6. Попов Ю.И., Введение инвариантного оснащения на регулярной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства, (Уч. зап. МГЗПИ), вып. 30, 1971, с. 286-296.

7. Васильян М.А., Об инвариантном оснащении гиперполосы Γ_{n-2}. (Доклады Академии Наук АССР), т. 40, №2, 1970.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 3 1973

ТКАЧ Г.П.

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ АФФИННО РАССЛОЯЕМЫХ ПАР КОНГРУЭНЦИЙ ФИГУР В ТРЕХМЕРНОМ ЭКВИАФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

По аналогии с расслоением пар конгруэнций фигур в проективном [1] и центроаффинном [2] пространствах вводится понятие односторонне аффинно расслояемых и расслояемых пар конгруэнций фигур в эквиаффинном пространстве A_3.

§1. Канонический репер пары T.

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются пары T конгруэнций фигур F_1 и F_2, где F_1 - парабола, а $F_2 \equiv B$ - точка, не инцидентная плоскости параболы. Из рассмотрения исключается случай, когда касательная плоскость α_B к поверхности (B) касается параболы F_1 или параллельна плоскости параболы. Обозначим буквами m - линию пересечения плоскости α_B с плоскостью параболы, ℓ' - касательную к параболе, параллельную прямой m, A - точку касания прямой ℓ' с параболой, M_0 - точку пересечения прямой m диаметра параболы, проходящего через A, ℓ - прямую BM_0.

Отнесем пару T к реперу $\overset{1}{R}_T = \{A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $\bar{e}_1 = \overline{AM}_0$, $\bar{e}_3 = \overline{AB}$, $\bar{e}_2$ направлен по прямой ℓ'.

Деривационные формулы репера R_T имеют вид:

$$d\bar{A} = \omega^\alpha \bar{e}_\alpha, \quad d\bar{e}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \bar{e}_\beta, \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3) \tag{1.1}$$

где формы Пфаффа ω^α, ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры:

$$\mathcal{D}\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha, \qquad \mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{1.2}$$

и соотношению

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0, \tag{1.3}$$

вытекающему из условия

$$(\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3) = 1, \tag{1.4}$$

характеризующего эквиаффинную группу преобразований.

Уравнения параболы относительно репера R_T примут вид:

$$(x^2)^2 - 2px^1 = 0, \quad x^3 = 0 \tag{1.5}$$

Исключая случай параллельности прямой AB касательной плоскости к поверхности $(\overset{\circ}{A})$, примем формы Пфаффа ω^1, ω^2 за независимые. Система пфаффовых уравнений пары T примет вид:

$$\omega^3 = \Gamma_k^3 \omega^k, \quad \omega_i^3 = \Gamma_{ik}^3 \omega^k, \quad \omega_3^i = \Gamma_{3k}^i \omega^k, \quad \omega_i^j = \Gamma_{ik}^j \omega^k,$$
$$d\ln p - \omega_1^1 + 2\omega_2^2 = p_k \omega^k, \quad \omega^1 + \omega^3 + \omega_3^1 - \omega_1^1 - \omega_2^2 = 0, \quad (i,j,k = 1,2) \tag{1.6}$$

Здесь и в дальнейшем $i \neq j$ и по индексам i, j суммирование не производится.

Обозначим:

$$\vartheta = \omega^1 + \omega^3 + \omega_1^1 + \omega_1^3, \quad \Omega = \omega_2^1 + \omega_2^3. \tag{1.7}$$

Замыкая систему (I.6), находим:

$$\Delta\Gamma_k^3 \wedge \omega^k = 0, \quad \Delta\Gamma_{ik}^3 \wedge \omega^k = 0, \quad \Delta\Gamma_{3k}^i \wedge \omega^k = 0, \quad \Delta\Gamma_{jk}^i \wedge \omega^k = 0,$$
$$\Delta\Gamma_{ik}^1 \wedge \omega^k = 0, \quad \Delta p_k \wedge \omega^k = 0, \quad (\omega^1 + \omega_3^1) \wedge \vartheta + (\omega^2 + \omega_3^2) \wedge \Omega = 0, \tag{1.8}$$

