УДК 514.75

Г. Матиева
(Ошский государственный университет)

О ПЛОСКИХ СЕТЯХ *n*-МЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

В области n-мерного евклидова пространства E_n рассматриваются p-мерное распределение Δ_p и ортогонально дополнительное к нему $(n-p)$-мерное распределение $\overline{\Delta}_{n-p}$. С помощью этих распределений определены плоские сети, доказаны необходимые и достаточные условия их совпадения.

1. Пусть n-мерное евклидово пространство E_n отнесено к подвижному реперу $\Re=(X,\vec{e}_A)$, где $X\in\Omega$, $|\vec{e}_A|=1$ $(A,B,C=1,2,...,n)$. Деривационные формулы репера $\Re$ имеют вид:

$$d\vec{X}=\omega^A\vec{e}_A,\ \ d\vec{e}_A=\omega_A^B\vec{e}_B. \qquad (1)$$

Формы ω^A, ω_A^B удовлетворяют уравнениям инвариантности метрики

$$dg_{AB}=g_{AC}\omega_B^C+g_{CB}\omega_A^C,$$

где $g_{AB}=\vec{e}_A\cdot\vec{e}_B$ – ковариантные компоненты метрического тензора пространства E_n, и структурным уравнениям

$$D\omega^A=\omega^B\wedge\omega_B^A,\ D\omega_A^B=\omega_A^C\wedge\omega_C^B.$$

Рассмотрим в области $\Omega\subset E_n$ распределение Δ_p $(1\le p\le n-1)$ и ортогонально дополнительное к нему распределение $\overline{\Delta}_{n-p}$. Векторы $\vec{e}_i$ $(i, j, k = 1,2,...,p)$ репера $\Re$ расположим в подпространстве $\Delta_p(X)$, а $\vec{e}_\alpha$ $(\alpha, \beta, \gamma = p+1,..., n)$ – в подпространстве $\overline{\Delta}_{n-p}(X)$. При этом дифференциальные уравнения распределения Δ_p будут:

$$\omega_i^\alpha = \Lambda_{iA}^\alpha \omega^A, \tag{2}$$

а так как $\vec{e}_\alpha \in \overline{\Delta}_{n-p}(X)$, имеем $\omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha A}^i \omega^A$. Дифференцируя тождество $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_\alpha = 0$, получим

$$\omega_i^\beta g_{\beta\alpha} + g_{ij}\omega_\alpha^j = 0.$$

Отсюда имеем

$$\omega_\alpha^i = -g^{ik}\omega_k^\beta g_{\beta\alpha}, \; \omega_i^\alpha = -g_{ij}\omega_\beta^j g^{\beta\alpha}.$$

Продолжив систему уравнений (2), получим

$$d\Lambda_{ij}^\alpha - \Lambda_{ik}^\alpha \omega_j^k - \Lambda_{kj}^\alpha \omega_i^k + \Lambda_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha = \Lambda_{ijA}^\alpha \omega^A,$$

$$d\Lambda_{i\beta}^\alpha - \Lambda_{i\gamma}^\alpha \omega_\beta^\gamma - \Lambda_{k\beta}^\alpha \omega_i^k + \Lambda_{i\beta}^\gamma \omega_\gamma^\alpha = \Lambda_{i\beta A}^\alpha \omega^A.$$

Система величин $\{\Lambda_{ij}^\alpha, \; \Lambda_{i\beta}^\alpha\}$ образует геометрический объект – фундаментальный объект первого порядка распределения Δ_p [1]. При этом компоненты $\Lambda_{ij}^\alpha, \; \Lambda_{i\beta}^\alpha$ образуют тензоры в отдельности.

2. Пусть распределение Δ_p несет ортогональную p-ткань, а распределение $\overline{\Delta}_{n-p}$ – ортогональную $(n-p)$-ткань [2]. В пространстве E_n получим ортогональную сеть Σ_n. Единичные векторы $\vec{e}_A$ подвижного репера $\Re$ направим по касательным к линиям полученной в точке X сети. При этом имеем

$$\omega_A^B = a_{AC}^B \omega^C, \tag{3}$$

$$a_{iC}^\alpha = \Lambda_{iC}^\alpha, \qquad a_{AC}^B = -a_{BC}^A,$$

т. е. формы ω_A^B $(A \neq B)$ – главные [3].

Рассмотрим вектор

$$\vec{M} = m^A \vec{e}_A\,, \qquad (4)$$

не принадлежащий распределениям Δ_p, $\overline{\Delta}_{n-p}$. Дифференцируя равенство (4), применяя (1), (3) и учитывая, что $dm^A = m_B^A \omega^B$, получим:

$$d\vec{M} = (\delta_A^B + m_A^B + m^C a_{CA}^B)\omega^A \vec{e}_B.$$

Введем обозначения:

$$\vec{a}_A = (\delta_A^B + m_A^B + m^C a_{CA}^B)\vec{e}_B\,, \qquad (5)$$

$$\mu_A^B = \delta_A^B + m_A^B + m^C a_{CA}^B\,. \qquad (6)$$

Тогда имеем $d\vec{M} = \omega^A \vec{a}_A$, $\vec{a}_A = \mu_A^B \vec{e}_B$ или $d\vec{M} = \omega^i \vec{a}_i + \omega^\alpha \vec{a}_\alpha$,

$$\vec{a}_i = \mu_i^k \vec{e}_k + \mu_i^\alpha \vec{e}_\alpha\,, \qquad (7)$$

$$\vec{a}_\alpha = \mu_\alpha^k \vec{e}_k + \mu_\alpha^\gamma \vec{e}_\gamma\,. \qquad (8)$$

