Уравнение орисферы как ортогональной поверхности связки параллельных прямых имеет вид: $2(x^2)^2-2x^1x^2+(x^3)^2+(x^4)^2=0$. В силу невырожденности поверхности (A_1) $\omega_1^3\wedge\omega_1^4\neq 0$. Система пфафовых уравнений конгруэнции орисфер (S) состоит из уравнений (1) и уравнения $\omega_2^2=\lambda^1\theta_1+\lambda^2\theta_2$, где $\theta_1=\omega_1^3$, $\theta_2=\omega_1^4$.

Т е о р е м а 1. Конгруэнции (S) существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Т е о р е м а 2. Фокальное многообразие [2] орисферы $S\in(S)$ состоит из одной собственной точки $P = (1+\frac{1}{2}((\lambda^1)^2+(\lambda^2)^2)A_1+A_2-\lambda^1A_3-\lambda^2A_4$ и из пары мнимых прямых, пересекающихся в несобственной точке A_1.

Канонизируем репер следующим образом. Точку A_1+A_2 совмещаем с фокальной точкой P, а точки A_3 и A_4 помещаем в фокусы луча A_3A_4 прямолинейной конгруэнции (A_3A_4). Координатные линии $\theta_1=0$, $\theta_2=0$ в каноническом репере соответствуют торсам прямолинейной конгруэнции (A_3A_4). Система пфаффовых уравнений (S) включает уравнения (1) и уравнения $\omega_2^2=0$, $\omega_2^3=\rho\theta_1$, $\omega_2^4=\tau\theta_2$, $\omega^4=s^1\theta_1+s^2\theta_2$. Назовем ассоциированными орициклами орициклы C_3 и C_4, получающиеся пересечением орисферы S координатными плоскостями $(A_1A_2A_3)$ и $(A_1A_2A_4)$. Орициклы C_3 и C_4 определяются соответственно уравнениями

$$2(x^2)^2-2x^1x^2+(x^4)^2=0,\ x^3=0;$$
$$2(x^2)^2-2x^1x^2+(x^3)^2=0,\ x^4=0.$$

Анализируя систему уравнений, определяющих фокальные поверхности конгруэнций (C_3) и (C_4), убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Т е о р е м а 3. Фокальное многообразие конгруэнций (C_3), (C_4) ассоциированных орициклов C_3 и C_4 имеет только три собственные фокальные поверхности, описанные точками: P, $\mathcal{D}_4^\varepsilon=(-\rho-s^1a_\varepsilon^4)A_1+A_2+a_\varepsilon^4A_4$ и $\mathcal{D}_3^\varepsilon=(-\tau-2s^2a_\varepsilon^3)A_1+A_2+a_\varepsilon^3A_3$, где $a_\varepsilon^4=-s^1\pm\sqrt{(s^1)^2-2(\rho+1)}$, $a_\varepsilon^3=-s^2\pm\sqrt{(s^2)^2-2(1+\tau)}$, $\varepsilon^2=1$.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С., Махоркин В.В. Конгруэнции поверхностей второго порядка в трехмерном проективном пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвузовский темат.сб.науч.тр./ Калинингр. ун-т. Калининград, 1974. Вып.4. С.86-106.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.17 1986

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ НЕИНТЕГРИРУЕМОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ МНОГООБРАЗИИ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ

Ю.С. Б а р а н о в, Ю.Е. Г л и к л и х

Работа посвящена построению специального гладкого распределения (подрасслоения касательного расслоения) на бесконечномерном многообразии сохраняющих объем диффеоморфизмов дубля компактного многообразия с краем. Это распределение можно интерпретировать как механическую связь в смысле работ [1 -3] для систем на многообразии диффеоморфизмов, описывающих гидродинамику на основе современного геометрического лагранжева подхода, восходящего к работе [4] (см. также [5 - 7]). Заданные связью ограничения на лагранжевы гидродинамические системы идеальной несжимаемой жидкости на дубле приводят к движениям жидкости, эквивалентным движениям на первоначальном многообразии с краем. Таким образом, удается сводить некоторые задачи гидродинамики на многообразиях с краем к аналогичным задачам со связностью на многообразиях без края (на дубле), которые лучше изучены. Построенное распределение существенно бесконечномерно и неинтегрируемо. Для построения различных бесконечномерных расслоений, доказательства их гладкости и гладкости действующих в них операторов мы модифицируем методы [6, приложение А] и используем ортогональность относительно сильных римановых метрик, свойства которых аналогичны конечномерным [8]. Подробное описание геометрии многообразия диффеоморфизмов содержится в [6].