где

$$\Delta\Gamma_i^3 = d\Gamma_i^3 + \Gamma_i^3 (B^* - 2\Gamma_{ij}^i - \Gamma_{jj}^j)\omega^j + \Gamma_{ij}^3 \omega^j,$$
$$\Delta\Gamma_{ii}^3 = d\Gamma_{ii}^3 + \Gamma_{ii}^3 (B^* - 3\Gamma_{ij}^i - \Gamma_{jj}^j)\omega^j + \Gamma_{ii}^j \Gamma_{jj}^3 \omega^j,$$
$$\Delta\Gamma_{ji}^3 = d\Gamma_{ji}^3 + \Gamma_{ji}^3 [B^* - 2(\Gamma_{ij}^i + \Gamma_{jj}^j)]\omega^j + \Gamma_{ji}^i \Gamma_{ij}^3 \omega^j,$$
$$\Delta\Gamma_{3i}^i = d\Gamma_{3i}^i + \Gamma_{3i}^i (B^* - \Gamma_{ij}^i - \Gamma_{jj}^j)\omega^j + \Gamma_{3i}^j \Gamma_{jj}^i \omega^j,$$
$$\Delta\Gamma_{3i}^j = d\Gamma_{3i}^j + \Gamma_{3i}^j (B^* + 2\Gamma_{jj}^j)\omega^j + \Gamma_{3i}^i \Gamma_{ij}^j \omega^j,$$
$$\Delta\Gamma_{ji}^i = d\Gamma_{ji}^i + \Gamma_{ji}^i (B^* - \Gamma_{jj}^j)\omega^j + \Gamma_{ji}^3 \Gamma_{3j}^i \omega^j,$$
$$\Delta\Gamma_{ii}^j = d\Gamma_{ii}^j + \Gamma_{ii}^j (B^* - 2\Gamma_{ij}^i + \Gamma_{jj}^j)\omega^j + \Gamma_{ii}^3 \Gamma_{3j}^j \omega^j,$$
$$\Delta\Gamma_{1i}^1 = d\Gamma_{1i}^1 + \Gamma_{1i}^1 (B^* - \Gamma_{ij}^i)\omega^j + (\Gamma_{1i}^2 \Gamma_{2j}^1 + \Gamma_{1i}^3 \Gamma_{3j}^1)\omega^j,$$
$$\Delta p_i = dp_i + p_i (B^* - \Gamma_{ij}^i)\omega^j + (\Gamma_{3i}^1 \Gamma_{1j}^3 - 2\Gamma_{3i}^2 \Gamma_{2j}^3 + 3\Gamma_{2i}^1 \Gamma_{1j}^2)\omega^j,$$
$$B^* = \Gamma_{ji}^i - \Gamma_i^3 \Gamma_{3j}^i + \Gamma_j^3 \Gamma_{3i}^i.$$

Из (I.6) и (I.8) непосредственно следует, что пары T существуют и определяются с произволом восьми функций двух аргументов.

§ 2. Основные геометрические образы, ассоциированные с парой T.

1. Прямолинейная конгруэнция $(A\bar{e}_i)$.

Фокусы

$$\bar{F}_i = \bar{A} + \lambda_i \bar{e}_i \tag{2.1}$$

и торсы прямолинейной конгруэнции $(A\bar{e}_i)$ определяются соответственно уравнениями:

$$\lambda_i^2 (\Gamma^j_{ii}\Gamma^3_{ij} - \Gamma^j_{ij}\Gamma^3_{ii}) + \lambda_i (\Gamma^j_{ii}\Gamma^3_j - \Gamma^j_{ij}\Gamma^3_i - \Gamma^3_{ii}) - \Gamma^3_i = 0, \tag{2.2}$$

$$\omega^j \omega^3_i - \omega^3 \omega^j_i = 0. \tag{2.3}$$

2. Прямолинейная конгруэнция $(A\bar{e}_3)$.

Фокусы

$$\bar{F}_3 = \bar{A} + \lambda_3 \bar{e}_3 \tag{2.4}$$

и торсы прямолинейной конгруэнции $(A\bar{e}_3)$ определяются соответственно уравнениями:

$$\lambda_3^2 (\Gamma^1_{31}\Gamma^2_{32} - \Gamma^1_{32}\Gamma^2_{31}) + \lambda_3 (\Gamma^1_{31} + \Gamma^2_{32}) + 1, \tag{2.5}$$

$$\omega^1 \omega^2_3 - \omega^2 \omega^1_3 = 0. \tag{2.6}$$

3. Прямолинейная конгруэнция $(B\,\bar{e}_1 - \bar{e}_3)$.

