УДК 681.3.07

С. И. Алешников, Ю. Ф. Болтнев, З. Език,
С. А. Ишанов, В. Куих

ФОРМАЛЬНЫЕ ЯЗЫКИ И АВТОМАТЫ VII: ФОРМАЛЬНЫЕ РЯДЫ ДЕРЕВЬЕВ (Часть I)

Это седьмая статья в серии, дающей обзор некоторых разделов теории формальных языков и автоматов с использованием полуколец, формальных степенных рядов, матриц и теории неподвижных точек. В статье рассматриваются автоматы над деревьями (рядами деревьев) и системы уравнений над рядами деревьев. Основными темами статьи являются следующие.

1. Эквивалентность автоматов над деревьями (соответственно, конечных автоматов, полиномиальных автоматов над деревьями), поведение которых описывается рядами деревьев над полукольцом, и систем уравнений (соответственно, конечных, полиномиальных систем уравнений), наименьшие решения которых есть кортежи рядов деревьев над полукольцом.

2. Результат Клини: класс распознаваемых рядов деревьев характеризуется рациональными выражениями рядов деревьев.

This is the seventh paper of a series of papers that will give a survey on several topics on formal languages and automata by using semirings, formal power series, matrices and fixed point theory. The seventh paper of this series deals with tree (series) automata and systems of equations over tree. The main topics of the paper are the following.

1. Tree automata (resp. finite, polynomial tree automata), whose behaviors are tree series over a semiring, and systems of equations (resp. finite, polynomial systems of equations), whose least solutions are tuples of tree series over a semiring, are equivalent.

2. A Kleene result: the class of recognizable tree series is characterized by rational tree series expressions.

Ключевые слова: формальный язык, автомат, автомат над деревьями, полукольцо, формальные ряды деревьев.

Key words: formal languages, automaton, tree automaton, semiring, formal tree series.

1. Введение

Эта седьмая статья в серии, дающей обзор некоторых разделов теории формальных языков и автоматов. В статье сообщается об обобщении некоторых классических результатов по формальным языкам, формальным языкам над деревьями, языкам с конечными и бесконечными словами, автоматам, автоматам над деревьями и др. Предполагается, что читатель знаком с частями I—V [2—6] нашей серии.

Кроме того, мы предполагаем, что читатель имеет некоторые базовые знания о языках над деревьями и автоматах над деревьям (см. [18; 28; 29]). Формальные ряды деревьев были введены в работе [8], а затем подробно изучались в работах [9; 11—16; 21; 27; 37—40; 42].

Данная статья состоит из настоящей и трех последующих глав. В главе 2 мы определим дистрибутивные Σ-алгебры, где Σ — произвольная сигнатура. Мы введем ряды деревьев и охарактеризуем дистрибутивные Σ-алгебры рядов деревьев (с коэффициентами в непрерывном полукольце) универсальным свойством. Мы используем эту характеризацию для вывода свойств подстановок рядов деревьев.

В главе 3 мы определим автоматы над деревьями и системы уравнений, правые части которых состоят из рядов деревьев. Эти понятия образуют основу для рассмотрения конечных и магазинных автоматов над деревьями и полиномиальных систем. Главный результат этой главы состоит в том, что (конечные, полиномиальные) автоматы над деревьями и (конечные, полиномиальные) системы являются эквивалентными механизмами.

В главе 4 мы докажем теорему Клини для распознаваемых рядов деревьев, что позволит также определять распознаваемые ряды деревьев выражениями, аналогичными регулярным выражениям.

Изложение в настоящей статье следует работам Езика и Куиха [24].

2. Предварительные сведения

Мы предполагаем, что читатель знаком с определениями части II [3] настоящей серии статей и не будем их повторять.

В этом разделе мы сначала рассмотрим дистрибутивные алгебры. Определения и результаты о дистрибутивных алгебрах главным образом получены в работах Бозапалидиса [14], в особености через его понятие K-Γ-алгебры. Он заметил, что мультилинейные отображения его ω-аддитивных K-Γ-алгебр гарантируют, что некоторые важные отображения, индуцируемые формальными степенными рядами, непрерывны (см. теорему 2 в [14]). Мы попытались в нижеследующем определении дистрибутивной алгебры упростить тип используемой алгебры, в то же время сохраняя важные результаты. Результаты о дистрибутивных алгебрах являются обобщением результатов о полукольцах, приведенных в предварительных сведениях в части II [3].

Во второй части раздела мы введем формальные ряды деревьев. Эти формальные ряды деревьев образуют дистрибутивные алгебры.

В заключение этого раздела мы рассмотрим некоторые важные отображения, связанные с формальными рядами деревьев, и покажем, что они непрерывны.

Сигнатура есть непустое множество Σ, элементы которого называются *символами операций*, вместе с отображением $\Sigma \to \mathbb{N}$, называемым *функцией арности* и присваивающим каждому символу операции ее *арность* ($\mathbb{N}$ обозначает целые неотрицательные числа). Будем записывать $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \ldots \cup \Sigma_k \cup \ldots$, где Σ_k, $k \geqslant 0$, содержит символы операций арности k.

Пусть Σ — сигнатура. Напомним, что Σ-*алгебра* $\langle A, \Sigma \rangle$ состоит из непустого множества A и семейства операций $\{\sigma_A : A^k \to A \mid \sigma \in \Sigma_k,\ k \geqslant 0\}$. Как обычно, будем обозначать это семейство операций тоже Σ, а семейство k-арных операций — Σ_k, $k \geqslant 0$ (см. [28; 31; 45; 54]). Алгебра $\langle A, +, 0, \Sigma \rangle$, где $\langle A, +, 0 \rangle$ — коммутативный моноид и $\langle A, \Sigma \rangle$ — Σ-алгебра, называется *дистрибутивной* Σ-*алгеброй*, если следующие два условия выполняются для всех $\sigma_A \in \Sigma_k$ и всех $a, a_1, \ldots, a_k \in A$, $k \geqslant 1$:

(i) $\sigma_A(a_1, \ldots, a_{j-1}, 0, a_{j+1}, \ldots, a_k) = 0$ для всех $1 \leqslant j \leqslant k$;

(ii) $$\begin{aligned}&\sigma_A(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + a, a_{j+1}, \ldots, a_k) = \\ &= \sigma_A(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_k) + \\ &+ \sigma_A(a_1, \ldots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \ldots, a_k) \text{ для всех } 1 \leqslant j \leqslant k.\end{aligned}$$

Морфизм дистрибутивных Σ-алгебр сохраняет как структуру моноида, так и операции в Σ. В дальнейшем $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \ldots \cup \Sigma_k \cup \ldots$ всегда будет обозначать сигнатуру. В связи с деревьями сигнатура будет называться *ранжированным алфавитом*, где *ранг* символа операции — это ее арность.

Дистрибутивная Σ-алгебра $\langle A, +, 0, \Sigma \rangle$ кратко обозначается как A, если $+$, 0 и Σ подразумеваются. Понятие дистрибутивной Σ-алгебры было введено в работе Куиха [37] под названием «дистрибутивный мультиоператорный моноид». Идемпотент дистрибутивных Σ-алгебр, то есть Σ-алгебр $\langle A, +, 0, \Sigma \rangle$, где $a + a = a$ для всех $a \in A$, был введен в работе [19] под названием «дистрибутивная F-магма». Кроме того, дистрибутивные Σ-алгебры являются «сокращенной» версией K-Γ-алгебр из [14].

Дистрибутивную Σ-алгебру $\langle A, +, 0, \Sigma \rangle$ называют *упорядоченной*, если $\langle A, +, 0 \rangle$ упорядочен и каждая операция $\sigma_A \in \Sigma$ сохраняет порядок по каждому аргументу. Если порядок является естественным, то последнее условие выполняется по дистрибутивности. Морфизм упорядоченных дистрибутивных Σ-алгебр является морфизмом дистрибутивных Σ-алгебр, сохраняющим порядок.

Дистрибутивная Σ-алгебра $\langle A, +, 0, \Sigma \rangle$ называется *полной*, если $\langle A, +, 0 \rangle$ является полным и следующее дополнительное условие выполнено для всех $\sigma_A \in \Sigma_k$, множеств индексов $I_1, \ldots, I_k$ и $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k} \in A$, $i_1 \in I_1$, $\ldots$, $i_k \in I_k$, $k \geqslant 1$:

$$\sigma_A\Big(\sum_{i_1 \in I_1} a_{i_1}, \ldots, \sum_{i_k \in I_k} a_{i_k}\Big) = \sum_{i_1 \in I_1} \ldots \sum_{i_k \in I_k} \sigma_A(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}).$$

Наконец, упорядоченная дистрибутивная Σ-алгебра $\langle A, +, 0, \Sigma\rangle$ *непрерывна*, если $\langle A, +, 0\rangle$ непрерывен и если операции $\sigma_A \in \Sigma_k$ непрерывны: для всех $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k \in A$, $1 \leqslant i \leqslant k$, и для каждого направленного множества $D \subseteq A$

$$\sigma_A(a_1, \ldots, \sup D, \ldots, a_k) = \sup \sigma_A(a_1, \ldots, D, \ldots, a_k)\,.$$

Морфизм полных (соответственно непрерывных) дистрибутивных Σ-алгебр является морфизмом полных (соответственно непрерывных) моноидов и морфизмом дистрибутивных Σ-алгебр. Из предложения 2.1 части II [3] легко получим.

