ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.3 1973

Лапковский А.К., Лаптинский В.Н.

К ТЕОРИИ КАСАНИЯ ПЛОСКИХ ФИГУР В ОДНОРОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ.

В работе [I] А.Швец пришел к необходимости исследования вопроса о касании двух однопараметрических семейств подалгебр Ли. Он нашел условия касания первого и второго порядков для двух семейств подалгебр специального вида. В данной работе решается задача А.Швеца при более общих предположениях.

Пусть G линейная группа Ли, содержащая связную замкнутую подгруппу H, совпадающую со своим нормализатором, а $\underline{G}$ и $\underline{H}$ – соответствующие подалгебры Ли.

Пусть дана кривая в однородном пространстве G/H, т.е. отображение

$$\varphi: (-1,1) \longrightarrow G/H$$

Это отображение можно определить его лифтом, т.е. отображением $f: (-1,1) \longrightarrow G/H$ такими, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} (-1,1) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ & G/H \end{tikzcd}$$

коммутативна, здесь π, как обычно, естественная проекция.

I[0]. Рассмотрим две однопараметрические системы подалгебр вида:

$$\text{1) } \underline{H}(t) = Ad(g(t))\underline{H}, \quad g(t) = f^{-1}(0)f(t), \quad t \in (-1,1)$$

$$\text{2) } \underline{H}_\gamma(t) = Ad(\gamma(t))\underline{H}(t),$$

где $\gamma(t) = \exp F(t)$, ($t \in (-1,1)$, $F(t) \in \underline{G}$) -есть некоторая кривая в G.

В настоящей работе изучается касание различных порядков систем подалгебр $\underline{H}(t)$ и $\underline{H}_\gamma(t)$ при произвольно фиксированном значении $t=t_0$, $t \in (-1,1)$. Случай $t_0 = 0$, $\left(\frac{d}{dt}F(t)\right)_{t=0} = 0$ рассмотрел в [I] Švec A и применил к исследованию линий в однородном пространстве. Касание нулевого порядка систем $\underline{H}(t)$ и $\underline{H}_\gamma(t)$ при t_0 означает, что

$$\underline{H}(t_0) = \underline{H}_\gamma(t_0). \tag{1}$$

В силу наших предположений равенство (I) эквивалентно условию:

$$F(t_0) \in \underline{H}(t_0). \tag{2}$$

В дальнейшем исследовании будем предполагать, что выполняется

$$\dot{F}(t_0) = \left(\frac{d}{dt}F(t)\right)_{t=t_0} \in \underline{H}(t_0). \tag{3}$$

Для изучения касания более высоких порядков введем фиксированный базис в $\underline{H}$:

$$B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \quad n = \dim \underline{H}.$$

Используя естественные обозначения

$$Ad(g(t))B = \{Ad(g(t))u_1, \dots\}, \ [v,B] = \{[v,u_1], \dots\},$$

имеем соответственно базисы в $\underline{H}(t)$, $\underline{H}_\gamma(t)$:

$$B(t)=Ad(g(t))B\,,\quad B_\gamma(t)=Ad(\gamma(t))B(t).$$

Ясно, что если $g(t)$, $\gamma(t)$ достаточное число раз дифференцируемы, то $B(t)$, $B_\gamma(t)$ также обладают этим свойством.

Наличие для систем $\underline{H}(t)$, $\underline{H}_\gamma(t)$ при $t=t_0$ касания нулевого, первого, второго порядка эквивалентно, см.[I, стр.155], существованию матриц $S(t)\in G\mathcal{L}(n)$, удовлетворяющих соответственно соотношениям:

$$B(t_0)\cdot S(t_0)=B_\gamma(t_0), \tag{4}$$

$$\left(\frac{d}{dt}B(t)\,S(t)\right)_{t=t_0}=\left(\frac{d}{dt}B_\gamma(t)\right)_{t=t_0}, \tag{5}$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}B(t)\,S(t)\right)_{t=t_0}=\left(\frac{d^2}{dt^2}B_\gamma(t)\right)_{t=t_0}. \tag{6}$$

Соотношение (4) приводится к виду

$$B(t_0)\left(\frac{d}{dt}S(t)\right)_{t=t_0}=Ad(\exp F(t_0))\{[\varphi(t_0),B(t_0)]+$$
$$+[A(t_0)-Ad(\exp(-F(t_0)))A(t_0),B(t_0)]\}. \tag{7}$$

Здесь

$$A(t_0)=\left(\frac{d}{dt}g(t)\right)_{t=t_0}\cdot g^{-1}(t_0)\,,\quad \varphi(t_0)=\exp(-F(t_0))\left(\frac{d}{dt}\exp F(t)\right)_{t=t_0}.$$