Фокусы

$$\bar{F}^* = \bar{A} + \bar{e}_3 + \lambda^* (\bar{e}_1 - \bar{e}_3) \tag{2.7}$$

и торсы прямолинейной конгруэнции $(B\,\bar{e}_1 - \bar{e}_3)$ определяются соответственно уравнениями:

$$\lambda^* \{ \lambda^* [(1 + \Gamma^3_1 + \Gamma^1_{11} + \Gamma^3_{11})(\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{32}) - (\Gamma^3_2 + \Gamma^1_{12} + \Gamma^3_{12})(\Gamma^2_{11} - \Gamma^2_{31})] +$$

$$+ (1 + \Gamma^2_{32})(1 + \Gamma^3_1 + \Gamma^1_{11} + \Gamma^3_{11}) - \Gamma^2_{31}(\Gamma^3_2 + \Gamma^1_{12} + \Gamma^3_{12})\} = 0, \tag{2.8}$$

$$\vartheta (\omega^2 + \omega^2_3) = 0. \tag{2.9}$$

4. Огибающая (M_i) плоскостей $(\bar{e}_j\,\bar{e}_3)$.

Если поверхность (M_i) не является торсом, то

$$\bar{M}_i = \bar{A} + \frac{1}{\Delta_i} (\Gamma^i_{3j}\bar{e}_j - \Gamma^i_{jj}\bar{e}_3), \tag{2.10}$$

где

$$\Delta_i = \Gamma^i_{jj}\Gamma^i_{3i} - \Gamma^i_{ji}\Gamma^i_{3j} \neq 0. \tag{2.11}$$

Если поверхность (M_i) -торс, то $\Delta_i = 0$ и характеристика поверхности имеет направление:

$$\bar{K} = \Gamma^i_{3j}\bar{e}_j - \Gamma^i_{jj}\bar{e}_3 = \lambda (\Gamma^i_{3i}\bar{e}_j - \Gamma^i_{ji}\bar{e}_3). \tag{2.12}$$

5. Огибающая (M_3) плоскостей $(\bar{e}_1\,\bar{e}_2)$ (плоскостей парабол).

Если поверхность (M_3) не является торсом, то

$$\bar{M}_3 = \bar{A} - \frac{1}{\Delta_3} [(\Gamma^3_1\Gamma^3_{22} - \Gamma^3_2\Gamma^3_{21})\bar{e}_1 + (\Gamma^3_2\Gamma^3_{11} - \Gamma^3_1\Gamma^3_{12})\bar{e}_2], \tag{2.13}$$

где

$$\Delta_3 = \Gamma^3_{11}\Gamma^3_{22} - \Gamma^3_{12}\Gamma^3_{21} \neq 0. \tag{2.14}$$

6. Фокальные поверхности и фокальные семейства конгруэнции. Определяющая их система уравнений имеет вид:

$$(x^2)^2 - 2px^1 = 0, \quad x^3 = 0, \quad x^1\omega_1^3 + x^2\omega_2^3 + \omega^3 = 0,$$
$$(x^2)^2\omega_2^2 + x^1x^2\omega_1^2 + x^2(\omega^2 - p\omega_2^1) + x^1(dp - p\omega_1^1) - p\omega^1 = 0. \tag{2.15}$$

§ 3. Аффинно расслоенные пары конгруэнций фигур.

Пусть имеется двупараметрическое семейство (конгруэнция) $(\mathcal{L})$ плоских кривых $\mathcal{L}$ и m-параметрическое семейство H_m пучков α параллельных плоскостей (m=0, I, 2).

О п р е д е л е н и е I. Будем говорить, что существует одностороннее аффинное расслоение от конгруэнции $(\mathcal{L})$ к семейству H_m, если I) задано отображение φ, ставящее в соответствие каждой кривой $\mathcal{L}$ конгруэнции $(\mathcal{L})$ единственный пучок $\alpha = \varphi(\mathcal{L})$ семейства H_m, причем кривая $\mathcal{L}$ не инцидентна плоскости пучка α. 2) к конгруэнции $(\mathcal{L})$ можно присоединить однопараметрическое семейство Σ поверхностей так, чтобы касательные плоскости к каждой поверхности семейства Σ в точках пересечения с кривой $\mathcal{L}$ конгруэнции $(\mathcal{L})$ содержались в соответствующем пучке семейства H_m.

О п р е д е л е н и е 2. Пара T называется парой T_1, если существует одностороннее аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции $(A\bar{e}_3)$ к семейству плоскостей α_B.

