega_0^{\hat{B}}.$$

Итак, число

$$N = \tfrac{1}{2} r(r+1)(r+2) + B\left(\frac{(n-s)(n-s+1)}{2}\right).$$

Можно убедиться, что $N = Q$, т. е. система (12) в инволюции [9] и решение системы существует с произволом $2r(n-m-1)$ функций $(n-s)$ аргументов.

б) Точно так же чистое замыкание системы уравнений (10 б) представим в виде

$$\Delta\Lambda^n_{\hat{i}\hat{j}} \wedge \omega_0^{\hat{j}} = 0,\ \Delta\Lambda^i_{p\hat{a}} \wedge \omega^{\hat{a}} = 0,\ \Delta\Lambda^p_{i\hat{a}} \wedge \omega^{\hat{a}} = 0 \qquad (13)$$

и найдем характеры этой системы:

$$s_1 = s + 2rs,\ s_2 = s + 2rs, \ldots, s_{s+1} = s + 2rs,\ s_{s+2} = 2rs, \ldots, s_{m+1} = 2rs.$$

Следовательно,

$$Q = s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \ldots + (s+1)s_{s+1} + (s+2)s_{s+2} + \ldots + (m+1)s_{m+1} =$$

$$= (s+2rs)\{1+2+\ldots+(s+1)\} + 2rs\{(s+2)+(s+3)+\ldots+(m+1)\} =$$
$$= \frac{s(s+1)(s+2)}{2} + rs(m+1)(m+2).$$

Далее, разложив уравнения (13) по лемме Картана:

$$\Delta\Lambda^i_{p\hat{a}} = \Lambda^i_{p\hat{a}\hat{b}}\omega_0^{\hat{b}},\ \Delta\Lambda^p_{i\hat{a}} = \Lambda^p_{i\hat{a}\hat{b}}\omega_0^{\hat{b}},\ \Delta\Lambda^n_{\hat{i}\hat{j}} = \Lambda^n_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}}\omega_0^{\hat{k}},$$

найдем

$$N = \frac{s(s+1)(s+2)}{2} + rs(m+1)(m+2).$$

Итак, $Q = N$, т. е. система (13) в инволюции и решение системы (10 б) существует с произволом $2rs$ функций $(m+1)$ аргументов.

в) Наконец, рассмотрим систему уравнений (10 в), чистое замыкание которой представим в виде

$$\Delta\Lambda^{n}_{\alpha\hat\beta}\wedge\omega_0^{\hat\beta}=0;\ \Delta\Lambda^{\alpha}_{i\hat v}\wedge\omega_0^{\hat v}=0;\ \Delta\Lambda^{i}_{\alpha\hat v}\wedge\omega_0^{\hat v}=0\,. \tag{14}$$

Найдем характеры системы (14):

$$s_1=(n-m-1)+2(n-m-1)s=(n-m-1)+C\,,\ C=2(n-m-1)s\,,$$
$$s_2=(n-m-1)+2(n-m-1)s\,,\ \ldots,\ s_{n-m}=(n-m-1)+2(n-m-1)s\,,$$
$$s_{n-m+1}=C\,,\ \ldots,\ s_{n-r}=C\,.$$

Отсюда получаем

$$Q=s_1+2s_2+\ldots+(n-m)s_{n-m}+(n-m+1)s_{n-m+1}+\ldots+(n-r)s_{n-r}=$$

$$=\tfrac{1}{2}(n-m)(n-m+1)[(n-m-1)+C]+\tfrac{1}{2}C(m-r)(2n-m-r+1)\,.$$

Разложим уравнения (14) по лемме Картана:

$$\Delta\Lambda^{n}_{\alpha\hat\beta}=\Lambda^{n}_{\alpha\hat\beta\hat\gamma}\omega_0^{\hat\gamma};\ \Delta\Lambda^{\alpha}_{i\hat v}=\Lambda^{\alpha}_{i\hat v\hat u}\omega_0^{\hat u};\ \Delta\Lambda^{i}_{\alpha\hat v}=\Lambda^{i}_{\alpha\hat v\hat u}\omega_0^{\hat u}\,. \tag{15}$$

Учитывая, что функции, стоящие в правых частях, симметричны по последним двум индексам, находим

$$N=\tfrac{1}{2}(n-m)(n-m+1)(n-m-1)+\tfrac{1}{2}C(n-r)(n-r+1)\,.$$

Нетрудно проверить, что $Q=N$. Значит, система уравнений (10 в) в инволюции и, следовательно, решение системы существует с произволом $2(n-m-1)(m-r)$ функций $(n-r)$ аргументов.