Предложение 2.1. *Любая непрерывная дистрибутивная Σ-алгебра полна. Любой морфизм непрерывных дистрибутивных Σ-алгебр является морфизмом полных дистрибутивных Σ-алгебр.*

Пример 2.1. Пусть $\Sigma = \bigcup_{k\geqslant 0} \Sigma_k$, $\Sigma_k = \{\omega_k\}$, $k \geqslant 0$. Рассмотрим полукольцо $\langle A, +, \cdot, 0, 1\rangle$ и определим ω_k, $k \geqslant 0$, как k-арные операции: константа ω_0 есть 1, унарная операция ω_1 — тождественное отображение и k-арная операция ω_k есть k-кратное произведение, то есть $\omega_k(a_1, \ldots, a_k) = a_1 \cdots a_k$, $k \geqslant 2$. Тогда $\langle A, +, 0, \Sigma\rangle$ — дистрибутивная Σ-алгебра. Если $\langle A, +, \cdot, 0, 1\rangle$ — непрерывное полукольцо, то $\langle A, +, 0, \Sigma\rangle$ — непрерывная дистрибутивная Σ-алгебра. $\square$

Пример 2.2. Рассмотрим полукольцо $\langle A, +, \cdot, 0, 1\rangle$. Пусть $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$, $\Sigma_0 = \{\omega\}$, $\Sigma_1 = \{\omega_a \mid a \in A\}$. Тогда полукольцо A может быть «смоделировано» дистрибутивной Σ-алгеброй $\langle A, +, 0, \Sigma\rangle$. Здесь ω есть константа 1 и для всех $a, b \in A$, $\omega_a(b) = a \cdot b$.

В добавление к законам дистрибутивной Σ-алгебры для всех $a, a_1, a_2, b \in A$ выполняются следующие законы:

$$\omega_{a_1}(\omega_{a_2}(b)) = \omega_{a_1\cdot a_2}(b), \quad \omega_{a_1+a_2}(b) = \omega_{a_1}(b) + \omega_{a_2}(b),$$
$$\omega_0(b) = 0, \quad \omega_1(b) = b, \quad \omega_a(1) = a.$$

$\square$

В дальнейшем X будет обозначать *алфавит символов листьев*, не пересекающийся с Σ (заметим, что алфавит может быть бесконечным). Через $T_\Sigma(X)$ обозначим множество *деревьев*, построенных над $\Sigma \cup X$. Это множество $T_\Sigma(X)$ есть наименьшее множество, построенное в соответствии со следующими соглашениями:

(i) если $\sigma \in \Sigma_0 \cup X$, то $\sigma \in T_\Sigma(X)$,

(ii) если $\sigma \in \Sigma_k$, $k \geqslant 1$, и $t_1, \ldots, t_k \in T_\Sigma(X)$, то $\sigma(t_1, \ldots, t_k) \in T_\Sigma(X)$.

Если $\Sigma_0 \neq \emptyset$, то X может быть пустым множеством ($\emptyset$ обозначает пустое множество).

Если Σ — конечный ранжированный алфавит и X — конечный алфавит символов листьев, то $T_\Sigma(X)$ порождается контекстно-свободной грамматикой $G = (\{S\}, \Sigma \cup X, P, S)$, где $P = \{S \to$
$\to \omega(S, \ldots, S$

Иногда более наглядно использовать графическое представление: дерево $\omega \in \Sigma_0 \cup X$ представляет корневое дерево с одним единственным узлом, маркированным ω; дерево $\omega(t_1, \ldots, t_k)$, $\omega \in \Sigma_k$, $t_1, \ldots, t_k \in T_\Sigma(X)$, $k \geqslant 1$, представляет корневое упорядоченное дерево, где корень, маркированный ω, имеет дочерние узлы $t_1, \ldots, t_k$ (в указанном порядке).

Множество $T_\Sigma(X)$ можно преобразовать в Σ-алгебру, определив, что для каждого $\sigma \in \Sigma_k$ и всех $t_1, \ldots, t_k \in T_\Sigma(X)$ $\sigma_{T_\Sigma(X)}(t_1, \ldots, t_k)$ является деревом $\sigma(t_1, \ldots, t_k)$. Хорошо известно, что оснащенное этими операциями $T_\Sigma(X)$ является *свободно порожденным посредством* X: каждая функция $h : X \to D$, где D — Σ-алгебра, продолжается до единственного морфизма Σ-алгебр $T_\Sigma(X) \to D$.

Обратимся теперь к формальным рядам деревьев. Они образуют дистрибутивную Σ-алгебру. Пусть A — полукольцо. Обозначим через $A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ множество *формальных рядов деревьев* над $T_\Sigma(X)$, то есть множество отображений $s : T_\Sigma(X) \to A$, записанных в виде $\sum_{t \in T_\Sigma(X)} (s, t)t$, где *коэффициент* (s, t) есть значение функции s для дерева $t \in T_\Sigma(X)$. Для формального ряда деревьев $s \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ определим *носитель* ряда s: $\mathrm{supp}(s) = \{t \in T_\Sigma(X) \mid (s, t) \neq 0\}$. Через $A\langle T_\Sigma(X)\rangle$ обозначим множество рядов деревьев в $A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$, имеющих конечный носитель. Степенной ряд с конечным носителем называется *многочленом*.

Сначала определим для $s_1, s_2 \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ сумму $s_1 + s_2 \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ посредством

$$s_1 + s_2 = \sum_{t \in T_\Sigma(X)} ((s_1, t) + (s_2, t))t\,.$$

Нулевой ряд деревьев 0 определяется как ряд деревьев, имеющий все коэффициенты, равные 0. Ясно, что $\langle A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle, +, 0\rangle$ является коммутативным моноидом.

Для $\omega \in \Sigma_k$, $k \geqslant 0$, определим отображение $\bar{\omega} : (A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle)^k \to A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ посредством

$$\bar{\omega}(s_1, \ldots, s_k) = \sum_{t_1, \ldots, t_k \in T_\Sigma(X)} (s_1, t_1) \ldots (s_k, t_k)\omega(t_1, \ldots, t_k)\,,$$

$s_1, \ldots, s_k \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$.

Ясно, что $\langle A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle, +, 0, \bar{\Sigma}\rangle$, где $\bar{\Sigma} = (\bar{\omega} \mid \omega \in \Sigma)$, является дистрибутивной Σ-алгеброй, так же как и $\langle A\langle T_\Sigma(X)\rangle, +, 0, \bar{\Sigma}\rangle$ с теми же операциями. Если A — это (естественно) упорядоченное (соответственно полное или непрерывное) полукольцо, то $A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ снова (естественно) упорядоченная (соответственно полная или непрерывная) дистрибутивная Σ-алгебра. Порядок на $A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ является поточечным порядком. К тому же если A упорядочен, то $A\langle T_\Sigma(X)\rangle$ — упорядоченная дистрибутивная Σ-алгебра.

Пример 2.3. Формальные ряды деревьев имеют то достоинство, что коэффициент дерева в ряду может использоваться для получения некоторой количественной информации об этом дереве.

(i) (см. пример 2.1 в [8]). Определим высоту $h(t)$ дерева t в $T_\Sigma(X)$:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{, если } t \in \Sigma_0 \cup X, \\ 1 + \max\{h(t_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant k\} & \text{, если } t = \omega(t_1, \ldots, t_k),\ k \geqslant 1. \end{cases}$$

Теперь высота есть формальный ряд деревьев в $\mathbb{N}\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$:

$$\text{высота} = \sum_{t \in T_\Sigma(X)} h(t)t\,.$$

(ii) Рассмотрим формальный ряд деревьев s в $\mathbb{R}_+\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ такой, что $0 \leqslant (s,t) \leqslant 1$ для всех $t \in T_\Sigma(X)$. Тогда (s,t) можно интерпретировать как вероятность, ассоциированную с деревом t. Здесь $\mathbb{R}_+$ — полукольцо неотрицательных вещественных чисел.

(iii) Рассмотрим формальный ряд деревьев s в $\mathbb{N}^\infty\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$, где $\mathbb{N}^\infty = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Тогда коэффициент (s,t) при $t \in T_\Sigma(X)$ можно интерпретировать как количество (возможно, ∞) различных вычислений t с помощью некоторого механизма (см. теорему 3.1).

Другие примеры можно найти в [8]. $\square$

Выразим универсальное свойство рассмотренных выше конструкций. Заметим, что $A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ можно наделить *скалярным умножением* $A \times A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle \to A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$, $(a,s) \mapsto as$, определенным посредством $(as,t) = a(s,t)$ для всех $t \in T_\Sigma(X)$. Если $s \in A\langle T_\Sigma(X)\rangle$, то и $as \in A\langle T_\Sigma(X)\rangle$. Эта операция удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned} a(bs) &= (ab)s, && (1)\\ 1s &= s, && (2)\\ (a+b)s &= as + bs, && (3)\\ a(s+s') &= as + as', && (4)\\ a0 &= 0 && (5) \end{aligned}$$

для всех $a, b \in A$ и $s, s' \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$. Отсюда следует, что $0s = 0$ для всех s. Кроме того, если A коммутативно, то имеем также

$$\bar{\omega}(a_1 s_1, \ldots, a_k s_k) = a_1 \ldots a_k \bar{\omega}(s_1, \ldots, s_k) \qquad (6)$$

для всех $\omega \in \Sigma_k$, $k \geqslant 0$, и для всех $a_i \in A,\ s_i \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Теорема 2.2. *Пусть A — коммутативное полукольцо и D — дистрибутивная Σ-алгебра, наделенная скалярным умножением $A \times D \to D$, $(a,d) \mapsto ad$, удовлетворяющим тождествам (1–6). Тогда любая функция $\varphi : X \to D$ продолжается до однозначно определенного морфизма дистрибутивных Σ-алгебр $\varphi^\sharp : A\langle T_\Sigma(X)\rangle \to D$, сохраняющего скалярное произведение.*

Доказательство. Хорошо известно, что φ продолжается до однозначно определенного морфизма Σ-алгебры $\bar{\varphi} : T_\Sigma(X) \to D$. Продолжим далее $\bar{\varphi}$ до $\varphi^\sharp$, определив

$$\varphi^\sharp(s) = \sum_{t \in T_\Sigma(X)} (s,t)\bar{\varphi}(t)$$

для всех $s \in A\langle T_\Sigma(X)\rangle$. Остается показать, что $\varphi^\sharp$ продолжает φ и $\varphi^\sharp$ — морфизм дистрибутивных Σ-алгебр, сохраняющий скалярное умножение, а это стандартная задача. Поскольку определение $\varphi^\sharp$ было принудительным, продолжение определено однозначно. $\square$

Подобный результат сохраняется, если A — полное полукольцо такое, что $A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ — полная дистрибутивная Σ-алгебра.