Пусть M - C^∞-гладкое компактное риманово многообразие с C^∞-краем ∂M, $\widetilde{M}$-дубль M с римановой метрикой, гладко продолженной с M. Рассмотрим гильбертово многообразие $\mathcal{D}^s_\mu(\widetilde{M})$, сохраняющих риманов объем диффеоморфизмов многообразия $\widetilde{M}$, принадлежащих соболевскому классу гладкости H^s, $s>\frac{1}{2}\dim M+1$ целое, и аналогичное многообразие $\mathcal{D}^s_\mu(M)$. Эти многообразия обладают структурой топологической группы относительно суперпозиции диффеоморфизмов. Слой $T_e\mathcal{D}^s_\mu(\widetilde{M})$ касательного расслоения в единице группы $e=id$ является пространством бездивергентных векторных полей класса H^s на $\widetilde{M}$, а $T_e\mathcal{D}^s_\mu(M)$ – пространством бездивергентных H^s-полей на M, касательных к краю ∂M. Для произвольного $\eta\in\mathcal{D}^s_\mu(\widetilde{M})$ слой $T_\eta\mathcal{D}^s_\mu(\widetilde{M})=\{X\circ\eta \mid X\in T_e\mathcal{D}^s_\mu(\widetilde{M})\}$, слой $T_\eta\mathcal{D}^s_\mu(M)$ для $\eta\in\mathcal{D}^s_\mu(M)$ определяется аналогично. При фиксированном η правый сдвиг $R_\eta(\theta)=\theta\circ\eta$ является C^∞-гладким отображением на $\mathcal{D}^s_\mu(\widetilde{M})$ и на $\mathcal{D}^s_\mu(M)$, его касательное отображение имеет вид $TR_\eta(Y)=Y\circ\eta$. Левый сдвиг $L_\eta(\theta)=\eta\circ\theta$ является непрерывным отображением. Правоинвариантное векторное поле на $\mathcal{D}^s_\mu(\widetilde{M})$ (на $\mathcal{D}^s_\mu(M)$) тогда и только тогда C^k-гладко, когда вектор этого поля в единице является H^{s+k}-векторным полем на $\widetilde{M}$ (на M).

Введем на $\mathcal{D}^s_\mu(\widetilde{M})$ риманову метрику, задав в $T_\eta\mathcal{D}^s_\mu(\widetilde{M})$ скалярное произведение по формуле

$$(X\circ\eta, Y\circ\eta)^\circ_\eta=\int\limits_{\widetilde{M}}\langle X(\eta(m)), Y(\eta(m))\rangle_{\eta(m)}\,d\mu(m), \qquad (1)$$

где $\langle,\rangle$ – риманова метрика на $\widetilde{M}$, $d\mu$ – риманова форма объема. Риманова метрика (1) является слабой, она задает в касательных пространствах топологию функционального пространства L_2, более слабую, чем исходная топология . Изучение слабой метрики (1) требует специальных конструкций. В [6] показано, что (1) является C^∞-гладкой и правоинвариантной на $\mathcal{D}^s_\mu(\widetilde{M})$, что эта метрика обладает связностью Леви-Чивита и что геодезическая пульверизация S этой связности является C^∞-гладким правоинвариантным векторным полем на касательном расслоении $T\mathcal{D}^s_\mu(\widetilde{M})$. Для многообразия $\mathcal{D}^s_\mu(M)$ доказаны аналогичные утверждения. Многообразие $\mathcal{D}^s_\mu(\widetilde{M})$ является конфигурационным пространством для механической системы с бесконечным числом степеней свободы, описывающей движение идеальной несжимаемой жидкости на $\widetilde{M}$ (см. [4-7]). Пусть $f(t)\in T_e\mathcal{D}^s_\mu(\widetilde{M})$ – неавтономная внешняя сила, действующая на жидкость (без ограничения общности силу всегда можно считать бездивергентной). Пусть $\bar{f}(t)$ – правоинвариантное векторное поле на $\mathcal{D}^s_\mu(\widetilde{M})$, полученное правым разнесением $f(t)$, $\bar{f}^\ell(t)$ – вертикальный подъем поля $\bar{f}(t)$ на $T\mathcal{D}^s_\mu(\widetilde{M})$. Тогда специальное векторное поле (дифференциальное уравнение второго порядка) на $T\mathcal{D}^s_\mu(\widetilde{M})$