Результаты исследования в этом параграфе сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. *В n-мерном проективном пространстве P_n сильно сопряженные распределения $\mathcal{SH}$ существуют с произволом в $2r(n-m-1)$ функций $(n-s)$ аргументов, $2rs$ функций $(m+1)$ аргументов и $2(n-m-1)(m-r)$ функций $(n-r)$ аргументов.*

§ 2. Поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов регулярного $\mathcal{SH}$-распределения

1. Рассмотрим охваты симметрических фундаментальных тензоров 1-го порядка соответственно Λ-, L- и E-подрасслоения данного $\mathcal{SH}$-распределения:

$$\begin{gathered}b^n_{pq}=\tfrac{1}{2}(\Lambda^n_{pq}+\Lambda^n_{qp}),\ \nabla b^n_{pq}+b^n_{pq}\omega_0^0=b^n_{pqK}\omega_0^K\,,\\ b^n_{ij}=\tfrac{1}{2}(\Lambda^n_{ij}+\Lambda^n_{ji}),\ \nabla b^n_{ij}+b^n_{ij}\omega_0^0=b^n_{ijK}\omega_0^K\,,\\ b^n_{\alpha\beta}=\tfrac{1}{2}(\Lambda^n_{\alpha\beta}+\Lambda^n_{\beta\alpha}),\ \nabla b^n_{\alpha\beta}+b^n_{\alpha\beta}\omega_0^0=b^n_{\alpha\beta K}\omega_0^K\,.\end{gathered} \tag{16}$$

В общем случае $b_0 = \det\|b^n_{pq}\| \neq 0,\ l_0 = \det\|b^n_{ij}\| \neq 0,\ e_0 = \det\|b^n_{\alpha\beta}\| \neq 0.$ В силу этого можно построить обратные симметрические фундаментальные тензоры 1-го порядка $\{b^{pq}_n\}$, $\{b^{ij}_n\}$, $\{b^{\alpha\beta}_n\}$ соответственно Λ-, L- и E-подрасслоений:

$$
\begin{gathered}
b^n_{pq} b^{qt}_n = \delta^t_p,\ \nabla b^{pq}_n - b^{pq}_n \omega^0_0 \equiv 0, \\
b^n_{ij} b^{jk}_n = \delta^k_i,\ \nabla b^{ij}_n - b^{ij}_n \omega^0_0 \equiv 0, \\
b^n_{\alpha\beta} b^{\beta\gamma}_n = \delta^\gamma_\alpha,\ \nabla b^{\alpha\beta}_n - b^{\alpha\beta}_n \omega^0_0 \equiv 0.
\end{gathered} \tag{17}
$$

Замыкая (16), запишем дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции

$$
b^n_{pqK} = \tfrac{1}{2}(\Lambda^n_{pqK} + \Lambda^n_{qpK}),\ b^n_{ijK} = \tfrac{1}{2}(\Lambda^n_{ijK} + \Lambda^n_{jiK}),\ b^n_{\alpha\beta K} = \tfrac{1}{2}(\Lambda^n_{\alpha\beta K} + \Lambda^n_{\beta\alpha K})
$$

в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
\nabla b^n_{pqK} + 2b^n_{pqK}\omega^0_0 - (b^n_{pq}\Lambda^n_{sK} + b^n_{sq}\Lambda^n_{pK} + b^n_{ps}\Lambda^n_{qK})\omega^s_n - b^n_{pq}\Lambda^n_{\alpha K}\omega^\alpha_n - b^n_{pq}\Lambda^n_{iK}\omega^i_n + \\
+ b^n_{pq}\delta^\sigma_K\omega^0_\sigma + b^n_{pt}\delta^t_K\omega^0_q + b^n_{tq}\delta^t_K\omega^0_p \equiv 0,
\end{gathered} \tag{18}
$$