Теорема 2.3. *Допустим, что A — полное коммутативное полукольцо и D — полная дистрибутивная Σ-алгебра, наделенная скалярным умножением $A \times D \to D$, $(a,d) \mapsto ad$, удовлетворяющим тождествам (1—6). Кроме того, предположим, что*

$$(\sum_{i\in I} a_i)d = \sum_{i\in I} a_i d\,, \tag{7}$$

$$a\sum_{i\in I} d_i = \sum_{i\in I} ad_i \tag{8}$$

для всех $a, a_i \in A$ и $d, d_i \in D$, $i \in I$, где I — произвольное множество индексов. Тогда всякая функция $\varphi : X \to D$ продолжается до однозначно определенного морфизма полных дистрибутивных Σ-алгебр $\varphi^\sharp : A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle \to D$, сохраняющего скалярное умножение.

Доказательство полностью соответствует доказательству теоремы 2.2. Сначала продолжим φ до $\overline{\varphi} : T_\Sigma(X) \to D$, а затем определим

$$\varphi^\sharp(s) = \sum_{t\in T_\Sigma(X)} (s,t)\overline{\varphi}(t)$$

для всех $s \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$. Сумма имеет смысл, так как D полно. Детальное доказательство того, что $\varphi^\sharp$ — гомоморфизм полных дистрибутивных Σ-алгебр, сохраняющий скалярное умножение, — стандартная процедура. Определение $\varphi^\sharp$ снова принудительно. $\square$

Если A упорядочено $\leqslant$, то можно упорядочить $A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ и, соответственно, $A\langle T_\Sigma(X)\rangle$ с помощью поточечного порядка. Определим $s \leqslant s'$ для $s, s' \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ тогда и только тогда, когда $(s,t) \leqslant (s',t)$ для всех $t \in T_\Sigma(X)$. Наделенные этим порядком $A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ и $A\langle T_\Sigma(X)\rangle$ — упорядоченные дистрибутивные Σ-алгебры. Кроме того, скалярное умножение сохраняет порядок по обоим аргументам. Наконец, если A — непрерывное полукольцо, то $A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ также непрерывно, и скалярное умножение сохраняет точную верхнюю грань направленных множеств по обоим аргументам.

Следствие 2.4. *Пусть A — упорядоченное непрерывное полукольцо, D — упорядоченная дистрибутивная Σ-алгебра с порядком, сохраняющим скалярное умножение $A \times D \to D$, $(a,d) \mapsto ad$, удовлетворяющее (1—6). Тогда всякая функция $\varphi : X \to D$ продолжается до однозначно определенного морфизма дистрибутивных Σ-алгебр $\varphi^\sharp : A\langle T_\Sigma(X)\rangle \to D$, сохраняющего скалярное умножение. Кроме* *того, если A — непрерывное коммутативное полукольцо и D — непрерывная дистрибутивная Σ-алгебра, наделенная непрерывным скалярным умножением $A \times D \to D$, $(a,d) \mapsto ad$, удовлетворяющим (1—6), то всякая функция $\varphi : X \to D$ продолжается до однозначно определенного морфизма непрерывных дистрибутивных Σ-алгебр $\varphi^\sharp : A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle \to D$, сохраняющего скалярное умножение.*

В дальнейшем A будет обозначать *непрерывное (полное) коммутативное полукольцо*, где суммы определены предложением 2.1 части II [3]. Пусть s — формальный ряд деревьев в $A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ и пусть D — непрерывная дистрибутивная Σ-алгебра, наделенная скалярным умножением $A \times D \to D$, удовлетворяющим (1—6), которое также непрерывно. Множество D^X всех функций $X \to D$ также является непрерывной дистрибутивной Σ-алгеброй с определенными поточечно операциями и упорядоченной как множество всех непрерывных функций $D^X \to D$. Кроме того, оно наделено поточечным скалярным умножением, которое снова удовлетворяет тождествам(1—6) и является непрерывным. Теперь s индуцирует отображение $s^D : D^X \to D$, $h \mapsto h^\sharp(s)$, для $h \in D^X$.

Предложение 2.5. *Функция s^D непрерывна. Кроме того, соответствие $s \to s^D$ определяет непрерывную функцию от s.*

Доказательство. Известно, что если $t \in T_\Sigma(X)$, то функция $t^D : D^X \to D$, индуцированная с помощью t, непрерывна, так как она может быть построена из непрерывных функций (а именно проекций и непрерывных операций в D, соответствующих символам в Σ) с помощью композиции функций (см. [33]). Поскольку скалярное умножение и $+$ непрерывны, то это — любая функция, индуцированная рядом из $A\langle T_\Sigma(X)\rangle$. Но s^D есть поточечный супремум функций, индуцированных многочленами $\sum_{t\in F}(s,t)t$, где F — конечное подмножество в$T_\Sigma(X)$. Поскольку поточечный супремум непрерывных функций непрерывен (см. [33]), получаем требуемый результат.

Для того чтобы показать, что соответствие $s \mapsto s^D$ определяет непрерывную функцию, пусть S обозначает направленное множество в $A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$. Нам нужно доказать, что

$$(\sup_{s\in S} s)^D = \sup_{s\in S} s^D.$$

Но для любого $h : X \to D$

$$\begin{aligned}(\sup_{s\in S} s)^D(h) &= h^\sharp(\sup_{s\in S} s) = \\ &= \sup_{s\in S} h^\sharp(s) = \\ &= \sup_{s\in S} s^D(h) = \\ &= (\sup_{s\in S} s^D)(h).\end{aligned}$$

$\square$

В дальнейшем мы будем писать $\mathrm{h}h^\sharp$ и обозначать s^D как s.

В частности, формальные ряды деревьев индуцируют непрерывные отображения — *подстановки*. Пусть Y — непустое множество переменных, где $Y \cap (\Sigma \cup X) = \emptyset$, и рассмотрим отображение $h : Y \to A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y)\rangle\rangle$. Это отображение может быть продолжено до отображения $h : T_\Sigma(X \cup Y) \to A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y)\rangle\rangle$, полагая $h(x) = x$, $x \in X$. Теперь, согласно предыдущему результату, для любого ряда $s \in A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y)\rangle\rangle$ отображение $h \mapsto h(s)$ — непрерывная функция от h. Согласно рассуждению, проведенному выше, $h(s)$ может быть построено так. Во-первых, продолжим h на деревья, определив

$$h(\omega(t_1, \dots, t_k)) = \bar{\omega}(h(t_1), \dots, h(t_k)) =$$
$$= \sum_{t'_1,\dots,t'_k \in T_\Sigma(X\cup Y)} (h(t_1), t'_1) \dots (h(t_k), t'_k)\omega(t'_1, \dots, t'_k)$$

для $\omega \in \Sigma_k$ и $t_1, \dots, t_k \in T_\Sigma(X \cup Y)$, $k \geqslant 0$. Еще одно расширение h дает отображение $h : A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y)\rangle\rangle \to A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y)\rangle\rangle$ при определении $h(s) = \sum_{t \in T_\Sigma(X\cup Y)} (s, t)h(t)$. Теперь $s(h)$ есть просто значение этой продолженной функции в s. Если $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ конечно, мы используем следующие обозначения: $h : Y \to A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y)\rangle\rangle$, где $h(y_i) = s_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, обозначается как $(s_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n)$ или $(s_1, \dots, s_n)$, а значение функции s от аргумента h обозначается как $s(s_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n)$ или $s(s_1, \dots, s_n)$. Неформально это является просто *подстановкой* формальных рядов деревьев $s_i \in A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y)\rangle\rangle$ в переменные y_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $s \in A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y)\rangle\rangle$. По предложению 2.5 отображение $s : (A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y)\rangle\rangle)^Y \to A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y)\rangle\rangle$, то есть подстановка формальных рядов деревьев в переменные из Y является непрерывным отображением. Кроме того, $s(s_1, \dots, s_n)$ также непрерывно по s. (Так, оно непрерывно по s и по каждому s_i.) Заметим, что $s(s_1, \dots, s_n) = \sum_{t \in T_\Sigma(X\cup Y)} (s, t)t(s_1, \dots, s_n)$.

В некоторых случаях формулы легче читаются, если использовать обозначение $s[s_i/y_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n]$ для подстановки формальных рядов деревьев s_i в переменные y_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, в s вместо обозначения $s(s_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n)$. Поэтому мы иногда будем использовать это обозначение $s[s_i/y_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n]$.