Матрица $\left(\mu_A^B\right)$ определяет линейный оператор $\mathcal{A}$ пространства E_n. Она имеет следующий вид: $\begin{pmatrix} \mu_i^k & \mu_\alpha^k \\ \mu_i^\gamma & \mu_\alpha^\gamma \end{pmatrix}$, где $\left(\mu_i^k\right)$ – квадратная матрица порядка *p*, $\left(\mu_\alpha^\gamma\right)$ – квадратная матрица порядка *(n-p)*, $\left(\mu_i^\gamma\right)$ – прямоугольная матрица порядка $(n-p)\times p$, $\left(\mu_\alpha^k\right)$ – прямоугольная матрица порядка $p\times(n-p)$. С помощью этих матриц определяются следующие линейные отображения:

$$f_1:\ \Delta_p(X) \to \Delta_p(X):\ \vec{x} = x^i \vec{e}_i \mapsto \mu_i^k x^i \vec{e}_k\,;$$

$$f_2:\ \Delta_p(X) \to \Delta_p(X):\ x^i \vec{e}_i \mapsto \mu_\alpha^k \mu_i^\alpha x^i \vec{e}_k\,;$$

$$g_1: \overline{\Delta}_{n-p}(X) \to \overline{\Delta}_{n-p}(X):\ \vec{y} = y^\alpha \vec{e}_\alpha \mapsto \mu_\alpha^\beta y^\alpha \vec{e}_\beta;$$

$$g_2 : \overline{\Delta}_{n-p}(X) \to \overline{\Delta}_{n-p}(X):\ y^{\alpha}\vec{e}_{\alpha} \mapsto \mu_i^{\alpha}\mu_{\beta}^{i}y^{\beta}\vec{e}_{\alpha};$$

$$h_1 : \Delta_p(X) \to \overline{\Delta}_{n-p}(X):\ x^i\vec{e}_i \mapsto \mu_i^{\alpha}x^i\vec{e}_{\alpha};$$

$$h_2 : \Delta_p(X) \to \overline{\Delta}_{n-p}(X):\ x^i\vec{e}_i \mapsto \mu_k^{\alpha}\mu_i^{k}x^i\vec{e}_{\alpha};$$

$$\phi_1 : \overline{\Delta}_{n-p}(X) \to \Delta_p(X):\ y^{\alpha}\vec{e}_{\alpha} \mapsto \mu_{\alpha}^{k}y^{\alpha}\vec{e}_k;$$

$$\phi_2 : \overline{\Delta}_{n-p}(X) \to \Delta_p(X):\ y^{\alpha}\vec{e}_{\alpha} \mapsto \mu_{\alpha}^{i}\mu_i^{k}y^{\alpha}\vec{e}_k.$$

Легко видеть, что

$$f_2 = \phi_1 \circ h_1,\quad g_2 = h_1 \circ \phi_1,\quad h_2 = h_1 \circ f_1,\quad \phi_2 = \phi_1 \circ g_1.$$

3. Мы имеем аффинор μ_i^k в подпространстве $\Delta_p(X)$, аффинор μ_{α}^{γ} в подпространстве $\overline{\Delta}_{n-p}(X)$. Пусть векторы $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_p$ имеют собственные направления относительно аффинора μ_i^k, а векторы $\vec{e}_{p+1},\ldots,\vec{e}_n$ - относительно аффинора μ_{α}^{γ}. Отсюда имеем

$$\mu_i^k = 0 \quad (i \neq k), \tag{9}$$

$$\mu_{\alpha}^{\gamma} = 0 \quad (\gamma \neq \alpha). \tag{10}$$

Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i, \vec{e}_{\alpha}$ определяют сеть в области $\Omega \subset E_n$. Обозначим ее через $\tilde{\Sigma}_n$. Аналитическими условиями, характеризующими сеть $\tilde{\Sigma}_n$, являются соотношения (9), (10). Найдем их геометрический смысл. Введем обозначения:

$$\vec{p}_i = \text{пр}_{\Delta_p(X)}\vec{a}_i = \mu_i^k\vec{e}_k,\quad \vec{q}_i = \text{пр}_{\overline{\Delta}_{n-p}(X)}\vec{a}_i = \mu_i^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}.$$

Тогда $\vec{a}_i = \vec{p}_i + \vec{q}_i$. Аналогично имеем $\vec{a}_{\alpha} = \vec{p}_{\alpha} + \vec{q}_{\alpha}$, где

$$\vec{p}_{\alpha} = \text{пр}_{\Delta_p(X)}a_{\alpha} = \mu_{\alpha}^k\vec{e}_k,\quad \vec{q}_{\alpha} = \text{пр}_{\overline{\Delta}_{n-p}(X)}\vec{a}_{\alpha} = \mu_{\alpha}^{\gamma}\vec{e}_{\gamma}.$$

Если имеет место равенство (9), то векторы $\vec{p}_i$ и $\vec{e}_i$ коллинеарны. Верно и обратное утверждение. Следовательно, (9) $\Leftrightarrow \vec{p}_i \,//\, \vec{e}_i$. Аналогично (10) $\Leftrightarrow \vec{q}_\alpha \,//\, \vec{e}_\alpha$.