$$
\begin{gathered}
\nabla b^n_{ijK} + 2b^n_{ijK}\omega^0_0 - (b^n_{ij}\Lambda^n_{lK} + b^n_{jl}\Lambda^n_{iK} + b^n_{li}\Lambda^n_{jK})\omega^l_n - b^n_{ij}\Lambda^n_{\alpha K}\omega^\alpha_n - b^n_{ij}\Lambda^n_{pK}\omega^p_n + \\
+ b^n_{ij}\delta^\sigma_K\omega^0_\sigma + b^n_{il}\delta^l_K\omega^0_j + b^n_{lj}\delta^l_K\omega^0_i \equiv 0,
\end{gathered} \tag{19}
$$

$$
\begin{gathered}
\nabla b^n_{\alpha\beta K} + 2b^n_{\alpha\beta K}\omega^0_0 - (b^n_{\alpha\beta}\Lambda^n_{\gamma K} + b^n_{\gamma\beta}\Lambda^n_{\alpha K} + b^n_{\alpha\gamma}\Lambda^n_{\beta K})\omega^\gamma_n - b^n_{\alpha\beta}\Lambda^n_{iK}\omega^i_n - b^n_{\alpha\beta}\Lambda^n_{pK}\omega^p_n + \\
+ b^n_{\alpha\beta}\delta^\sigma_K\omega^0_\sigma + b^n_{\gamma\beta}\delta^\gamma_K\omega^0_\alpha + b^n_{\alpha\gamma}\delta^\gamma_K\omega^0_\beta \equiv 0.
\end{gathered} \tag{20}
$$

Замечание 1. Придавая K значения α, i, t, мы учитываем соотношения (4) — (9).

Из уравнений (18) при $K = t$ находим, что величины b^n_{pqt} удовлетворяют уравнениям

$$
\nabla b^n_{pqt} + 2b^n_{pqt}\omega^0_0 - (b^n_{pq}\Lambda^n_{st} + b^n_{sq}\Lambda^n_{pt} + b^n_{ps}\Lambda^n_{qt})\omega^s_n + b^n_{(pq}\omega^0_{t)} \equiv 0. \tag{21}
$$

Составленные с их помощью симметрические по всем нижним индексам величины 2-го порядка

$$
B^n_{pqt} = \tfrac{1}{3} b^n_{(pqt)}, \tag{22}
$$

в силу (21), удовлетворяют уравнениям

$$
\nabla B^n_{pqt} + 2B^n_{pqt}\omega^0_0 + b^n_{(pq}\omega^0_{t)} - b^n_{(pq}b^n_{t)s}\omega^s_n - \tfrac{1}{3} r^n_{s(p} b^n_{qt)}\omega^s_n \equiv 0. \tag{23}
$$

Теперь последовательно вводим в рассмотрение функции второго порядка [5; 10]:

$$
b_p = \tfrac{1}{r+2} b^n_{pqt} b^{qt}_n,\ \nabla b_p + b_p\omega^0_0 - b^n_{ps}\omega^s_n + \omega^0_p = \tilde{b}_{pK}\omega^K_0, \tag{24}
$$

$$c^n_{pqt} = b^n_{pqt} - b^n_{(pq}b_{t)},\ \nabla c^n_{pqt} + 2c^n_{pqt}\omega^0_0 - (b^n_{pq}r^n_{st} + b^n_{ps}r^n_{qt} + b^n_{sq}r^n_{pt})\omega^s_n \equiv 0, \qquad (25)$$

$$B_p = \tfrac{1}{r+2}B^n_{pqt}b^{qt}_n,\ \nabla B_p + B_p\omega^0_0 - b^n_{ps}\omega^s_n + \omega^0_p - \tfrac{1}{3}r^n_{sp}\omega^s_n \equiv 0, \qquad (26)$$

$$C^n_{pqt} = B^n_{pqt} - b^n_{(pq}B_{t)},\ \nabla C^n_{pqt} + 2C^n_{pqt}\omega^0_0 \equiv 0, \qquad (27)$$

$$C_n = b^{ps}_n b^{qr}_n b^{tf}_n C^n_{pqt}C^n_{srf},\ d\ln C_n = \omega^n_n - \omega^0_0 + C_K\omega^k_0, \qquad (28)$$

$$C_{pq} = b^{rs}_n b^{tf}_n C^n_{prt}C^n_{qsf},\ \nabla C_{pq} + 2C_{pq}\omega^0_0 \equiv 0. \qquad (29)$$

Отметим, что совокупность величин b_p (24) является аналогом чебышёвского вектора [11], а с другой стороны $\{b_p\}$ — квазинормаль 2-го порядка Λ-подрасслоения [2]. Тензор $\{C^n_{pqt}\}$ (27), аполярный основному фундаментальному тензору $\{b^n_{pq}\}$ Λ-подрасслоения, — аналог обобщенного тензора Дарбу [6] для $\mathcal{H}(\Lambda)$-подрасслоения (гиперполосного распределения $\mathcal{H}(\Lambda)$), ассоциированного с $\mathcal{SH}$-распределением.