$$S+\bar{f}^\ell(t) \qquad (2)$$

описывает движение идеальной несжимаемой жидкости на $\widetilde{M}$, т.е. решение уравнения (2) на $\mathcal{D}^s_\mu(\widetilde{M})$ есть кривая в $\mathcal{D}^s_\mu(\widetilde{M})$ (т.е. поток на $\widetilde{M}$), описывающая движение жидкости.

Определение. Уравнение (2) назовем лагранжевой гидродинамической системой (л.г.с.) с внешней силой $f(t)$.

Пусть $\eta(t)$ – решение (2). Рассмотрим в $T_e\mathcal{D}^s_\mu(\widetilde{M})$ кривую $Y(t)=(T\eta(t))^{-1}(\frac{d}{dt}\eta(t))$. Кривая $Y(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка на $T_e\mathcal{D}^s_\mu(\widetilde{M})$, которое называется уравнением Эйлера л.г.с. (2). Важно отметить, что в данном случае уравнение Эйлера является обычным уравнением Эйлера идеальной несжимаемой жидкости на $\widetilde{M}$. Если неавтономное векторное поле на $\widetilde{M}$ есть решение уравнения Эйлера, то его поток на $\widetilde{M}$ является решением л.г.с. (2). Для многообразия $\mathcal{D}^s_\mu(M)$ имеют место аналогичные конструкции и утверждения; в этом случае движение жидкости рассматривается на многообразии M с краем.

Рассмотрим расслоение Φ^α_k над $\mathcal{D}^s_\mu(\widetilde{M})$, слоем которого в точке η является $\Phi^\alpha_k(\eta)=\{\omega\circ\eta \mid \omega\in H^\alpha(\Lambda^k M)\}$ правый сдвиг в точку η пространства дифференциальных k-форм соболевского класса H^α на $\widetilde{M}$; здесь $s\geqslant\alpha>\frac{1}{2}\dim M$, α – целое. В [6] показано, что Φ^α_k является C^∞-гладким расслоением. Рассмотрим на Φ^α_k сильную (т.е. H^α) C^∞-гладкую правоинвариантную риманову метрику, задав в слоях скалярное произведение по формуле (ср. [6])

$$(\omega\circ\eta, \nu\circ\eta)^{\alpha}_{\eta} = \int_{\widetilde{M}} (\omega\wedge *\nu)(\eta(m)) + \int_{\widetilde{M}} [(d+\delta)^{\alpha}\omega\wedge *(d+\delta)^{\alpha}\nu](\eta(m)). \quad (3)$$

Здесь и далее d -дифференциал, δ -кодифференциал, $\wedge$ - внешнее произведение, $*$ -операция "звездочка" на дифференциальных формах.

Пусть ψ -индикатор многообразия M в $\widetilde{M}$. Введем в слоях Φ^{α}_{k} еще два скалярных произведения.

$$((\omega\circ\eta), \nu\circ\eta))^{\alpha}_{k} = \int_{\widetilde{M}} \psi(\eta(m))\circ[(\omega\wedge *\nu)(\eta(m))] + \int_{\widetilde{M}} \psi(\eta(m))\circ[((d+\delta)^{\alpha}\omega\wedge *(d+\delta)^{\alpha}\nu)(\eta(m))], \quad (4)$$

$$((\omega\circ\eta, \nu\circ\eta)^{\circ}_{\eta} = \int \psi(\eta(m))\circ[(\omega\wedge *\nu)(\eta(m))]. \quad (5)$$

Л е м м а 1. Скалярные произведения (4) и (5) гладки по η и правоинвариантны.

