$\chi_{n-m-1}(A_0)$ при смещении точки A_0 по кривым, принадлежащим Λ-подрасслоению. Многообразие (3.24) обозначим $\Psi_{n-m-2}(\chi)$ Оно представляет собой алгебраическое многообразие размерно $(n-m-2)$ порядка r. Линейная поляра точки A_0 относительн многообразия $\Psi_{n-r-1}(\chi)$ (3.24) имеет вид:

$$x^{\hat a}=0,\qquad x^0-\hat N^0_\alpha x^\alpha=0. \qquad (3.25)$$

Квазитензор $\{\hat N^0_\alpha\}$ (2.4) 2-го порядка в каждой точке $A_0\in V_m$ определяет нормаль 2-го рода в смысле Нордена характеристи $\chi_{n-m-1}(A_0)$. Следовательно, квазитензоры $\{\hat N^0_\alpha\}$ (2.4), $\{N^0_\alpha\}$ (3.17) (в общем случае они линейно независимы) определяют в характеристике $\chi(A_0)$ пучок ее нормалей 2-го рода, заданный пучком квазитензоров 2-го порядка:

$$N^0_\alpha(\sigma)=\hat N^0_\alpha+\sigma(N^0_\alpha-\hat N^0_\alpha)=\hat N^0_\alpha+\sigma\hat n_\alpha, \qquad (3.26)$$

где $\hat n_\alpha=N^0_\alpha-\hat N^0_\alpha$ — тензор 2-го порядка.

7. Фокальное многообразие $\Psi_{n-r-1}(\vartheta)$ (3.19) пересекает плоскость $N_{n-m}(A_0)$ по многообразию $\varphi_{n-m-1}(N)$, которое соот тствует смещениям точки A_0 по кривым, принадлежащим касате ному Λ-подрасслоению, т.е. по многообразию

$$x^a=0,\quad \det\|\delta^p_q x^0+N^p_{\alpha q}x^\alpha\|=0. \qquad (3.27)$$

Линейная поляра точки A_0 относительно фокального многообра $\Psi_{n-m-1}(N)$ есть $(n-m-1)$-плоскость $\mathcal{K}_{n-m-1}(A_0)$, которая задает уравнениями

$$x^a=0,\quad x^0-N^0_\alpha x^\alpha=0, \qquad (3.28)$$

где квазитензор 2-го порядка

$$N^0_\alpha=-\frac{1}{r}N^p_{\alpha p} \qquad (3.29)$$

удовлетворяет уравнениям

$$\nabla N^0_\alpha+\omega^0_\alpha=N^0_{\alpha\beta}\,\omega^\beta. \qquad (3.30)$$

Так как квазитензоры 2-го порядка $\{\hat N^0_\alpha\}$ и $\{N^0_\alpha\}$ в общем сл чае линейно независимы, то эти квазитензоры в каждой N-плоскости (нормали I-го рода) порождают пучок оснащающих пл скостей в смысле Э.Картана. Этот пучок зададим пучком квази зоров 2-го порядка:

$$N^0_\alpha(\varrho)=\hat N^0_\alpha+\varrho(N^0_\alpha-\hat N^0_\alpha)=\hat N^0_\alpha+\varrho\hat n^0_\alpha, \qquad (3.31)$$

где $\hat n^0_\alpha=N^0_\alpha-\hat N^0_\alpha$ — тензор 2-го порядка. Отметим, что пучок (3.31) порождает пучок (3.26), определяющий в каждой характ ристике пучок ее нормалей 2-го рода в смысле Нордена.

Теорема 4. В дифференциальной окрестности 2-го

дка гиперполосы SH_m внутренним инвариантным образом присо-иняется однопараметрический пучок (3.31) ее нормализаций в ысле Э.Картана, который порождает (в свою очередь) однопа-метрический пучок нормализаций 2-го рода в смысле Нордена ля характеристик данной гиперполосы SH_m.