Если тензор неголономности $r^n_{pq} = 0$, то $\Lambda^n_{pq} = b^n_{pq}$, $B^n_{pqt} = b^n_{pqt}$, $B_p = b_p$, $C^n_{pqt} = c^n_{pqt}$, что непосредственно следует из (21)—(27). Следовательно, при $r^n_{pq} = 0$ охваты тензоров C_n (28), $\{C_{pq}\}$ (29) можно представить в виде

$$C_n = b^{ps}_n b^{qt}_n b^{rf}_n c^n_{pqr}c^n_{stf},\ c_{pq} = b^{rs}_n b^{tf}_n c^n_{prt}c^n_{qsf}.$$

Тензоры C_n и $\{C_{pq}\}$ в общем случае невырожденные. Для симметрического тензора $\{C_{pq}\}$ введем обратный ему симметрический тензор $\{C^{pq}\}$ 2-го порядка:

$$C_{pq}C^{qt} = \delta^t_p,\ \nabla C^{qt} - 2C^{qt}\omega^0_0 \equiv 0. \qquad (30)$$

В силу уравнений (18), (17) убеждаемся, что геометрические объекты $\{\zeta_i\}$, $\{\zeta_\alpha\}$, где

$$\begin{aligned} \zeta_i &= \tfrac{1}{r}b^n_{pqi}b^{pq}_n,\ \nabla_\delta\zeta_i + \zeta_i\pi^0_0 = \Lambda^n_{ji}\pi^j_n - \pi^0_i, \\ \zeta_\alpha &= \tfrac{1}{r}b^n_{pq\alpha}b^{pq}_n,\ \nabla_\delta\zeta_\alpha + \zeta_\alpha\pi^0_0 = \Lambda^n_{\beta\alpha}\pi^\beta_n - \pi^0_\alpha, \end{aligned} \qquad (31)$$

являются квазинормалями 2-го порядка соответственно L-, E-подрасслоений данного $\mathcal{SH}$-распределения.

2. Продолжение уравнений (24), (28) приводит соответственно к дифференциальным уравнениям (здесь представим их только для величин $\tilde{b}^n_{pq}$ и C_p):

$$\begin{gathered} \nabla\tilde{b}_{pq} + 2\tilde{b}_{pq}\omega^0_0 + b_{(p}\omega^0_{q)} - (\Lambda^n_{pq}b_t + b^n_{ptq})\omega^t_n + \Lambda^v_{pq}\omega^0_v + (\Lambda^n_{pq} + b^n_{pq})\omega^0_n + b^n_{ps}\Lambda^s_{vq}\omega^v_n \equiv 0, \\ \nabla C_p + C_p\omega^0_0 + \Lambda^n_{qp}\omega^q_n + \omega^0_p = C_{pK}\omega^K_0. \end{gathered} \qquad (32)$$

При помощи величин $\{\tilde{b}_{pq}\}$ (в общем случае $\tilde{b}_{pq} \neq \tilde{b}_{qp}$), квазинормали $\{C_p\}$ (32) 3-го порядка и рассмотренных ранее величин 2-го порядка

(24), (25), (27), (29), (30), следуя работам [5], [10], построим следующие функции 3-го порядка на Λ-подрасслоении с полем симметрического тензора $\Lambda_{pq}^{n} \overset{def}{=} b_{pq}^{n}$:

$$T_n \overset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{r}(\tilde{b}_{pq} - b_p b_q) b_n^{pq},\ \nabla T_n + T_n \omega_0^0 - 2 b_p \omega_n^p + 2\omega_n^0 + \tilde{\Lambda}_n^v \omega_v^0 + \lambda_v^0 \omega_n^v \equiv 0,$$