Равенство (7) эквивалентно условию:

$$(\forall v\in H(t_0))\quad \{Ad(\exp F(t_0))([\varphi(t_0),v]+[A(t_0)-Ad(\exp(-F(t_0)))A(t_0),v])\in$$
$$\in\underline{H}(t_0)\} \tag{8}$$

Представив $\varphi(t_0)$ в виде ряда (см.[2, стр.112]):

$$\varphi(t_0)=\dot F(t_0)+\frac{1}{2!}[\dot F(t_0),F(t_0)]+\frac{1}{3!}[[\dot F(t_0),F(t_0)]F(t_0)]+\dots\,, \tag{9}$$

легко видеть, в силу (3,4), что

$$\varphi(t_0)\in H(t_0). \tag{10}$$

Таким образом, в силу (10) условие (8) эквивалентно следующему

$$\forall v\in\underline{H}(t_0)\quad \{[A(t_0)-Ad(\exp(-F(t_0)))A(t_0),v]\in\underline{H}(t_0)\}. \tag{11}$$

Обратно, наличие условия (II) обеспечивает, см.[I, стр.157], существование равенства (7), а значит и (5).

Но условие (II) эквивалентно тому, что элементы вида $\gamma(t_0)=\exp(F(t_0))$ принадлежат, см.[I, стр.148] подгруппе $K(A(t_0))$ с алгеброй $\underline{K}(A(t_0))$ вида

$$\underline{K}(A(t_0))=\{v\mid v\in\underline{H}(t_0),\ [v,A(t_0)\in\underline{H}(t_0)\}.$$

Итак, имеет место следующая

Т е о р е м а 1. Для касания первого порядка при $t=t_0$ систем подалгебр $\underline{H}(t)$, $\underline{H}_\gamma(t)$, где для $\gamma(t)$ выполнено (3), необходимо и достаточно, чтобы $F(t_0)\in K(A(t_0))$.

З а м е ч а н и е. При получении достаточных условий касания первого порядка условие (3) можно заменить некоторым ограничением на норму матриц $F(t_0)$. Действительно, из условия

$$(\forall v\in\underline{H}(t_0))\quad \{[\varphi(t_0),v]\in\underline{H}(t_0)\} \tag{12}$$

следует, что

$$\varphi(t_0)\in\underline{H}(t_0). \tag{13}$$

Обращая ряд (9), см. 2, стр.114, получим:

$$\dot F(t_0)=\varphi(t_0)+b_1[\varphi(t_0),F(t_0)]+b_2[[\varphi(t_0),F(t_0)]F(t_0)]+\dots \qquad (14)$$

Здесь коэффициенты b_n $(n=1,2,\dots)$ определяются через числа Бернулли B_n: $b_n=\frac{1}{n!}B_n$.

Сходимость ряда (14) обеспечена для матриц $F(t_0)$, не превышающих по норме некоторого числа $\varepsilon>0$. Тогда для этих $F(t_0)$ имеем (3).

2°. Рассмотрим касание второго порядка.

Соотношение (6) после соответствующих вычислений приводится к виду:

$$B(t_0)\left(\frac{d^2}{dt^2}S(t)\right)_{t=t_0}=Ad(\exp(-F(t_0)))\{[\varphi(t_0),[\varphi(t_0),B(t_0)]]+$$
$$+[\dot\varphi(t_0),B(t_0)]+[\dot A(t_0)-Ad(\exp(-F(t_0)))\dot A(t_0),B(t_0)]+$$
$$+2[\varphi(t_0),[A(t_0),B(t_0)]]+[A(t_0)-Ad(\exp(-F(t_0)))A(t_0),[A(t_0),B(t_0)]]-$$
$$-[Ad(\exp(-F(t_0)))A(t_0),[A(t_0)-Ad(\exp(-F(t_0)))A(t_0),B(t_0)]]\}, \qquad (15)$$

где

$$\dot A(t_0)=\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)_{t=t_0}, \quad \dot\varphi(t_0)=\left(\frac{d}{dt}\varphi(t)\right)_{t=t_0}.$$

Так как подгруппа $H(t_0)$ совпадает со своим нормализатором, то из (14) следует

$$(\forall v\in\underline{H}(t_0))\ \{([\dot A(t_0)-Ad(\exp(-F(t_0)))\dot A(t_0),v]+[\dot\varphi(t_0),v]+$$
$$+[A(t_0)-Ad(\exp(-F(t_0)))A(t_0),[A(t_0),v]]+2[\dot\varphi(t_0),[A(t_0),v]]-$$

$$-[Ad(\exp(-F(t_0)))A(t_0),[A(t_0)-Ad(\exp(-F(t_0)))A(t_0),v]]+$$
$$+[\varphi(t_0),[\varphi(t_0),v])\in\underline{H}(t_0)\}. \qquad (16)$$