Библиографический список

1. Волкова С.Ю. $\mathcal{H}(\Lambda,L)$-распределения проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий гур: Межвуз. темат. сб. научн. тр. / Калинингр. ун-т. Калинград, 1991. Вып.22. С.23-25.

2. Попов Ю.И. Основы теории трехсоставных распредений проективного пространства. Монография. Изд-во С.-Петеррг. ун-та, 1992. 172 с.

3. Акивис М.А. О строении двухкомпонентных сопрянных систем // Труды геометрич. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. I. С.7-31.

4. Попов Ю.И. Общая теория регулярных гиперполос. ебное пособие. Калининград, Калинингр. ун-т, 1983. 82 с.

5. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связости // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М.,1971. Т.3. С.49-4.

6. Домбровский Р.Ф. О неголономных композици на поверхностях $M_{m,r}$ в P_n. Всес. научн. конф. по неевидовой геометрии: "150 лет геометрии Лобачевского". Тезисы жл. М., 1976. С.69.

ДК 514.75

СПЕЦИАЛЬНЫЕ КЛАССЫ КОНГРУЭНЦИЙ С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ В ЛИНИЮ ФОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

О.О.Гусева

(Калининградский государственный университет)

Рассмотрены инварианты, ассоциированные с поверхностью S, введенной в работе [1]. Получены условия совпадения оверхности (A_0) с поверхностью F_1. Изучены специальные

классы конгруэнций $\tilde{V}_1, \tilde{V}_1^\circ, \tilde{V}_2, \tilde{V}_2^\circ, \tilde{V}^\circ, \tilde{V}'$, для которых дана г
метрическая интерпретация всех инвариантов канонического ре
ра.

В работе [1] была исследована конгруэнция $\tilde{V}$ директри
Вильчинского $[A_0, A_3]$ с вырождающейся в линию фокальной повер
ностью (A_3). Рассмотрим образы, ассоциированные с поверхнос
(A_0) конгруэнции $\tilde{V}$. Используя систему уравнений Пфаффа по
рхности S , запишем выражения для фокусов лучей прямолиней
конгруэнций $[A_1A_2], [A_0A_3], [A_1A_3], [A_2A_3]$

$$R_1 = -\frac{1}{\lambda} A_1 + A_2, \tag{1}$$

$$R_2 = \frac{a_1}{b_1} A_1 + A_2, \tag{2}$$

$$\Phi_1 \equiv A_3, \tag{3}$$

$$\Phi_2 = -(\lambda a_1 + b_1) A_0 + A_3, \tag{4}$$

$$G_1 \equiv A_3, \tag{5}$$

$$G_2 = \frac{\mu}{\lambda} A_1 + A_3, \tag{6}$$

$$P_1 \equiv A_3 \tag{7}$$

$$P_2 = -\mu A_2 + A_3. \tag{8}$$

Рассмотрим единичные точки E_2, E_3, E_4 соответственно лучей $[A_0A_3], [A_1A_3]$ и $[A_2A_3]$:

$$E_2 = A_0 + A_3, \quad E_3 = A_1 + A_3, \quad E_4 = A_2 + A_3. \tag{9}$$

Учитывая равенства (1) – (9), нетрудно найти выражения слож
отношений:

$$(R_1R_2; A_1A_2) = -\frac{\lambda a_1}{b_1}, \tag{10}$$

$$(\Phi_2E_2; A_0A_3) = -\frac{1}{\lambda a_1 + b_1}, \tag{11}$$

$$(G_2E_3; A_1A_3) = \frac{\lambda}{\mu}, \tag{12}$$

$$(P_2E_4; A_2A_3) = -\frac{1}{\mu}. \tag{13}$$

Сложное отношение четырех точек является инвариантом
проективного пространства, т.е. рассмотрены инварианты, асс
циированные с поверхностью S . Выразим коэффициенты систем
уравнений Пфаффа поверхности S через полученные инварианты:

$$\mu = -\frac{1}{(P_2E_4; A_2A_3)}, \qquad \lambda = -\frac{(G_2E_3; A_1A_3)}{(P_2E_4; A_2A_3)},$$

$$b_1 = -\frac{1}{(\Phi_2E_2; A_0A_3)\,[1 - (R_1R_2; A_1A_2)]}, \tag{14}$$

$$a_1 = -\frac{(R_1R_2; A_1A_2)\cdot(P_2E_4; A_2A_3)}{(G_2E_3; A_1A_3)(\Phi_2E_2; A_0A_3)[1 - (R_1R_2; A_1A_2)]}.$$