где $\Lambda_n^v = \{\Lambda_n^i, \Lambda_n^\alpha\}$, $\Lambda_n^i = \frac{1}{r}\Lambda_{pq}^i b_n^{qp}$, $\Lambda_n^\alpha = \frac{1}{r}\Lambda_{pq}^\alpha b_n^{qp}$, $\nabla \Lambda_n^v + \omega_n^v = \Lambda_{nK}^v \omega_0^K$;

$$t_{pq} = \tilde{b}_{pq} - b_p b_q - T_n b_{pq}^n,$$

$$\nabla t_{pq} + 2 t_{pq}\omega_0^0 - c_{pqs}^n \omega_n^s + (\Lambda_{pq}^v - b_{pq}^n \Lambda_n^v)\omega_v^0 + b_{pt}^n (\Lambda_{vq}^t - \lambda_v^0 \delta_q^t)\omega_n^v \equiv 0,$$

$$W_{np} \overset{\text{def}}{=} b_n^{fs} b_n^{qr} t_{fq} c_{psr}^n - (\lambda_{np} + \mu_{np}),\ \nabla W_{np} + 2 W_{np}\omega_0^0 - C_{pq}\omega_n^q \equiv 0,$$

где $\lambda_{np} = b_n^{qs} b_n^{tf} c_{pqt}^n (\Lambda_{sf}^v \lambda_v^0 - b_{sf}^n \Lambda_n^v \lambda_v^0)$, $\mu_{np} = c_{pqt}^n \Lambda_n^v (\Lambda_{vs}^q b_n^{st} - \lambda_v^0 b_n^{qt})$;

$$W_n^p \overset{\text{def}}{=} -C_n^{pt} W_{nt},\ \nabla W_n^p + \omega_n^p = W_{nK}^p \omega_0^K, \tag{33}$$

$$F_n^p \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} b_n^{pq}(C_q - b_q),\ \nabla F_n^p + \omega_n^p = F_{nK}^p \omega_0^K. \tag{34}$$

Поля квазитензоров $\{W_n^p\}$ (33), $\{F_n^p\}$ (34) задают соответственно поля нормалей 1-го рода Вильчинского и Фубини Λ-подрасслоения [10] в дифференциальной окрестности 3-го порядка.

Система функций $\{T_n^p\}$, где

$$T_n^p = W_n^p - F_n^p,\ \nabla T_n^p = T_{nK}^p \omega_0^K, \tag{35}$$

образует на Λ-подрасслоении с полем симметрического тензора $\{\Lambda_{pq}^n\}$ тензор 3-го прядка.

Величина

$$J = C_{pqt}^n C^{qt}(W_n^p - F_n^p) \tag{36}$$

есть абсолютный инвариант 3-го порядка, так как в силу (27), (30), (33)—(35) из (36) следует $\delta J \equiv 0$.

Для $\mathscr{SH}$-распределения с полем симметрического тензора Λ_{pq}^n ($r_{pq}^n = 0$) охват абсолютного инварианта J имеет вид

$$J = c_{pqt}^n C^{qt}(W_n^p - F_n^p).$$

Итак, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *$\mathscr{SH}$-распределение порождает внутренним инвариантным образом:*

а) поля квазинормалей 2-го порядка $\{b_p\}$ (24), $\{\zeta_i\}$, $\{\zeta_\alpha\}$ (31) соответственно Λ-, L- и E-подрасслоений и поле тензора Дарбу $\{C_{pqt}^n\}$ (27) Λ-подрасслоения в дифференциальной окрестности 2-го порядка;

б) поле квазинормали $\{C_p\}$ *(32) и поля нормалей 1-го рода Вильчинского* $\{W_n^p\}$ *(33), Фубини* $\{F_n^p\}$ *(34) на Λ-подрасслоении в дифференциальной окрестности 3-го порядка.*

3. Исходя из функций b_{ijk}^n, удовлетворяющих уравнениям

$$\nabla b_{ijk}^n + 2b_{ijk}^n\omega_0^0 + b_{(ij}^n\omega_{k)}^0 - (b_{ij}^n\Lambda_{lk}^n + b_{jl}^n\Lambda_{ik}^n + b_{li}^n\Lambda_{jk}^n)\omega_n^l \equiv 0,$$