Подобным же образом $s \in A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y)\rangle\rangle$ также индуцирует отображение $s : (A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle)^Y \to A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$.

Наша подстановка на формальных рядах деревьев является обобщением OI-подстановок на формальных языках на деревьях. Мы не будем рассматривать обобщения IO-подстановки. В работах [15; 21; 27] рассматриваются эти обобщения на формальные ряды деревьев. За точными определениями OI- и IO-подстановок отсылаем к [22], определение 2.1.1.

Конструкция ряда деревьев и вышеописанные результаты о свободности допускают весьма широкое обобщение. Пусть D — произвольная Σ-алгебра и A — произвольное полное полукольцо. Тогда множество функций $D \to A$, обозначаемое $A\langle\langle D\rangle\rangle$, есть полная дистрибутивная Σ-алгебра. Назовем элементы из $A\langle\langle D\rangle\rangle$ рядами и обозначим их $\sum_{d \in D} (s, d)d$ или $\sum_{d \in \mathrm{supp}(s)} (s, d)d$. Сумма любого семейства рядов есть их поточечная сумма. Нулевой ряд — это нуль. Кроме того, для каждого $\omega \in \Sigma_k$, $k \geqslant 1$, и для каждого $s_1, \dots, s_k \in A\langle\langle D\rangle\rangle$,

$$\omega(s_1, \ldots, s_k) = \sum_{d \in D} \Big(\sum_{d = \omega(d_1, \ldots, d_k)} (s_1, d_1) \ldots (s_k, d_k) \Big) d \,.$$

$A\langle\langle D \rangle\rangle$ наделена скалярным умножением $A \times A\langle\langle D \rangle\rangle \to A\langle\langle D \rangle\rangle$, и выполняются тождества (1—6, 7, 8). Если A — непрерывное полукольцо, то наделенная поточечным порядком $A\langle\langle D \rangle\rangle$ — непрерывная дистрибутивная Σ-алгебра, и скалярное умножение в ней непрерывно. Теперь сформулируем обещанное обобщение теоремы 2.3.

Теорема 2.6. *Предположим,что A — полное коммутативное полукольцо и D' — дистрибутивная Σ-алгебра, наделенная скалярным умножением $A \times D' \to D'$, которое удовлетворяет тождествам (1)—(6), а также (7) и (8). Кроме того, предположим, что D — Σ-алгебра. Тогда всякий морфизм Σ-алгебр $\varphi : D \to D'$ продолжается до однозначно определенного морфизма полных дистрибутивных Σ-алгебр $\varphi^\sharp : A\langle\langle D \rangle\rangle \to D'$, сохраняющего скалярное умножение. Если A — непрерывное коммутативное полукольцо и D' — непрерывная дистрибутивная Σ-алгебра, а скалярное умножение $A \times D' \to D'$ непрерывно, то такова же и функция $\varphi^\sharp$.*

Доказательство. При данном φ мы вынуждены определить

$$\varphi^\sharp(s) = \sum_{d \in D} (s, d)\varphi(d) \qquad (9)$$

для всех $s \in A\langle\langle D \rangle\rangle$. С другой стороны, является рутинной процедурой проверка того, что (9) определяет морфизм полных дистрибутивных Σ-алгебр $\varphi^\sharp : A\langle\langle D \rangle\rangle \to D'$, продолжающий φ.

Пусть теперь A и D непрерывны и скалярное умножение $A \times D' \to$ $\to D'$ также непрерывно. Для доказательства того, что $\varphi^\sharp$ непрерывно, предположим, что S — направленное множество в $A\langle\langle D \rangle\rangle$. Тогда для каждого $d \in D$ множество $\{(s, d) : s \in S\}$ также является направленным, более того, $(\sup S, d) = \sup_{s \in S}(s, d)$. Используя это и непрерывность скалярного умножения и сложения, имеем

$$\begin{aligned}
\varphi^\sharp(\sup S) &= \sum_{d \in D} (\sup S, d)\varphi(d) = \\
&= \sum_{d \in D} (\sup_{s \in S}(s, d))\varphi(d) = \\
&= \sum_{d \in D} \sup_{s \in S}(s, d)\varphi(d) = \\
&= \sup_{s \in S} \sum_{d \in D} (s, d)\varphi(d) = \\
&= \sup\{\varphi^\sharp(s) : s \in S\} = \\
&= \sup \varphi^\sharp(S).
\end{aligned}$$

□

Теорема 2.2 может быть обобщена тем же методом. Дальнейшие сведения о рядах над Σ-алгебрами смотрите в [41; 43].

Далее Y, Y', Z будут обозначать множества переменных, дизъюнктные с Σ и X, а Y_k, $k \geqslant 1$, будет обозначать множеств переменных $\{y_1, \ldots, y_k\}$. Причем $Y_0 = \emptyset$. Кроме того, I и I' обозначают произвольные множества индексов.

Для заданного множества S пусть $S^{I_1 \times I_2}$ обозначает множество матриц с индексами в $I_1 \times I_2$ и с элементами в S. (Например, $(A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle)^{I' \times I^k}$ обозначает множество матриц M такое, что $(i, (i_1, \ldots, i_k))$-й элемент матрицы M лежит в $A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$, $i \in I'$, $i_1, \ldots, i_k \in I$.) Матрица $M \in (A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle)^{I_1 \times I_2}$ называется *конечно-строчной*, если для всех $i_1 \in I$ $M_{i_1, i_2} \neq 0$ лишь для конечного числа индексов $i_2 \in I$.

Наши автоматы над деревьями будут определяться с помощью матриц переходов. *Матрица* $M \in (A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y_k)\rangle\rangle)^{I' \times I^k}$, $k \geqslant 1$, где I' и I произвольные множества индексов, *индуцирует отображение*

$$\begin{aligned} M : (A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y')\rangle\rangle)^{I \times 1} \times \ldots \times (A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y')\rangle\rangle)^{I \times 1} \to \\ \to (A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y')\rangle\rangle)^{I' \times 1} \end{aligned}$$

(существуют k-элементные векторы), определенное через элементы результирующего вектора следующим образом. Для $P_1, \ldots, P_k \in$ $\in (A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y')\rangle\rangle)^{I \times 1}$ определим для всех $i \in I'$

$$\begin{aligned} M(P_1, \ldots, P_k)_i &= \textstyle\sum_{i_1, \ldots, i_k \in I} M_{i,(i_1, \ldots, i_k)}((P_1)_{i_1}, \ldots, (P_k)_{i_k}) = \\ &= \textstyle\sum_{i_1, \ldots, i_k \in I} \sum_{t \in T_\Sigma(X \cup Y_k)} (M_{i,(i_1, \ldots, i_k)}, t) t((P_1)_{i_1}, \ldots, (P_k)_{i_k})\,. \end{aligned}$$

Следовательно, $M(P_1, \ldots, P_k)_i$ определена как результат подстановки компонент $(P_1)_{i_1}, \ldots, (P_k)_{i_k}$ элементов $P_1, \ldots, P_k$ для $y_1, \ldots, y_k$ соответственно в $M_{i,(i_1, \ldots, i_k)}$ и затем суммирования по всем возможным наборам $(i_1, \ldots, i_k) \in I^k$.

В следующей теореме используется *символ Кронекера* $\delta_{i,j} \in A$ над I: для $i, j \in I$, $\delta_{i,j} = 1$, если $i = j$ и $\delta_{i,j} = 0$, если $i \neq j$.

Теорема 2.7. *Пусть* $M \in (A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y_k)\rangle\rangle)^{I' \times I^k}$, $k \geqslant 1$. *Определим* $\bar{M} \in (A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y_k)\rangle\rangle)^{I' \times I^m}$, $m > k$, *как*

$$\bar{M}_{i,(i_1, \ldots, i_m)} = \delta_{i,i_m} \delta_{i_m, i_{m-1}} \cdots \delta_{i_{k+2}, i_{k+1}} M_{i,(i_1, \ldots, i_k)}$$

для $i \in I'$, $i_1, \ldots, i_m \in I$.

Тогда для $P_1, \ldots, P_m \in (A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y')\rangle\rangle)^{I \times 1}$

$$\bar{M}(P_1, \ldots, P_m) = M(P_1, \ldots, P_k)\,.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} &\bar{M}(P_1, \ldots, P_m)_i = \\ &= \textstyle\sum_{i_1, \ldots, i_m \in I} \bar{M}_{i,(i_1, \ldots, i_m)}((P_1)_{i_1}, \ldots, (P_m)_{i_m}) = \\ &= \textstyle\sum_{i_1, \ldots, i_m \in I} \delta_{i,i_m} \delta_{i_m, i_{m-1}} \cdots \delta_{i_{k+2}, i_{k+1}} M_{i,(i_1, \ldots, i_k)}((P_1)_{i_1}, \ldots, (P_k)_{i_k}) = \\ &= \textstyle\sum_{i_1, \ldots, i_k \in I} M_{i,(i_1, \ldots, i_k)}((P_1)_{i_1}, \ldots, (P_k)_{i_k}) = \\ &= M(P_1, \ldots, P_k)_i, \quad i \in I'\,. \end{aligned}$$