Отметим, что "сильное" скалярное произведение (4) аналогично (3), но вырождено на слоях Φ^{α}_{k}, т.е. не определяет сильную риманову метрику. "Слабое" скалярное произведение (5) аналогично (1).

Рассмотрим подрасслоение F^{α}_{k} в Φ^{α}_{k} со слоями $F^{\alpha}_{k}(\eta) = \{ \omega\circ\eta \mid \omega\in H^{\alpha}(\Lambda^{k}\widetilde{M}),\ \omega|_{M} = 0 \}$.

Л е м м а 2. F^{α}_{k} является C^{∞}-гладким правоинвариантным подрасслоением в Φ^{α}_{k}.

Для доказательства мы строим гладкий сюрьективный морфизм расслоений $A: \Phi^{\alpha}_{k} \to \mathcal{D}^{s}_{\mu}(\widetilde{M}) \times \ell_2$ (ℓ_2-пространство числовых последовательностей, суммируемых с квадратом), ядром которого является F^{α}_{k}. A строится с помощью метрики (4): $A(\omega\circ\eta) = (\eta; ((\omega\circ\eta, \omega_1\circ\eta))^{\alpha}_{\eta}, \ldots, ((\omega\circ\eta, \omega_n\circ\eta))^{\alpha}_{\eta}, \ldots)$, где ω_i ($i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$)- C^{∞}-гладкие формы на $\widetilde{M}$, сужения которых на M образуют ортонормированный базис в $H^{\alpha}(\Lambda^{k}M)$ относительно сильного скалярного произведения типа (3). Таким образом, доказательство сводится к лемме 1 [6, добавление A].

Пусть G^{α}_{k} -ортогональное дополнение в Φ^{α}_{k} до расслоения F^{α}_{k} относительно римановой метрики (3), $J: \Phi^{\alpha}_{k} \to G^{\alpha}_{k}$ - оператор ортогонального проектирования в слоях.

Л е м м а 3. G^{α}_{k} - C^{∞}-гладкое правоинвариантное подрасслоение в Φ^{α}_{k}, J - C^{∞}-гладкий правоинвариантный оператор.

Л е м м а 4. Если $\omega\in\Phi^{\alpha}_{k}(e)$ является формой гладкости $H^{\alpha+\beta}$ ($\beta > 0$, целое), то $J\omega$ также является формой гладкости $H^{\alpha+\beta}$.

Это утверждение следует из свойств правоинвариантных сечений, связанных с гладкостью (см. выше).

Рассмотрим сужение $j: H^{\alpha}(\Lambda^{k}\widetilde{M}) \to H^{\alpha}(\Lambda^{k}M)$ дифференциальных форм с $\widetilde{M}$ на M. Очевидно, что $j: G^{\alpha}_{k}(e) \to H^{\alpha}(\Lambda^{k}M)$- биективно. Поэтому определен оператор продолжения $i = j^{-1}: H^{\alpha}(\Lambda^{k}M) \to G^{\alpha}_{k}(e)$ дифференциальных форм с M на $\widetilde{M}$. Используя лемму 4 и существование сохраняющих гладкость продолжений форм с M на $\widetilde{M}$ (см., например, [9]), нетрудно доказать следующее утверждение.

Л е м м а 5. Если $\omega\in H^{\alpha+\beta}(\Lambda^{k}M)$, $\beta > 0$ целое, то $i\omega\in G^{\alpha+\beta}_{k}(e)$.