4. В подпространстве $\Delta_p(X)$ имеем другой аффинор $\mu^k_\alpha \mu^\alpha_i$, а в подпространстве $\overline{\Delta}_{n-p}(X)$ – аффинор $\mu^\beta_i \mu^i_\alpha$. Пусть векторы $\vec{e}_i$ репера $\Re$ имеют собственные направления относительно аффинора $\mu^k_\alpha \mu^\alpha_i$, а векторы $\vec{e}_\alpha$ -относительно аффинора $\mu^\beta_i \mu^i_\alpha$. Тогда имеем:

$$\mu^k_\alpha \mu^\alpha_i = 0 \quad (i \neq k), \tag{11}$$

$$\mu^\beta_i \mu^i_\alpha = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \tag{12}$$

В области $\Omega \subset E_n$ получим еще одну сеть. Ее обозначим через $\overset{*}{\sum}_n$. Аналитическими условиями, характеризующими сеть $\overset{*}{\sum}_n$, являются соотношения (11), (12). Выясним их геометрический смысл.

Найдем образ вектора $\vec{e}_\alpha$ в линейном отображением $h_1 \circ \phi_1 = g_2$ и обозначим его через $\vec{Q}_\alpha$:

$$\vec{Q}_\alpha = g_2(\vec{e}_\alpha) = (h_1 \circ \phi_1)(\vec{e}_\alpha) = \mu^\beta_i \mu^i_\alpha \vec{e}_\beta .$$

Через $\vec{P}_i$ обозначим образ вектора $\vec{e}_i$ в линейном отображении $f_2 = \phi_1 \circ h_1$:

$$\vec{P}_i = f_2(\vec{e}_i) = \mu^k_\alpha \mu^\alpha_i \vec{e}_k .$$

Легко видеть, что

$$(11) \Leftrightarrow \vec{P}_i \,//\, \vec{e}_i, \ (12) \Leftrightarrow \vec{Q}_\alpha \,//\, \vec{e}_\alpha .$$

Равенства (11), (12) можно истолковать и по-другому:

$$(11) \Leftrightarrow \phi_1(\vec{q}_i) \,//\, \vec{e}_i, \ (12) \Leftrightarrow h_1(\vec{p}_\alpha) \,//\, \vec{e}_\alpha,$$

так как $\vec{P}_i = \phi_1(\vec{q}_i)$, $\vec{Q}_\alpha = h_1(\vec{p}_\alpha)$.

Естественно возникает вопрос: когда сеть $\tilde{\Sigma}_n$ и сеть $\overset{*}{\Sigma}_n$ совпадают? Пусть $\tilde{\Sigma}_n = \overset{*}{\Sigma}_n$. Тогда векторы $\vec{P}_i$, $\vec{p}_i$ коллинеарны и $\vec{Q}_\alpha, \vec{q}_\alpha$ коллинеарны, т. е.

$$\mu_\alpha^k \mu_i^\alpha = \lambda \mu_i^k, \quad \mu_i^\beta \mu_\alpha^i = \tau \mu_\alpha^\beta. \qquad (\lambda, \tau \in IR).$$

Отсюда имеем:

$$f_2(\vec{e}_i) = \lambda f_1(\vec{e}_i); \quad g_2(\vec{e}_\alpha) = \tau g_1(\vec{e}_\alpha) \qquad (13)$$

Обратно, если выполнены условия (13), то сети $\tilde{\Sigma}_n$ и $\overset{*}{\Sigma}_n$ совпадают. Таким образом, доказана

Теорема. *Сети $\tilde{\Sigma}_n$ и $\overset{*}{\Sigma}_n$ совпадают тогда и только тогда, когда выполнены условия (13).*

Список литературы

1. *Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.* О распределениях m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности I // Тр. геом. семинарара. М., 1971. Т. 3. С. 49 – 94.
2. *Шуликовский В.И.* Классическая дифференциальная геометрия. М., 1963.
3. *Базылев В.Т.* К геометрии плоских многомерных сетей // Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та. М., 1965. Т. 243. С. 29 – 37.

G. Matieva

ABOUT FLAT WEBS
OF n-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

In area of n-dimensional Euclidean space E_n is considered p-distribution Δ_p and the orthogonal additional to it (n-p)-distribution $\overline{\Delta}_{n-p}$. With the help of these distributions the flat webs are defined, there are proved the necessary and sufficient conditions of their coincidence.