□

Для определения трансдукторов рядов деревьев нам потребуется обобщение подстановки, определенной матрицей в $(A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y_k)\rangle\rangle)^{I' \times I^k}$, $k \geqslant 1$. Матрица $(A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y_m)\rangle\rangle)^{I' \times (I \times Z_k)^m}$, $Z_k = \{z_1, \ldots, z_k\}$, $k \geqslant 1$, *индуцирует отображение*

$$M : (A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y')\rangle\rangle)^{I \times 1} \times \cdots \times (A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y')\rangle\rangle)^{I \times 1} \to \\ \to (A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y')\rangle\rangle)^{I' \times 1}$$

(существуют k-элементные векторы), определенное элементами результирующего вектора следующим образом: для $P_1, \ldots, P_k \in (A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y')\rangle\rangle)^{I \times 1}$ определим для всех $i \in I'$

$$M[P_1, \ldots, P_k]_i = \\ = \sum_{i_1,\ldots,i_m \in I,\ 1 \leqslant j_1,\ldots,j_m \leqslant k} M_{i,((i_1,z_{j_1}),\ldots,(i_m,z_{j_m}))}((P_{j_1})_{i_1}, \ldots, (P_{j_m})_{i_m})\,.$$

Теорема 2.8. *Пусть* $C = \{((i_1, z_1), \ldots, (i_k, z_k)) \mid i_1, \ldots, i_k \in I\}$ *и* $M \in (A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y_k)\rangle\rangle)^{I' \times (I \times Z_k)^k}$, $k \geqslant 1$, *такая, что* $M_{i,\alpha} = 0$ *для* $i \in I'$ *и* $\alpha \in (I \times Z_k)^k - C$. *Определим* $\bar{M} \in (A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y_k)\rangle\rangle)^{I' \times I^k}$ *как* $\bar{M}_{i,(i_1,\ldots,i_k)} = M_{i,((i_1,z_1),\ldots,(i_k,z_k))}$ *для* $i \in I'$, $i_1, \ldots, i_k \in I$. *Тогда для* $P_1, \ldots, P_k \in (A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y')\rangle\rangle)^{I \times 1}$

$$M(P_1, \ldots, P_k) = \bar{M}[P_1, \ldots, P_k]\,.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} &M[P_1, \ldots, P_k]_i = \\ &= \textstyle\sum_{i_1,\ldots,i_k \in I} M_{i,((i_1,z_1),\ldots,(i_k,z_k))}((P_1)_{i_1}, \ldots, (P_k)_{i_k}) = \\ &= \textstyle\sum_{i_1,\ldots,i_k \in I} \bar{M}_{i,(i_1,\ldots,i_k)}((P_1)_{i_1}, \ldots, (P_k)_{i_k}) = \\ &= \bar{M}(P_1, \ldots, P_k)_i, \quad i \in I'\,. \end{aligned}$$

□

3. Автоматы над деревьями и системы уравнений

В этой главе мы определим автоматы над деревьями и системы уравнений (над полукольцами). Данные понятия являются основой для рассмотрения конечных автоматов и магазинных автоматов над деревьями и полиномиальных систем. Определения несколько видоизменены по сравнению с приведенными в [37; 42]. Главный результат этой главы состоит в том, что (конечные, полиномиальные) автоматы над деревьями и (конечные, полиномиальные) системы являются эквивалентными механизмами.

Наши автоматы над деревьями являются обобщением недетерминированных «root-to-frontier распознавателей» над деревьями (см. [28; 29; 37]). *Автомат над деревьями* (с входным алфавитом Σ и алфавитом листьев X над полукольцом A) $\mathfrak{A} = (I, M, S, P)$ определяется следующими компонентами:

(i) непустое множество I *состояний*;

(ii) *матрица переходов* $M \in (A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y_m)\rangle\rangle)^{I\times I^m}$ для некоторого $m \geqslant 1$;

(iii) конечный вектор-строка $S \in (A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y_1)\rangle\rangle)^{1\times I}$, называемый *вектором начальных состояний*;

(iv) вектор-столбец $P \in (A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle)^{I\times 1}$, называемый *вектором конечных состояний*.

Аппроксимирующая последовательность $(\sigma^j \mid j \in \mathbb{N})$, $\sigma^j \in (A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle)^{I\times 1}$, $j \geqslant 0$, *ассоциированная с* $\mathfrak{A}$, определяется следующим образом: $\sigma^0 = 0, \sigma^{j+1} = M(\sigma^j, \ldots, \sigma^j) + P, j \geqslant 0$ (существуют m-элементные векторы σ^j). *Поведение* $||\mathfrak{A}|| \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ автомата над деревьями $\mathfrak{A}$ определяется как

$$||\mathfrak{A}|| = \sum_{i\in I} S_i(\sigma_i) = S(\tau)\,,$$

где $\tau \in (A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle)^{I\times 1}$ — точная верхняя грань аппроксимирующей последовательности, ассоциированной с $\mathfrak{A}$. Поскольку $\sigma^j \leqslant \sigma^{j+1}$ для всех j (по непрерывности подстановки) и так как $(A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y_m)\rangle\rangle)^{I\times I^m}$ имеет все направленные точные верхние грани относительно поточечного порядка, то эта точная верхняя грань и, следовательно, поведение автомата $\mathfrak{A}$ существуют.

Заметим, что Σ может быть бесконечным и может не существовать ограничений на ранг символов в Σ. Но в любом случае в матрице M допускается лишь конечное число переменных.

Наши автоматы над деревьями несколько видоизменены по сравнению с [42]. В [42] автомат над деревьями (с конечной последовательностью матриц перехода) $\mathfrak{A}' = (I, M', S, P)$ определен так же, как и здесь, за исключением того, что M' — *последовательность* матриц перехода $M' = (M'_k \mid 1 \leqslant k \leqslant m)$, где $M_k \in (A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y_k)\rangle\rangle)^{I\times I^k}$, $1 \leqslant k \leqslant m$, и аппроксимирующая последовательность $(\sigma'^j \mid j \in \mathbb{N})$, $\sigma'^j \in (A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle)^{I\times 1}$, $j \geqslant 0$, определена как

$$\sigma'^0 = 0, \qquad \sigma'^{j+1} = \sum_{1\leqslant k\leqslant m} M'_k(\sigma'^j, \ldots, \sigma'^j) + P$$

(существуют k-элементные векторы σ'^j в M'_k). Для данного автомата над деревьями $\mathfrak{A}' = (I, M', S, P)$, согласно [42], построим эквивалентный автомат над деревьями $\mathfrak{A} = (I, M, S, P)$ в соответствии с нашим определением: определим матрицы $M_k \in (A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y_k)\rangle\rangle)^{I\times I^m}$, $1 \leqslant k \leqslant m$, их элементами

$$(M_k)_{i,(i_1,\ldots,i_m)} = \delta_{i,i_m}\delta_{i_m,i_{m-1}}\delta_{i_{k+2},i_{k+1}}(M'_k)_{i,(i_1,\ldots,i_k)}\,, i, i_1, \ldots, i_m \in I\,,$$

и матрицу $M \in (A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y_m)\rangle\rangle)^{I\times I^m}$ как $M = \sum_{1\leqslant k\leqslant m} M_k$. Мы утверждаем, что аппроксимирующие последовательности автоматов

$\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ совпадают, то есть $\sigma^j = \sigma'^j$ для всех $j \geqslant 0$, и докажем это индукцией по j. Случай $j = 0$ очевиден, и мы будем исходить из условия $j > 0$. Для всех $i \in I$ по теореме 2.7 получим

$$\sigma_i^j = (M(\sigma^{j-1}, \ldots, \sigma^{j-1}) + P)_i = \sum_{1\leqslant k\leqslant m} M_k(\sigma^{j-1}, \ldots, \sigma^{j-1})_i + P_i = \\ = \sum_{1\leqslant k\leqslant m} M'_k(\sigma'^{j-1}, \ldots, \sigma'^{j-1})_i + P_i = \sigma_i'^j .$$

Следовательно, доказали, что $||\mathfrak{A}|| = ||\mathfrak{A}'||$. Сформулируем это как *замечание.*

Замечание. Определения автоматов над деревьями, данные здесь и в [42] (с конечной последовательностью матриц перехода), эквивалентны относительно поведения этих автоматов. □

Автомат над деревьями $\mathfrak{A} = (I, M, S, P)$ называется *конечным*, если I конечно. Автомат над деревьями $\mathfrak{A} = (I, M, S, P)$ называется *элементарным*, если элементы матрицы переходов M, вектора начальных состояний S и вектора конечных состояний P имеют следующий специальный вид:

(i) элементы M вида $\sum_{1\leqslant k\leqslant m}\sum_{\omega\in\Sigma_k} a_\omega\omega(y_1, \ldots, y_k) + $
$+\sum_{\omega\in\Sigma_0\cup X} a_\omega\omega + ay_1$, $a_\omega, a \in A$;

(ii) элементы P вида $\sum_{\omega\in\Sigma_0\cup X} a_\omega\omega$, $a_\omega \in A$;

(iii) элементы S вида dy_1, $d \in A$.

Он называется *правильным*, если не существует членов ay_1 в (i). Заметим, что член ay_1 в (i) соответствует ε-переходам в обыкновенном автомате.

Неформально элементарный автомат над деревьями $\mathfrak{A}$ распознает дерево $t \in T_\Sigma(X)$ с коэффициентом $(||\mathfrak{A}||, t)$, как следует ниже, недетерминированным образом.