полученным из (19) при $K = k$, по аналогии с п. 1, 2 последовательно вводим функции 2-го порядка

$$B_{ijk}^n = \tfrac{1}{3}b_{(ijk)}^n,\ \nabla B_{ijk}^n + 2B_{ijk}^n\omega_0^0 + b_{(ij}^n\omega_{k)}^0 - b_{(ij}^n b_{k)l}^n\omega_n^l - \tfrac{1}{3}r_{l(i}^n b_{jk)}^n\omega_n^l \equiv 0,$$

$$b_i = \tfrac{1}{s+2}b_{ijk}^n b_n^{jk},\ \nabla b_i + b_i\omega_0^0 - b_{il}^n\omega_n^l + \omega_i^0 = \tilde{b}_{iK}\omega_0^K, \tag{37}$$

$$c_{ijk}^n = b_{ijk}^n - b_{(ij}^n b_{k)},\ \nabla c_{ijk}^n + 2c_{ijk}^n\omega_0^0 - b_{(ij}^n r_{l)k}^n\omega_n^l \equiv 0,$$

$$B_i = \tfrac{1}{s+2}B_{ijk}^n b_n^{jk},\ \nabla B_i + B_i\omega_0^0 + \omega_i^0 - b_{il}^n\omega_n^l - \tfrac{1}{3}r_{li}^n\omega_n^l \equiv 0,$$

$$C_{ijk}^n = B_{ijk}^n - b_{(ij}^n B_{k)},\ \nabla C_{ijk}^n + 2C_{ijk}^n\omega_0^0 \equiv 0, \tag{38}$$

$$D_n = b_n^{il}b_n^{jm}b_n^{kh}C_{ijk}^n C_{lmh}^n,\ d\ln D_n = \omega_n^n - \omega_0^0 + D_K\omega_0^K,$$

$$C_{ij} = b_n^{km}b_n^{lh}C_{ikl}^n C_{jmh}^n,\ \nabla C_{ij} + 2C_{ij}\omega_0^0 \equiv 0,$$

$$C_{ij}C^{jk} = \delta_i^k,\ \nabla C^{jk} - 2C^{jk}\omega_0^0 \equiv 0$$

и функции 3-го порядка

$$\nabla\tilde{b}_{ij} + 2\tilde{b}_{ij}\omega_0^0 + b_{(i}\omega_{j)}^0 - (\Lambda_{ij}^n b_k + b_{ijk}^n)\omega_n^k + \Lambda_{ij}^A\omega_A^0 + (\Lambda_{ij}^n + b_{ij}^n)\omega_n^0 \equiv 0,$$

$$\nabla D_i + D_i\omega_0^0 + \Lambda_{ji}^n\omega_n^j + \omega_i^0 = D_{iK}\omega_0^K, \tag{39}$$

$$W_n^i \stackrel{\text{def}}{=} -D_n^{ij}W_{nj},\ \nabla W_n^i + \omega_n^i = W_{nK}^i\omega_0^K, \tag{40}$$

$$F_n^i \stackrel{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2}b_n^{ij}(D_j - b_j),\ \nabla F_n^i + \omega_n^i = F_{nK}^i\omega_0^K, \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \tag{41}$$

$$T_n^i = W_n^i - F_n^i,\ \nabla T_n^i = T_{nK}^i\omega_0^K,$$

$$\tilde{J} = C_{ijk}^n C^{jk}(W_n^i - F_n^i),\ \delta\tilde{J} \equiv 0,$$

ассоциированные с L-подрасслоением.

Наконец, введем в рассмотрение функции

$$\{\xi_p\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\tfrac{1}{s} b^n_{ijp} b^{ij}_n\}, \quad \{\xi_\alpha\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\tfrac{1}{s} b^n_{ij\alpha} b^{ij}_n\},$$

которые, согласно (19), (17) удовлетворяют уравнениям

$$\nabla_\delta \xi_p + \xi_p \pi^0_0 = \Lambda^n_{qp} \pi^q_n - \pi^0_p \equiv 0, \nabla_\delta \xi_\alpha + \xi_\alpha \pi^0_0 = \Lambda^n_{\beta\alpha} \pi^\beta_n - \pi^0_\alpha, \tag{42}$$

т. е. являются квазинормалями 2-го порядка, ассоциированными соответственно с Λ-, E-подрасслоениями.