Т е о р е м а 1. Если прямые Демулена поверхности (A_0) совпадают, то фокус R_2 совпадает с вершиной A_2 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прямые Демулена характеризуются условием

$$a_1 = 0. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (2), убеждаемся в справедливости данного утверждения.

Т е о р е м а 2. Если фокус Φ_2 луча $[A_0A_3]$ совпадает с вершиной A_3 и прямые поверхности (A_0) являются прямыми Демулена, то (A_0) является поверхностью $\mathfrak{F}_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в равенстве (4) $\Phi_2 \equiv A_3$, тогда справедливо равенство

$$\lambda a_1 + b_1 = 0. \tag{16}$$

Подставляя в (16) тождество (15), получим, что $b_1 = 0$. Таким образом, выполняется условие, характеризующее поверхность $\mathfrak{F}_1$:

$$b_1 \cdot b_2 = 0. \tag{17}$$

Т е о р е м а 3. Если фокусы Φ_2 и P_2 совпадают с вершиной A_3 , то поверхность (A_0) является поверхностью $\mathfrak{F}_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Phi_2 \equiv A_3$, тогда выполняется равенство (16). Если $P_2 \equiv A_3$, то в (8)

$$\mu = 0. \tag{18}$$

Из (18) и связи коэффициентов λ и μ получим, что $\lambda = 0$. Подставляя данное значение в тождество (16), приходим к соотношению (17). Теорема доказана.

Дадим геометрическую интерпретацию единичных точек E_2, E_3 и E_4 . Назовем конгруэнцией $\tilde{V}_1$ конгруэнцию $\tilde{V}$, для которой $\lambda_1 = -1, \ a_1 = -b_1$.

П р е д л о ж е н и е 1. Фокусы луча $[A_1A_2]$ конгруэнции $\tilde{V}_1$ гармонически делят точки A_1 и A_2 .

Назовем конгруэнцией $\tilde{V}_1^\circ$ конгруэнцию $\tilde{V}_1$, для которой выполняется условие $b_1 = \frac{1}{2}$.

П р е д л о ж е н и е 2. Единичная точка E_2 луча $[A_0A_3]$ конгруэнции $\tilde{V}_1^\circ$ является четвертой гармонической точкой с фокусом Φ_2 относительно точек A_0 и A_3 .

Нозовем конгруэнцией $\tilde{V}_2$ конгруэнцию $\tilde{V}$, для которой справедливо равенство $\mu = 1$.

П р е д л о ж е н и е 3. Единичная точка E_4 луча $[A_2 A$ конгруэнции $\widetilde{V}_2$ является четвертой гармонической точкой с фо кусом P_2 относительно точек A_2 и A_3 .

Назовем конгруэнцией $\widetilde{V}_2^{\circ}$ конгруэнцию $\widetilde{V}_2$, для которой $\lambda = -1$.

П р е д л о ж е н и е 4. Единичная точка E_3 луча $[A_1 A$ конгруэнции $\widetilde{V}_2^{\circ}$ является четвертой гармонической точкой с фо кусом G_2 относительно точек A_1 и A_3 .

Конгруэнцию $\widetilde{V}$, для которой справедливы соотношения $\lambda = -1,\ a_1 = -\frac{1}{2},\ b_1 = \frac{1}{2},\ \mu = 1$, назовем конгруэнцией $\widetilde{V}^{\circ}$.