В корне дерева t автомат $\mathfrak{A}$ может находиться в любом *начальном состоянии* $i \in I$, то есть в состоянии с $(S, i) \neq 0$. Опишем теперь *вычисление*, начинающееся в начальном состоянии $i_0 \in I$, и его *вес*. Если в процедуре распознавания $\mathfrak{A}$ анализирует корень поддерева в t вида $\omega(t_1, \ldots, t_k)$, $\omega \in \Sigma_k$, $k \geqslant 1$, в состоянии i и $(M_{i,(i_1,\ldots,i_m)}, \omega(y_1, \ldots, y_k)) = a_i \neq 0$, то $\mathfrak{A}$ переходит одновременно в состояния $i_1, \ldots, i_k$ в корнях $t_1, \ldots, t_k$ соответственно. Если в процедуре распознавания $\mathfrak{A}$ анализирует лист дерева t, маркированный посредством $\omega \in \Sigma_0 \cup X$ в состоянии i и $(P_i, \omega) = a_i \neq 0$ или $(M_{i,(i_1,\ldots,i_m)}, \omega) = a_i \neq 0$ для некоторых $i_1, \ldots, i_m \in I$, то $\mathfrak{A}$ завершает эту ветвь вычислений. Если в процедуре распознавания $\mathfrak{A}$ анализирует корень поддерева в t в состоянии i и $(M_{i,(i_1,\ldots,i_m)}, y_1) = a_i \neq 0$, то $\mathfrak{A}$ переходит в состояние i_1 и снова анализирует корень этого поддерева.

Вес такого вычисления, начинающегося в начальном состоянии i_0, равен произведению (S, i_0) со всеми элементами полукольца a_i, встречающимися в описанной выше процедуре. Коэффициент $(||\mathfrak{A}||, t)$ равен тогда сумме всех весов всех возможных вычислений.

Проанализируем случай, когда A — полукольцо $\mathbb{N}^\infty$, то есть рассмотрим ряд деревьев в $\mathbb{N}^\infty\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$. Элементарный автомат над деревьями называется 1-*элементарным*, если все коэффициенты a_ω, a в (i), a_ω в (ii) и d в (iii) принадлежат множеству $\{0,1\}$. Согласно [50], предложение 3.1, коэффициент $(||\mathfrak{A}||, t)$ поведения автомата $\mathfrak{A}$ равен числу (возможно ∞) различных вычислений для t.

Теорема 3.1. *Рассмотрим 1-элементарный автомат над деревьями $\mathfrak{A}$, и пусть $d(t)$, $t \in T_\Sigma(X)$, есть количество (возможно, ∞) различных вычислений автомата $\mathfrak{A}$ для t. Тогда*

$$||\mathfrak{A}|| = \sum_{t \in T_\Sigma(X)} d(t)t \in \mathbb{N}^\infty\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle\,.$$

Теперь обратимся к системам.

Системой (с переменными в $Z = \{z_i \mid i \in I\}$) назовем систему формальных уравнений $z_i = p_i$, $i \in I$, I — произвольное множество индексов, где каждый p_i лежит в $A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z_i)\rangle\rangle$. Здесь Z_i для каждого $i \in I$ есть конечное подмножество в Z такое, что $|Z_i| \leqslant m$ для некоторого $m \geqslant 0$. Система может быть записана в матричных обозначениях как $z = p(z)$. Здесь z и p обозначают векторы, i-е компоненты которых есть z_i и p_i соответственно, $i \in I$. *Решение* системы $z = p(z)$ определяется как $\sigma \in (A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle)^{I\times 1}$ такое, что $\sigma_i = p_i[\sigma/z]$, $i \in I$. Решение σ системы $z = p(z)$ называется *наименьшим* решением, если $\sigma \leqslant \tau$ для всех решений τ системы $z = p(z)$.

Аппроксимирующая последовательность $(\sigma^j \mid j \in \mathbb{N})$, $\sigma^j \in (A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle)^{I\times 1}$, $j \geqslant 0$, *ассоциированная с системой* $z = p(z)$, определяется следующим образом: $\sigma_i^0 = 0, \sigma_i^{j+1} = p_i[\sigma/z], j \geqslant 0$.

Так как $\sigma^j \leqslant \sigma^{j+1}$ для всех j и $(A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle)^{I\times 1}$ имеет точные верхние грани всех направленных множеств, точная верхняя грань $\sigma = \sup(\sigma^j \mid j \in \mathbb{N})$ этой аппроксимирующей последовательности существует. Более того, она — наименьшее решение системы $z = p(z)$.

Наши системы являются обобщением систем линейных уравнений в [8]: мы допускаем бесконечное число уравнений, а правые части уравнений — ряды деревьев вместо многочленов простых деревьев. Система $z_i = p_i$, $i \in I$, называется *правильной*, если $(p_i, z_j) = 0$ для всех $z_j \in Z_i$, $i \in I$. Она называется *конечной*, если I конечно.

Теорема 3.2. *Для каждой системы существует правильная система с тем же наименьшим решением. Правильная система имеет единственное решение.*

Доказательство. Рассмотрим систему $z = p$, как определено выше. Запишем ее в виде $z = Mz + r$, где $M \in A^{I\times I}$ и $(r_i, z_j) = 0$ для $z_j \in Z_i$, $i \in I$. Тогда по диагональному тождеству (предложение 2.10 ч. II [3]) системы $z = Mz + r$ и $z = M^*r$ имеют одно и то же наименьшее решение и, по построению, $z = M^*r$ — правильная система. Путем модификации доказательства 6.1 в [8] доказывается второе утверждение нашей теоремы. Очевидно, что это единственное решение является в то же время наименьшим решением. □

Покажем теперь, что автоматы над деревьями и системы являются механизмами с равными возможностями. Для данного автомата над деревьями $\mathfrak{A} = (I, M, S, P)$, определенного выше, построим систему с переменными в $Z = \{z_i \mid i \in I\}$:

$$z_i = \sum_{i_1,\dots,i_m \in I} M_{i,(i_1,\dots,i_m)}(z_{i_1},\dots,z_{i_m}) + P_i\,, \quad i \in I\,.$$

Здесь мы подставили переменные $z_{i_1},\dots,z_{i_m}$ вместо переменных $y_1,\dots,y_m$ в $M_{i,(i_1,\dots,i_m)}(y_1,\dots,y_m)$. В матричных обозначениях эта система может быть записана как $z = M(z,\dots,z) + P$. Здесь z есть $I \times 1$-вектор, i-й компонентой которого является переменная z_i, $i \in I$.

Как и ранее, аппроксимирующие последовательности, ассоциированные с этой системой и с автоматом над деревьями $\mathfrak{A}$, совпадают. Рассмотрим теперь систему с переменными в $\{z_0\} \cup Z$:

$$z_0 = \sum_{i \in I} S_i(z_i), \qquad z = M(z,\dots,z) + P\,.$$

Тогда компонента z_0 ее наименьшего решения равна $||\mathfrak{A}||$.

Обратно, рассмотрим систему $z = p(z)$, определенную, как описано выше. Пусть $Z_i = \{z_{i_1},\dots,z_{i_k}\}$, $i \in I$, и $p_i = p_i(z_{i_1},\dots,z_{i_k})$, $k \leqslant m$. Построим теперь автомат над деревьями $\mathfrak{A} = (Z, M, S, 0)$, где для всех $i, j_1,\dots,j_m \in I$

$$\begin{aligned} &M_{z_i,(z_{j_1},\dots,z_{j_m})}(y_1,\dots,y_m) = \\ &\quad = \delta_{i,j_m}\delta_{j_m,j_{m-1}}\cdots\delta_{j_{k+2},j_{k+1}}\delta_{j_k,i_k}\cdots\delta_{j_1,i_1} p_i(y_1,\dots,y_k)\,. \end{aligned}$$

Выберем $z_{i_0} \in Z$, и пусть $S_{z_{i_0}}(y_1) = y_1$, $S_{z_i}(y_1) = 0$ для $z_i \neq z_{i_0}$.

Пусть $(\sigma^j \mid j \in \mathbb{N})$ и $(\tau^j \mid j \in \mathbb{N})$ — аппроксимирующие последовательности, ассоциированные с $z = p(z)$ и $\mathfrak{A}$ соответственно. Покажем это индукцией по j, что $\sigma^j = \tau^j$ для $j \geqslant 0$. Случай $j = 0$ очевиден, и мы будем исходить из условия $j > 0$. Получим тогда для всех $i \in I$:

$$\begin{aligned} &\tau^j_{z_i} = M(\tau^{j-1},\dots,\tau^{j-1})_{z_i} = \\ &= \textstyle\sum_{j_1,\dots,j_m \in I} M_{z_i,(z_{j_1},\dots,z_{j_m})}(\tau^{j-1}_{z_{j_1}},\dots,\tau^{j-1}_{z_{j_m}}) = \\ &= \textstyle\sum_{j_1,\dots,j_m \in I} \delta_{i,j_m}\delta_{j_m,j_{m-1}}\cdots\delta_{j_{k+2},j_{k+1}}\delta_{j_k,i_k}\cdots\delta_{j_1,i_1} p_i(\tau^{j-1}_{z_{j_1}},\dots,\tau^{j-1}_{z_{j_k}}) = \\ &= p_i(\tau^{j-1}_{z_{i_1}},\dots,\tau^{j-1}_{z_{i_k}}) = p_i(\sigma^{j-1}_{z_{i_1}},\dots,\sigma^{j-1}_{z_{i_k}}) = \sigma^j_i\,. \end{aligned}$$

Поэтому $||\mathfrak{A}||$ равно компоненте z_{i_0} наименьшего решения $z = p(z)$.

Заметим, что для $k = 0$ мы могли бы подставлять p_i в P_{z_i} вместо $M_{z_i,(z_i,\dots,z_i)}$.