Т е о р е м а . Пары T_1 существуют и определяются с произволом семи функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия одностороннего аффинного расслоения от прямолинейной конгруэнции $(A\bar{e}_3)$ к семейству плоскостей α_B, с учетом (I.8), приводятся к виду:

$$v \wedge \omega^1 + \Omega \wedge \omega^2 = 0 \tag{3.1}$$

Присоединяя (3.I) к уравнениям Пфаффа (I.6) и квадратичным уравнениям (I.8) и исследуя полученную систему убеждаемся в справедливости теоремы.

О п р е д е л е н и е 3. Пара T называется парой T_2, если существует одностороннее аффинное расслоение от конгруэнции (F_1) к семейству плоскостей α_B.

Т е о р е м а . Пары T_2 существуют и определяются с произволом четырех функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия одностороннего аффинного расслоения от конгруэнции (F_1) к семейству плоскостей α_B приводятся к виду:

$$\begin{gathered}
\omega_1^2 \wedge \Omega - \omega_1^3 \wedge v = 0, \\
(d\ln p - \omega_1^1 + 2\omega_2^2 - \omega_1^3) \wedge \Omega - 2\omega_2^3 \wedge v = 0, \\
\omega^2 \wedge \Omega - \omega^3 \wedge v = 0, \\
(\omega^1 + \omega^3) \wedge \Omega = 0, \\
(\omega^2 + \omega_3^2) \wedge \Omega + (\omega^1 + \omega_3^1) \wedge v = 0
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Учитывая (I.6), имеем:

$$\Gamma_{11}^2(\Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^3) - \Gamma_{12}^2(\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{21}^3) - \Gamma_{11}^3(\Gamma_2^3 + \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^3) + \Gamma_{12}^3(1 + \Gamma_1^3 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^3) = 0,$$

$$(p_1 - \Gamma_{11}^3)(\Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^3) - (p_2 - \Gamma_{12}^3)(\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{21}^3) - 2\Gamma_{21}^3(\Gamma_2^3 + \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^3) + 2(1 + \Gamma_1^3 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^3)\Gamma_{22}^3 = 0,$$

$$\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{21}^3 + \Gamma_1^3(\Gamma_2^3 + \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^3) - \Gamma_2^3(1 + \Gamma_1^3 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^3) = 0,$$

$$(1 + \Gamma_1^3)(\Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^3) - \Gamma_2^3(\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{21}^3) = 0,$$

$$\Gamma_{31}^2(\Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^3) - (1 + \Gamma_{32}^2)(\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{21}^3) + (1 + \Gamma_{31}^1)(\Gamma_2^3 + \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^3) - \Gamma_{32}^1(1 + \Gamma_1^3 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^3) = 0,$$

Пары T_2 определяются уравнениями Пфаффа (I.6), квадратичными уравнениями (I.8) и конечными соотношениями (3.3). Система в инволюции и имеет решение с произволом четырех функций двух аргументов.

Определение 4. Пара T называется расслояемой, если существуют односторонние аффинные расслоения от прямолинейной конгруэнции $(A\bar{e}_3)$ и от конгруэнции (F_1) к двупараметрическому семейству плоскостей α_B.

Теорема. Расслояемые пары T существуют и определяются с произволом четырех функций двух аргументов.

Доказательство. Система квадратичных уравнений, определяющих расслояемые пары T, запишется в виде:

$$
\begin{gathered}
(d\ln p - \omega_1^1 + 2\omega_2^2 - \omega_1^3)\wedge\Omega - 2\omega_2^3\wedge\upsilon = 0,\\
\omega_3^2\wedge\Omega + \omega_3^1\wedge\upsilon = 0, \quad \omega^2\wedge\Omega + \omega^1\wedge\upsilon = 0,\\
\omega_1^2\wedge\Omega - \omega_1^3\wedge\upsilon = 0,\\
(\omega^1 + \omega^3)\wedge\Omega = 0, \quad (\omega^1 + \omega^3)\wedge\upsilon = 0
\end{gathered}
\tag{3.4}
$$

Так как плоскости α_B образуют двупараметрическое семейство, то

$$\upsilon\wedge\Omega \neq 0. \tag{3.5}$$

Из последних двух уравнений системы (3.4) имеем:

$$\omega^1 + \omega^3 = 0. \tag{3.6}$$

Замыкая уравнение (3.6), получим квадратичное уравнение

$$\omega^1\wedge\upsilon + \omega^2\wedge\Omega = 0, \tag{3.7}$$

которое входит в систему (3.4).