Отметим, что скалярное произведение (4), суженное на слои G^{α}_{k}, становится невырожденным, т.е. задает риманову метрику на G^{α}_{k}. Обозначим через $\bar{d}: \Phi^{s}_{k} \to \Phi^{s-1}_{k+1}$ послойное отображение, определенное формулой $\bar{d}_{\eta} = R_{\eta}\circ d\circ R^{-1}_{\eta}$, где $R_{\eta}(\omega) = \omega\circ\eta$. Аналогично определим $\bar{\delta} = R_{\eta}\circ\delta\circ R^{-1}_{\eta}$. В [6] показано, что $\bar{d}$ и $\bar{\delta}$ C^{∞}-гладкие. Определим C^{∞}-гладкие правоинвариантные отображения $J\circ\bar{d}\circ J: \Phi^{s}_{k} \to G^{s-1}_{k+1}$ и $J\circ\bar{\delta}\circ J: \Phi^{s}_{k} \to G^{s-1}_{k-1}$ и рассмотрим подрасслоения $B^{s}_{k} = G^{s}_{k} \cap \ker J\circ\bar{\delta}\circ J$ и $\mathcal{D}^{s}_{k} = B^{s}_{k} \cap \ker J\circ\bar{d}\circ J$ в G^{s}_{k}. Обозначим через W^{s}_{k} ортогональное дополнение в B^{s}_{k} до $\mathcal{D}^{s}_{k}$ относительно римановой метрики (4).

Л е м м а 6. W^{s}_{k} обладает следующими свойствами: 1) W^{s}_{k} является C^{∞}-гладким правоинвариантным подрасслоением в G^{s}_{k}; 2) $J\circ\bar{d}\circ J: W^{s}_{k} \to \mathrm{Im}\, J\circ\bar{d}\circ J$ -биективно; 3) обратный к $J\circ\bar{d}\circ J$ на его образе оператор $Q: \mathrm{Im}\, J\circ d\circ J \to W^{s}_{k}$ является C^{∞}-гладким правоинвариантным морфизмом расслоений; 4) $j W^{s}_{k}$ является пространством коточных форм на M, касательных к краю ∂M.

С л е д с т в и е. C^{∞}-гладкий правоинвариантный оператор $Q\circ J\circ\bar{d}\circ J$ проектирует Φ^{s}_{k} на W^{s}_{k}.

Далее ограничимся случаем $k = 1$. Учитывая наличие на $\widetilde{M}$ римановой метрики, мы не будем различать векторные поля и 1-формы. Обозначим через $\mathcal{H}_t$ пространство гармонических векторных полей на M, касательных к краю ∂M. Известно, что $\mathcal{H}_t$ конечномерно и состоит из полей гладкости C^∞. Тогда $i\mathcal{H}_t$ конечномерное подпространство в $G_1^s(e)$ и по лемме 5 состоит из полей гладкости C^∞. Обозначим через Ω правоинвариантное подрасслоение в G_1^s, полученное правым разнесением $i\mathcal{H}_t$.

Л е м м а 7. Ω – C^∞-гладкое правоинвариантное подрасслоение в G_1^s; ортогональный проектор $\Gamma: G_1^s \to \Omega$ относительно метрики (5) является C^∞-гладким правоинвариантным морфизмом расслоений (ср. [6]).

Пусть $P_\mu: \Phi_1^s \to T\mathcal{D}_\mu^s(\widetilde{M})$ – оператор ортогонального проектирования относительно слабой римановой метрики (1). В [6] показано, что P_μ – C^∞-гладкий правоинвариантный морфизм расслоений. Рассмотрим $\Xi = P_\mu(W_1^s \oplus \Omega)$.

Л е м м а 8. 1) Ξ – C^∞-гладкое правоинвариантное подрасслоение в $T\mathcal{D}_\mu^s(\widetilde{M})$; 2) $P_\mu: W_1^s \oplus \Omega \to \Xi$ – биективно; 3) $j\Xi(e) = T_e\mathcal{D}_\mu^s(M)$.

Т е о р е м а 1. Распределение Ξ на $\mathcal{D}_\mu^s(\widetilde{M})$ неинтегрируемо.