Теорема 3.3 суммирует приведенные выше рассуждения (см. также [42], теорема 2.3, и [37], следствие 3.9).

Теорема 3.3. *Степенной ряд $s \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ является компонентой наименьшего решения системы тогда и только тогда, когда s — поведение автомата над деревьями.*

Рассмотрим полиномиальные автоматы над деревьями и полиномиальные системы и покажем, что это механизмы равной возможности. Автомат над деревьями $\mathfrak{A} = (I, M, S, P)$ называется *полиномиальным*, если удовлетворяются следующие условия:

(i) элементы матрицы M — *полиномы* в $A\langle T_\Sigma(X \cup Y_m)\rangle$;

(ii) элементы вектора начальных состояний S имеют вид $S_i = d_i y_1$, $d_i \in A$, $i \in I$;

(iii) элементы вектора конечных состояний — *полиномы* в $A\langle T_\Sigma(X)\rangle$.

Система (с переменными в Z) $z_i = p_i$, $i \in I$, называется *полиномиальной*, если каждый p_i есть *полином* в $A\langle T_\Sigma(X \cup Z_i)\rangle$, $i \in I$.

Те же построения, что и в доказательстве теоремы 3.3, доказывают теорему (см. также [42], теорема 2.4, и [37], следствие 4.4).

Теорема 3.4. *Степенной ряд $s \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ — компонента наименьшего решения полиномиальной системы тогда и только тогда, когда s — поведение полиномиального автомата над деревьями.*

Система $z_i = p_i$, $i \in I$, называется *элементарной*, если p_i является суммой слагаемых следующего вида:

(i) $a\omega(z_{i_1}, \ldots, z_{i_k})$, $a \in A$, $\omega \in \Sigma_k$, $i_1, \ldots, i_k \in I$, $1 \leqslant k \leqslant m$, для некоторого $m \geqslant 1$;

(ii) $a\omega$, $a \in A$, $\omega \in \Sigma_0 \cup X$;

(iii) az_i, $a \in A$, $i \in I$.

Сравните следующую теорему с теоремой 4.2 в [37].

Теорема 3.5. *Пусть $s \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ — компонента наименьшего решения конечной полиномиальной системы. Тогда существует такая конечная полиномиальная система, являющаяся элементарной и правильной, что s — компонента ее наименьшего решения.*

Доказательство. По теореме 3.2 и лемме 6.3 в [8]. □

Следствие 3.6. *Следующие утверждения о формальных рядах деревьев в $A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ эквивалентны:*

(i) s — компонента наименьшего решения конечной полиномиальной системы;

(ii) s — компонента единственного решения конечной полиномиальной системы, а также элементарной и правильной;

(iii) s — поведение конечного полиномиального автомата над деревьями;

(iv) s — поведение конечного полиномиального автомата над деревьями с одним начальным состоянием веса 1, а также элементарным и правильным.

Доказательство. По теоремам 3.5 и 3.4 утверждения (i), (ii) и (iii) эквивалентны. По построению в доказательстве теоремы 3.3 утверждение (iv) выводится из утверждения (iii). □

Если формальный ряд деревьев в $A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ удовлетворяет одному и, следовательно, всем утверждениям следствия 3.6, то мы будем называть его *распознаваемым*. В случае полей это то же самое понятие распознаваемости, что и введенное в [8]. Совокупность всех распознаваемых рядов деревьев в $A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ обозначается $A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$. В теории языков над деревьями распознаваемые языки над деревьями определены только для *конечных* алфавитов Σ и X. Мы допускаем также *бесконечные* алфавиты Σ и X. Это объясняется тем, что для $s \in A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ существуют конечные алфавиты Σ' и X', $\Sigma' \subseteq \Sigma$, $X' \subseteq X$ такие, что $\mathrm{supp}(s) \subseteq T_{\Sigma'}(X')$. Кроме того,

$$A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle = \bigcup_{\Sigma'\subseteq\Sigma \text{ finite},\, X'\subseteq X \text{ finite}} A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_{\Sigma'}(X')\rangle\rangle\,.$$

Пример 3.1.[1] (см. [8], примеры 6.2 и 4.2). Нашим базовым полукольцом будет $\mathbb{Z}$, полукольцо целых чисел. Пусть $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, $\Sigma_1 = \{\ominus\}$, $\Sigma_2 = \{\oplus, \otimes\}$. Будем вычислять арифметические выражения с операторами $\ominus, \oplus, \otimes$ и операндами из алфавита листьев X.

Определим интерпретацию функции *eval* от элементов из X, то есть $\mathrm{eval} : X \to \mathbb{Z}$. Продолжим ее до отображения $\mathrm{eval} : T_\Sigma(X) \to \mathbb{Z}$, положив $\mathrm{eval}(\ominus(t)) = -\mathrm{eval}(t)$, $\mathrm{eval}(\oplus(t_1,t_2)) = \mathrm{eval}(t_1) + \mathrm{eval}(t_2)$, $\mathrm{eval}(\otimes(t_1,t_2)) = \mathrm{eval}(t_1)\cdot\mathrm{eval}(t_2)$ для $t, t_1, t_2 \in T_\Sigma(X)$. Тогда $\mathrm{eval} = \sum_{t\in T_\Sigma(X)} \mathrm{eval}(t)t$ есть формальный ряд деревьев $\mathbb{Z}\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$.

Рассмотрим правильную систему

$$\begin{aligned} z_1 &= \oplus(z_1,z_2) + \oplus(z_2,z_1) + \otimes(z_1,z_1) + (-1)\ominus(z_1) + \textstyle\sum_{x\in X}\mathrm{eval}(x)x\,,\\ z_2 &= \oplus(z_2,z_2) + \otimes(z_2,z_2) + \ominus(z_2) + \textstyle\sum_{x\in X} x\,. \end{aligned}$$

Пусть (σ_1, σ_2) — ее единственное решение. Тогда мы утверждаем, что $\sigma_1 = \mathrm{eval}$, $\sigma_2 = \mathrm{char}$, где $\mathrm{char} = \sum_{t\in T_\Sigma(X)} t$. Утверждение доказывается подстановкой $(\mathrm{eval}, \mathrm{char})$ в уравнения системы:

$$\begin{aligned} &\oplus(\mathrm{eval},\mathrm{char}) + \oplus(\mathrm{char},\mathrm{eval}) + \otimes(\mathrm{eval},\mathrm{eval}) -\\ &\qquad - \ominus(\mathrm{eval}) + \textstyle\sum_{x\in X}\mathrm{eval}(x)x =\\ &= \textstyle\sum_{t_1,t_2\in T_\Sigma(X)}\mathrm{eval}(t_1)\oplus(t_1,t_2) + \sum_{t_1,t_2\in T_\Sigma(X)}\mathrm{eval}(t_2)\oplus(t_1,t_2) +\\ &\qquad + \textstyle\sum_{t_1,t_2\in T_\Sigma(X)}\mathrm{eval}(t_1)\mathrm{eval}(t_2)\otimes(t_1,t_2) + \sum_{t\in T_\Sigma(X)} -\\ &\qquad - \mathrm{eval}(t)\ominus t + \textstyle\sum_{x\in X}\mathrm{eval}(x)x =\\ &= \textstyle\sum_{t_1,t_2\in T_\Sigma(X)}\mathrm{eval}(\oplus(t_1,t_2))\oplus(t_1,t_2) +\\ &\qquad + \textstyle\sum_{t_1,t_2\in T_\Sigma(X)}\mathrm{eval}(\otimes(t_1,t_2))\otimes(t_1,t_2) +\\ &\qquad + \textstyle\sum_{t\in T_\Sigma(X)}\mathrm{eval}(\ominus(t))\ominus t + \sum_{x\in X}\mathrm{eval}(x)x =\\ &= \textstyle\sum_{t\in T_\Sigma(X)}\mathrm{eval}(t)t = \mathrm{eval}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\oplus(\mathrm{char},\mathrm{char}) + \otimes(\mathrm{char},\mathrm{char}) + \ominus(\mathrm{char}) + \textstyle\sum_{x\in X} x =\\ &\qquad = \textstyle\sum_{t_1,t_2\in T_\Sigma(X)}\oplus(t_1,t_2) + \sum_{t_1,t_2\in T_\Sigma(X)}\otimes(t_1,t_2) +\\ &\qquad + \textstyle\sum_{t\in T_\Sigma(X)}\ominus(t) + \sum_{x\in X} x = \mathrm{char}\,. \end{aligned}$$

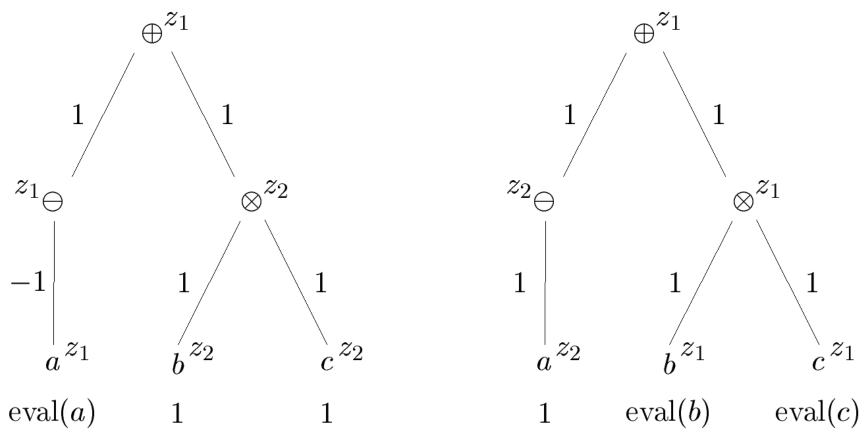
[1] В примерах мы часто нарушаем наше соглашение о том, что базовое полукольцо непрерывно.