Разрешая (3.7) по лемме Картана, получим:

$$
\begin{gathered}
\upsilon = \omega_1^1 + \omega_1^3 = a_1\omega^1 + b\,\omega^2,\\
\Omega = \omega_2^1 + \omega_2^3 = b\,\omega^1 + a_2\,\omega^2.
\end{gathered}
\tag{3.8}
$$

Учитывая (3.5) и (3.8), имеем

$$a_1 a_2 - b^2 \neq 0. \tag{3.9}$$

Расслояемые пары T определяются уравнениями Пфаффа:

$$
\begin{gathered}
\omega^1 + \omega^3 = 0, \quad \omega_3^1 - \omega_1^1 - \omega_2^2 = 0, \quad \omega_i^1 = a_i\omega^i + b\,\omega^j - \omega_i^3,\\
\omega_i^3 = \Gamma_{ik}^3\,\omega^k, \quad \omega_1^2 = \Gamma_{1k}^2\,\omega^k, \quad \omega_3^i = \Gamma_{3k}^i\,\omega^k, \quad d\ln p - \omega_1^1 + 2\omega_2^2 = p_k\,\omega^k,
\end{gathered}
\tag{3.10}
$$

квадратичными уравнениями:

$$
\begin{gathered}
\Delta\Gamma_{ik}^3\wedge\omega^k = 0, \quad \Delta\Gamma_{3k}^i\wedge\omega^k = 0, \quad \Delta\Gamma_{1k}^2\wedge\omega^k = 0,\\
\Delta p_k\wedge\omega^k = 0, \quad \Delta a_i\wedge\omega^i + \Delta b\wedge\omega^j = 0.
\end{gathered}
\tag{3.11}
$$

и конечными соотношениями:

$$
\begin{gathered}
(p_1 - \Gamma_{11}^3)a_2 - (p_2 - \Gamma_{12}^3 + 2\Gamma_{21}^3)b + 2\Gamma_{22}^3 a_1 = 0,\\
\Gamma_{11}^2 a_2 - (\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^3)b + \Gamma_{12}^3 a_1 = 0,\\
\Gamma_{31}^2 a_2 - (\Gamma_{32}^2 - \Gamma_{31}^1)b - \Gamma_{32}^1 a_1 = 0.
\end{gathered}
\tag{3.12}
$$

Замкнутая система (3.10), (3.11), (3.12) - в инволюции. Произвол существования расслояемых пар T - четыре функции двух аргументов.

Т е о р е м а. Поверхность (A) расслояемой пары T является фокальной поверхностью конгруэнции (F_1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая (3.6), убеждаемся, что координаты точки A обращают в тождество уравнение (2.15) при $\omega^1=0$. Следовательно, A -фокальная поверхность конгруэнции парабол, а $\omega^1=0$ - её фокальное семейство.

Л и т е р а т у р а

1. Малаховский В.С., Труды геометрического семинара ВИНИТИ, М., 1971, 3, 193-220.

2. Л.И. Магазинников, Центроаффинно-расслояемые пары конгруэнций. "Геометрический сборник", вып.5 (Труды Томского ун-та), т. 181, 1965, 43-56.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.3 1973

Х Л Я П О В А Е.А.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ЦЕНТРАЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ПАР ФИГУР В A_n.

В n-мерном аффинном пространстве A_n рассматривается многообразие пар фигур $\{F_1, F_2\}$, где F_1 -центральный квадратичный элемент, а F_2 - κ-плоскость, не инцидентная гиперплоскости квадратичного элемента.

Такая пара фигур называется центральной квадратичной парой [3]. Найден основной фундаментальный объект данного многообразия. Рассмотрены некоторые частные классы многообразия $\{2,1,3\}$.

§ 1. Система дифференциальных уравнений многообразия $\{h,\kappa,n\}$.

О п р е д е л е н и е. Многообразием $\{h,\kappa,n\}$ называется многообразие центральных квадратичных пар [3] n-мерного аффинного пространства, у которых κ-плоскости F_2 образуют h-параметрическое семейство, а многообразие центральных квадратичных элементов, входящих в пару, является многообразием $(h,h,n)^2$ [1]

1 Рассмотрим общий случай, когда $\kappa>1$. Исследование многообразий $\{h,\kappa,n\}$ осуществляется в частично-канонизированном репере. Вершина A репера совмещается с центром квадратичного элемента,