В результате справедлива

Теорема 4. $\mathcal{SH}$*-распределение порождает внутренним инвариантным образом:*

а) поля квазинормалей 2-го порядка $\{\xi_p\}$ *(42),* $\{b_i\}$ *(37),* $\{\xi_\alpha\}$ *(42) соответственно Λ-, L-, E-подрасслоений и поле тензора Дарбу* $\{C^n_{ijk}\}$ *(38) L-подрасслоения в дифференциальной окрестности 2-го порядка;*

б) поле квазинормали $\{D_i\}$ *(39) и поля нормалей 1-го рода Вильчинского* $\{W^i_n\}$ *(40), Фубини* $\{F^i_n\}$ *(41) на L-подрасслоении в дифференциальной окрестности 3-го порядка.*

4. Теперь, используя функции $b^n_{\alpha\beta\gamma}$, удовлетворяющие уравнениям

$$\nabla b^n_{\alpha\beta\gamma} + 2b^n_{\alpha\beta\gamma}\omega^0_0 - (b^n_{\alpha\beta}\Lambda^n_{\delta\gamma} + b^n_{\beta\delta}\Lambda^n_{\alpha\gamma} + b^n_{\delta\alpha}\Lambda^n_{\beta\gamma})\omega^\delta_n \equiv 0,$$

полученным из (20) при $K = \gamma$, по аналогии с п. 1—3 получим функции 2-го порядка

$$B^n_{\alpha\beta\gamma} = \tfrac{1}{3} b^n_{(\alpha\beta\gamma)}, \nabla B^n_{\alpha\beta\gamma} + 2B^n_{\alpha\beta\gamma}\omega^0_0 + b^n_{(\alpha\beta}\omega^0_{\gamma)} - b^n_{(\alpha\beta} b^n_{\gamma)\delta}\omega^\delta_n - \tfrac{1}{3} r^n_{\delta(\alpha} b^n_{\beta\gamma)}\omega^\delta_n \equiv 0,$$

$$b_\alpha = \tfrac{1}{n-m+1} b^n_{\alpha\beta\gamma} b^{\beta\gamma}_n, \nabla b_\alpha + b_\alpha\omega^0_0 - b^n_{\alpha\gamma}\omega^\gamma_n + \omega^0_\alpha = \tilde{b}_{\alpha K}\omega^K_0, \tag{43}$$

$$c^n_{\alpha\beta\gamma} = b^n_{\alpha\beta\gamma} - b^n_{(\alpha\beta} b_{\gamma)}, \nabla c^n_{\alpha\beta\gamma} + 2c^n_{\alpha\beta\gamma}\omega^0_0 - b^n_{(\alpha\beta} r^n_{\delta)\gamma}\omega^\delta_n \equiv 0,$$

$$B_\alpha = \tfrac{1}{n-m+1} B^n_{\alpha\beta\gamma} b^{\beta\gamma}_n, \nabla B_\alpha + B_\alpha\omega^0_0 + \omega^0_\alpha - b^n_{\alpha\delta}\omega^\delta_n - \tfrac{1}{3} r^n_{\delta\alpha}\omega^\delta_n \equiv 0,$$

$$C^n_{\alpha\beta\gamma} = B^n_{\alpha\beta\gamma} - b^n_{(\alpha\beta} B_{\gamma)}, \nabla C^n_{\alpha\beta\gamma} + 2C^n_{\alpha\beta\gamma}\omega^0_0 \equiv 0, \tag{44}$$

$$E_n = b^{\alpha\eta}_n b^{\beta\varepsilon}_n b^{\gamma\delta}_n C^n_{\alpha\beta\gamma} C^n_{\eta\varepsilon\delta}, d\ln E_n = \omega^n_n - \omega^0_0 + E_K\omega^K_0,$$

$$C_{\alpha\beta} = b^{\gamma\eta}_n b^{\varepsilon\delta}_n C^n_{\alpha\gamma\varepsilon} C^n_{\beta\eta\delta}, \nabla C_{\alpha\beta} + 2C_{\alpha\beta}\omega^0_0 \equiv 0,$$

$$C_{\alpha\beta} C^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha, \nabla C^{\beta\gamma} - 2C^{\beta\gamma}\omega^0_0 \equiv 0$$