Т е о р е м а 4. Для того, чтобы фокусы луча прямолиней ной конгруэнции $[A_1 A_2]$ гармонически делили точки A_1 и A_2 , а единичные точки E_2, E_3, E_4 были четвертыми гармоническими точками в соотношениях (II)-(I3), необходимо и достаточно, чтобы данная конгруэнция была конгруэнцией $\widetilde{V}^{\circ}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполняются следующи равенства:

$$\begin{cases} (R_1 R_2 ; A_1 A_2) = -1, & (G_2 E_3 ;\ A_1 A_3) = -1, \\ (\Phi_2 E_2 ; A_0 A_3) = -1, & (P_2 E_4 ;\ A_2 A_3) = -1 . \end{cases} \qquad (I9)$$

Учитывая (II)-(I3) и (I9), приходим к системе

$$\mu = 1, \quad \lambda = -1, \quad a_1 = -\frac{1}{2}, \quad b_1 = \frac{1}{2}, \qquad (20)$$

т.е. данная конгруэнция является конгруэнцией $\widetilde{V}^{\circ}$. Обратно, пусть дана конгруэнция $\widetilde{V}^{\circ}$, т.е. выполняется (20). Следовательно, имеет место система (I9). Теорема доказана.

Назовем конгруэнцию $\widetilde{V}$, для которой

$$a_1 = 1, \ b_1 = 1, \ \lambda = 1, \ \mu = 2, \qquad (2I)$$

конгруэнцией $\widetilde{V}'$.

Т е о р е м а 5. Прямолинейная конгруэнция $[A_1 A_2]$ явля ется гармонической, а прямолинейные конгруэнции $[A_0 A_3], [A_1 A_3]$ $[A_2 A_3]$ сопряжены поверхности (A_0) тогда и только тогда, ког данная конгруэнция является конгруэнцией $\widetilde{V}'$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Торсы прямолинейных конгр энций определяются следующими уравнениями:

$$a_1 (\omega^2)^2 + \omega^1 \omega^2 (b_1 - \lambda a_1) - \lambda b_1 (\omega^1)^2 = 0,$$

$$a_1 (\omega^2)^2 + \omega^1 \omega^2 (b_1 - \lambda a_1) - \lambda b_1 (\omega^1)^2 = 0,$$

$$b_1^2 (\omega^1)^2 + \omega^1 \omega^2 (2 a_1 b_1 - \mu b_1) + (a_1^2 - \mu a_1)(\omega^2)^2 = 0, \qquad (22)$$

$$(\lambda^2 b_1^2 - \mu b_1)(\omega^1)^2 + \omega^1 \omega^2 (2\lambda^2 a_1 b_1 - \mu a_1) + \lambda^2 a_1^2 (\omega^2)^2 = 0 .$$

Iусть каждое из уравнений системы (22) имеет вид

$$(\omega^2)^2 - (\omega^1)^2 = 0, \qquad (23)$$

тогда получим равенства (2I), т.е. данная конгруэнция являет- ся конгруэнцией $\widetilde{V}'$. Обратно, подставляя в систему (22) зна- чения коэффициентов из (2I), получаем, что торсы конгруэнции $\widetilde{V}'$ задаются уравнением (23). Они высекают на поверхности (A_0) сопряженную сеть линий.

Библиографический список

I. Г у с е в а О.О. Прямолинейные конгруэнции с вырождающейся в линию фокальной поверхностью // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, I993. Вып.24. С.46-48.

2. М а л а х о в с к и й В.С. Теория конгруэнций кривых и поверхностей второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Учебн. пособие. Калининград, I986. 72 с.

УДК 5I4.75

К ГЕОМЕТРИИ ПАРАБОЛ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Л.А.Ж а р и к о в а

(Калининградский технический институт)

В трехмерном аффинном пространстве изучаются геометрические свойства конгруэнции π парабол [I] и ассоциированных с ней геометрических образов. Найдено безынтегральное представление конгруэнции π .

I. Многообразие π рассматривается в частично-канонизированном репере $R = \{A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, где A – точка пересечения с параболой ее диаметра $\mathcal{D}_1$ – является характеристической точкой плоскости P образующего элемента конгруэнции π и асим-