Обратно, в силу того же условия на подгруппу $\underline{H}(t_0)$ из (16) следует, см. [1, стр.157], справедливость (15), а значит и (6). Но для выполнения условия (16) достаточно, чтобы выполнялись условия (17, 18, 19):

$$(\forall v\in\underline{H}(t_0))\ \{[A(t_0)-Ad(\exp(-F(t_0)))\dot A(t_0),v]+$$
$$+[A(t_0)-Ad(\exp(-F(t_0)))A(t_0)[A(t_0),v]- \qquad (17)$$
$$-[Ad(\exp(-F(t_0)))A(t_0)[A(t_0)-Ad(\exp(-F(t_0)))A(t_0),v]]\in\underline{H}(t_0)\},$$

$$(\forall v\in\underline{H}(t_0))\ \{(2[\varphi(t_0)[A(t_0),v]]+[\varphi(t_0)[\varphi(t_0),v]])\in\underline{H}(t_0)\}, \qquad (18)$$

$$\forall v\in\underline{H}(t_0)\ \{[\dot\varphi(t_0),v]\in\underline{H}(t_0)\}. \qquad (19)$$

Условие (17) эквивалентно тому, что $\exp F(t_0)$ принадлежит, см. [1, стр.148], подгруппе $K(A(t_0),\dot A(t_0))$ с алгеброй $\underline{K}(A(t_0),\dot A(t_0))$ вида:

$$\underline{K}(A(t_0),\dot A(t_0))=\{v\in K(A(t_0));[\dot A(t_0),v]-[\dot A(t_0)[\dot A(t_0),v]]\in\underline{H}(t_0)\}.$$

Для выполнения условия (18) достаточно потребовать, чтобы $\dot F(t_0)\in K(A(t_0))$, а подалгебра $\underline{K}(A(t_0))$ была идеалом в $\underline{H}(t_0)$. Действительно, тогда $\varphi(t_0)\in\underline{K}(A(t_0))$ и из тождества Якоби

$$[\varphi(t_0),[A(t_0),v]]+[v,[\varphi(t_0),A(t_0)]]+[A(t_0),[v,\varphi(t_0)]]=0$$

следует,что

$$[\varphi(t_0), [A(t_0), v]] \in \underline{H}(t_0).$$

Для изучения (18) воспользуемся, см. [3, стр. 43], интегральным представлением $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \int_0^1 \exp(-\mu F(t)) F(t) \exp(\mu F(t))\, d\mu. \qquad (20)$$

Дифференцируя (20) при $t = t_0$, получим, используя [4]:

$$\dot{\varphi}(t_0) = \int_0^1 \exp(-\mu F(t_0)) \ddot{F}(t_0) \exp(\mu F(t))\, d\mu +$$

$$+ \int_0^1 \exp(-\mu F(t_0)) [F(t_0), g(t_0, \mu)] \exp(\mu F(t_0))\, d\mu.$$

Здесь

$$\ddot{F}(t_0) = \left(\frac{d^2}{dt^2} F(t)\right)_{t=t_0}, \quad g(t_0, \mu) = \int_0^\mu \exp(\rho F(t_0)) \dot{F}(t_0) \exp(-\rho F(t_0))\, d\rho.$$

Для значений параметра $\mu: 0 \leq \mu \leq 1$, очевидно,

$$g(t_0, \mu) \in \underline{H}(t_0).$$

Отсюда

$$\ddot{F}(t_0) \in \underline{H}(t_0) \Rightarrow \dot{\varphi}(t_0) \in \underline{H}(t_0).$$

Итак, имеет место

Т е о р е м а 2. Для касания второго порядка при $t = t_0$ систем подалгебр $\underline{H}(t)$, $\underline{H}_\gamma(t)$ достаточно, чтобы

1) подалгебра $\underline{K}(A(t_0))$ была идеалом в $\underline{H}(t_0)$,

2) $F(t_0) \in \underline{K}(A(t_0)) \dot{A}(t_0)$,

3) $\dot{F}(t_0) \in \underline{K}(A(t_0))$, $\ddot{F}(t_0) \in \underline{H}(t_0)$.

Л и т е р а т у р а

1. A. Švec, Matematicky časopis 17 (1967), №2.

2. Чеботарев Н.Г., Теория групп Ли. М.Л., 1940.

3. H. Freudenthal. Linear Lie Groups. Acad. New-York, 1962.

4. Лаптинский В.Н., ДАН БССР, 14, №12, 1970.