Интегрируемость Ξ означала бы возможность вложить группу $\mathcal{D}_\mu^s(M)$ в группу $\mathcal{D}_\mu^s(\widetilde{M})$. Известно, что такого вложения не существует. Мы интерпретируем распределение Ξ как механическую связь на $\mathcal{D}_\mu^s(M)$ в смысле работ [1]-[3]. Теорема 1 в этом случае означает, что связь Ξ неголономна. Изучим л.г.с., подчиненные связи Ξ. Проектор $P = P_\mu(\Gamma + Q\circ J\circ \bar{d})\circ J: T\mathcal{D}_\mu^s(\widetilde{M}) \to \Xi$ является по построению C^∞-гладким правоинвариантным морфизмом расслоений. Рассмотрим на $\mathcal{D}_\mu^s(\widetilde{M})$ л.г.с. с силой специального вида $f_0(t) = P_i \hat{f}(t)$, где $\hat{f}(t) \in T_e\mathcal{D}_\mu^s(M)$ – неавтономное векторное поле на M. В соответствии с [1]-[3] л.г.с. с силой $f_0(t)$, подчиненная связи Ξ, есть специальное векторное поле

$$TP(S + \bar{f}_0^{\ell}(t)) \qquad (6)$$

на пространстве расслоения Ξ. В качестве начального условия для уравнения (6) рассмотрим $X_0 \in \Xi(e)$ специального вида $X_0 = P_i\hat{X}$, где $\hat{X} \in T_e\mathcal{D}_\mu^s(M)$. Рассмотрим соответствующее (6) уравнение Эйлера.

Т е о р е м а 2. Уравнение Эйлера на $\Xi(e)$, соответствующее л.г.с.(6), сужается на $T_e\mathcal{D}_\mu^s(M)$. Решение этого уравнения Эйлера с начальным условием X_0, суженное на M, совпадает с решением уравнения Эйлера идеальной несжимаемой жидкости на M с внешней силой $\hat{f}(t)$ и начальной скоростью $\hat{X}$.

Для доказательства надо воспользоваться конструкцией Ξ и явным видом уравнений Эйлера [6].

С л е д с т в и е. Пусть $\eta(t)$ – кривая в $\mathcal{D}_\mu^s(\widetilde{M})$, являющаяся решением (6) на Ξ с начальным условием X_0. Тогда $\eta(t)|_M$ есть кривая в $\mathcal{D}_\mu^s(M)$, описывающая движение идеальной несжимаемой жидкости на M под действием внешней силы $\hat{f}(t)$ с начальной скоростью $\hat{X}$.

Библиографический список

1. В е р ш и к А.М., Ф а д д е е в Л.Д. Дифференциальная геометрия и лагранжева механика со связями: Докл. АН СССР.-М., 1972.Т. 202. № 3.С.555-557.

2. В е р ш и к А.М., Ф а д д е е в Л.Д. Лагранжева механика в инвариантном изложении// Проблемы теоретической физики: Межвузовский темат.сб.научн.тр./ЛГУ.-Л., 1975. № 2.С.129-141.

3. В е р ш и к А.М. Классическая и неклассическая динамика со связями // Геометрия и топология в глобальных нелинейных задачах: Межвузовский темат.сб.научн.тр./ВГУ.-Воронеж, 1984.С.23-48.

4. Arnold V. Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluides parfaits.- Ann. Inst. Fourier, 1966. T. 16. No 1. P. 319-361.

5. А р н о л ь д В.И. Математические методы классической механики.М.: Наука, 1974.

6. Ebin D.G., Marsden J., Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid.- Ann. of Math., 1970. V.92. No1. P.102-163. (Рус.пер. Математика: Сб.переводов. 1973.Т.17. № 5.С.142-167; № 6.С.111-146.)

7. Marsden J., Ebin D., Fischer A., Diffeomorphism Groups, Hydrodynamics and Relativity.- in: Proc. 13-th biennial seminar of Canadian: Math. Congress.- Montreal, 1972. P. 135-279.

8. Л е н г С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий.М.: Мир, 1967.

9. Seeley R. Extension of C^∞ functions defined in halfspaces.- Proc. Amer. Math. Soc., 1964. V. 15. P. 625-626.