и функции 3-го порядка

$$\nabla\tilde{b}_{\alpha\beta}+2\tilde{b}_{\alpha\beta}\omega_0^0+b_{(\alpha}\omega_{\beta)}^0-(\Lambda_{\alpha\beta}^n b_\gamma+b_{\alpha\beta\gamma}^n)\omega_n^\gamma+\Lambda_{\alpha\beta}^a\omega_a^0+(\Lambda_{\alpha\beta}^n+b_{\alpha\beta}^n)\omega_n^0+b_{\alpha\gamma}^n\Lambda_a^\gamma\omega_n^a\equiv 0,$$

$$\nabla E_\alpha+E_\alpha\omega_0^0+\Lambda_{\gamma\alpha}^n\omega_n^\gamma+\omega_\alpha^0=E_{\alpha K}\omega_0^K, \qquad (45)$$

$$W_n^\alpha\overset{\text{def}}{=}-C_n^{\alpha\beta}W_{n\beta},\ \nabla W_n^\alpha+\omega_n^\alpha=W_{nK}^\alpha\omega_0^K, \qquad (46)$$

$$F_n^\alpha\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2}b_n^{\alpha\beta}(E_\beta-b_\beta),\ \nabla F_n^\alpha+\omega_n^\alpha=F_{nK}^\alpha\omega_0^K, \qquad (47)$$

$$T_n^\alpha=W_n^\alpha-F_n^\alpha,\ \nabla T_n^\alpha=F_{nK}^\alpha\omega_0^K,$$

$$I=C_{\alpha\beta\gamma}^n C^{\beta\gamma}(W_n^\alpha-F_n^\alpha),\ \delta I\equiv 0,$$

ассоциированные с E-подрасслоением.

Кроме того, рассмотрим совокупности функций

$$\{\varepsilon_p\}\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{n-m-1}b_{\alpha\beta p}^n b_n^{\alpha\beta},\ \ \{\varepsilon_i\}\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{n-m-1}b_{\alpha\beta i}^n b_n^{\alpha\beta},$$

которые в силу (20), (17) удовлетворяют уравнениям

$$\nabla\varepsilon_p+\varepsilon_p\pi_0^0=\Lambda_{qp}^n\pi_p^q-\pi_p^0,\ \ \nabla\varepsilon_i+\varepsilon_i\pi_0^0=\Lambda_{ji}^n\pi_n^j-\pi_i^0, \qquad (48)$$

т. е. являются квазинормалями 2-го порядка, ассоциированными соответственно с Λ-, L-подрасслоениями.

Итак, имеет место

Теорема 5. $\mathscr{SH}$*-распределение порождает внутренним инвариантным образом:*

а) поля квазинормалей 2-го порядка $\{\varepsilon_p\}$ *(48),* $\{\varepsilon_i\}$ *(48),* $\{b_\alpha\}$ *(43) соответственно Λ-, L-, E-подрасслоений и поле тензора Дарбу* $\{C_{\alpha\beta\gamma}^n\}$ *(44) E-подрасслоения в дифференциальной окрестности 2-го порядка;*

б) поле квазинормали $\{E_\alpha\}$ *(45) и поля нормалей 1-го рода Вильчинского* $\{W_n^\alpha\}$ *(46), Фубини* $\{F_n^\alpha\}$ *(47) на E-подрасслоении в дифференциальной окрестности 3-го порядка.*

Список литературы

1. *Попов Ю. И.* Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства. СПб., 1992.

2. *Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М.* Распределения *m*-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ АН СССР. М., 1971. Т. 3. С. 49—94.

3. *Остиану Н. М.* Распределение *m*-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности // Там же. С. 95—114.

4. *Остиану Н. М.* Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Там же. 1973. Т. 4. С. 71—120.

5. *Столяров А. В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Итоги науки и техники. Сер. : Проблемы геометрии / ВИНИТИ АН СССР. М., 1975. Т. 7. С. 117—151.

6. *Акивис М. А.* О строении двухкомпонентных сопряженных систем // Тр. геом. семинара / Институт научной информации. М., 1966. Т. 1. С. 7—31.

7. *Рыжков В. В.* Сопряженные системы на многомерных поверхностях // Тр. моск. мат. об-ва. 1958. Т. 7. С. 179—226.

8. *Попов Ю. И.* Сильно взаимные трехсоставные распределения проективного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2015. Вып. 10. С. 62—76.

9. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М. ; Л., 1948.

10. *Попов Ю. И.* Трехсоставные регулярные распределения $\mathscr{H}^{r}_{m,n\text{-}1}$ проективного пространства. Калининградский университет, 1982. Рук. деп. ВИНИТИ 16.12.1982. № 6192-82Деп.

11. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

Об авторе

Юрий Иванович Попов — канд. физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: yurij.popoff2015@yandex.ru

About the author

Dr Juriy Popov, Ass. Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: yurij.popoff2015@yandex.ru