Рассмотрим конечный автомат над деревьями $\mathfrak{A} = (Q, M, S, P)$, где $Q = \{z_1, z_2\}$, $S_{z_1} = y_1$, $S_{z_2} = 0$, $P_{z_1} = \sum_{x\in\Sigma} \mathrm{eval}(x)x$, $P_{z_2} = \sum_{x\in\Sigma} x$, и ненулевые элементы матрицы M заданы как

$$\begin{array}{lcllcl}
M_{z_1,(z_1,z_1)} & = & (-1) \ominus (y_1), & M_{z_2,(z_2,z_2)} & = & \ominus(y_1), \\
M_{z_1,(z_1,z_1)} & = & \otimes(y_1, y_2), & M_{z_1,(z_1,z_2)} & = & \oplus(y_1, y_2), \\
M_{z_1,(z_2,z_1)} & = & \oplus(y_1, y_2), & M_{z_2,(z_2,z_2)} & = & \oplus(y_1, y_2) + \otimes(y_1, y_2)\,.
\end{array}$$

Тогда получим $||\mathfrak{A}|| = \sigma_1 = \mathrm{eval}$.

Пусть $X = \{a, b, c\}$ and $t = \oplus(\ominus a, \otimes(b, c))$. Тогда существуют два вычисления для t, начинающиеся в z_1 и не начинающиеся в z_2. Эти два вычисления заданы следующей диаграммой:



Следовательно, $(||\mathfrak{A}||, t) = -\mathrm{eval}(a) + \mathrm{eval}(b)\mathrm{eval}(c)$. $\square$

Пример 3.1 дает, таким образом, интуитивное ощущение того, как конечный недетерминированный root-to-frontier распознаватель на деревьях моделируется конечным автоматом на деревьях над полукольцом $\mathbb{B}$.

Теорема 3.7 ([37], теорема 3.6). *Для каждого конечного недетерминированного root-to-frontier распознавателя на деревьях* $\mathbf{A}$ *в смысле [28] существует элементарный правильный конечный полиномиальный автомат на деревьях* $\mathfrak{A}$ *над булевым полукольцом* $\mathbb{B}$ *такой, что* $||\mathfrak{A}|| = T(\mathbf{A})$, *и обратно.*

4. Свойства замыкания и теорема Клини для распознаваемых рядов деревьев

В этой главе мы докажем теорему Клини для распознаваемых рядов деревьев (см. [14; 28; 29; 32; 36; 53]). Согласно этой теореме Клини, можно определить выражения, аналогичные регулярным выражениям, которые характеризуют распознаваемые ряды деревьев. Покажем сначала, что $A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ — дистрибутивная Σ-алгебра. Этот результат является частным случаем теоремы 6.5 в [37].

Теорема 4.1. $\langle A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle, +, 0, \bar{\Sigma}\rangle$ *— дистрибутивная Σ-алгебра, которая содержит $A\langle T_\Sigma(X)\rangle$ и замкнута относительно скалярного произведения.*

Доказательство. Пусть $s_j \in A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ — первые компоненты единственного решения элементарных правильных конечных полиномиальных систем (записанных в матричных обозначениях) $z^j = p^j(z^j)$, $1 \leqslant j \leqslant m$ с попарно дизъюнктными алфавитами переменных, σ^j — единственное решение $z^j = p^j(z^j)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $\sigma_1^j = s_j$.

(i) Рассмотрим систему $z_0 = p_1^1(z^1) + p_1^2(z^2), z^1 = p^1(z^1), z^2 = p^2(z^2)$. Она также элементарная и правильная. Мы утверждаем, что ее единственное решение есть $(s_1 + s_2, \sigma^1, \sigma^2)$, и покажем это подстановкой $s_1 + s_2$ в z_0, σ^1 в z^1 и σ^2 в z^2: $p_1^1[\sigma^1/z^1] + p_1^2[\sigma^2/z^2] = \sigma_1^1 + \sigma_1^2 = s_1 + s_2, p^j[\sigma^j/z^j] = \sigma^j, j = 1, 2$.

(ii) Пусть $\omega \in \Sigma_k$, $k \geqslant 0$, и рассмотрим систему $z_0 = \omega(z_1^1, \ldots, z_1^k), z^j = p^j(z^j), 1 \leqslant j \leqslant k$. Она также элементарная и правильная. Мы утверждаем, что ее единственное решение есть $(\bar{\omega}(s_1, \ldots, s_k), \sigma^1, \ldots, \sigma^k)$, и опять покажем это подстановкой компонент требуемого решения в уравнения: $\bar{\omega}(\sigma_1^1, \ldots, \sigma_1^k) = \bar{\omega}(s_1, \ldots, s_k), p^j[\sigma^j/z^j] = \sigma^j, 1 \leqslant j \leqslant k$.

(iii) Пусть $a \in A$ и рассмотрим систему $z_0 = ap_1^1(z^1), z^1 = p^1(z^1)$. Она также является элементарной и правильной. Мы утверждаем, что ее единственное решение есть (as_1, σ^1), и покажем это подстановкой $ap_1^1[\sigma^1/z^1] = as_1, p^1[\sigma^1/z^1] = \sigma^1$.

(iv) $s \in A\langle T_\Sigma(X)\rangle$ есть единственное решение системы $z_0 = s$.

Поскольку $A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ содержит $A\langle T_\Sigma(X)\rangle$ и замкнута относительно сложения и конкатенации с вершиной, то она является Σ-подалгеброй в $A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$. Следовательно, она является дистрибутивной Σ-алгеброй. □

В дальнейшем $Z = \{z_j \mid j \geqslant 1\}$, $Z_n = \{z_j \mid 1 \leqslant j \leqslant n\}$, $Z_0 = \emptyset$. Введем следующие обозначения: пусть $s \in A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z_n)\rangle\rangle$. Тогда обозначим наименьшее $\sigma \in A\langle\langle T_\Sigma(X \cup \{z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_n\})\rangle\rangle$ такое, что $s(z_1, \ldots, z_{i-1}, \sigma, z_{i+1}, \ldots, z_n) = \sigma$ через $\mu z_i.s(z_1, \ldots, z_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Это означает, что $\mu z_i.s$ — наименьшее решение системы $z_i = s(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_n)$; эта система состоит только из одного уравнения и ее единственной переменной является z_i.

Операция $\mu z.s$, где $z \in Z$ and $s \in A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$, является некоторой модификацией и обобщением (до полуколец) операции «звездочка Клини» для языков над деревьями, которая определена в работе [29]. Связь этих двух операций в случае булева полукольца объясняет ниже теорема 4.7.

Дистрибутивная Σ-алгебра $\langle V, +, 0, \bar{\Sigma}\rangle$, $V \subseteq A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$ называется *рационально замкнутой*, если V замкнута относительно скалярного произведения и для всех $s \in V$ и $z \in Z$ формальный ряд деревьев $\mu z.s$ также лежит в V. По определению, $A^{\mathrm{rat}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$ есть наименьшая рационально замкнутая дистрибутивная Σ-алгебра, содержащая $A\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle$. Заметим, что для каждого $s \in A^{\mathrm{rat}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$ существует $m \geqslant 0$ такое, что $\mathrm{supp}(s) \subseteq T_\Sigma(X \cup Z_m)$.

Докажем, что $A^{\mathrm{rat}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle = A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$. Перед доказательством главного результата этой главы применим некоторые результаты теории неподвижных точек непрерывных функций к системам (см. предварительные сведения части II [3]).

(1) *Параметрическое тождество.* Пусть $r \in A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y)\rangle\rangle$, и обозначим $r' = \mu y.r$, $y \in Y$. Пусть $y_i \neq y$ и $\tau_i \in A\langle\langle T_\Sigma(X \cup (Y - \{y\}))\rangle\rangle$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда $r'[\tau_1/y_1, \ldots, \tau_n/y_n] = \mu y.(r[\tau_1/y_1, \ldots, \tau_n/y_n])$.

(2) *Правило Бекича — Де Баккера — Скотта (Bekić–De Bakker–Scott).* Рассмотрим систему $y_i = r_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $r_i \in A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y)\rangle\rangle$ с переменными $y_1, \ldots, y_n$ и $m \in \{1, \ldots, n-1\}$. Пусть $(\sigma_{m+1}, \ldots, \sigma_n)$ — наименьшее решение системы $y_i = r_i$, $m+1 \leqslant i \leqslant n$. Кроме того, пусть $(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ — наименьшее решение системы $y_i = r_i[\sigma_{m+1}/y_{m+1}, \ldots, \sigma_n/y_n]$, $1 \leqslant i \leq m$. Тогда

$$(\tau_1, \ldots, \tau_m, \sigma_{m+1}[\tau_1/y_1, \ldots, \tau_m/y_m], \ldots, \sigma_n[\tau_1/y_1, \ldots, \tau_m/y_m])$$

есть наименьшее решение первоначальной системы $y_i = r_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Покажем сначала, что $A^{\mathrm{rat}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$ замкнуто относительно подстановки.

Теорема 4.2. *Пусть $s(z_1, \ldots, z_n)$ и σ_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, лежат в $A^{\mathrm{rat}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$. Тогда $s(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ лежит в $A^{\mathrm{rat}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$.*

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по числу применений операций $\bar{\omega} \in \bar{\Sigma}$, $+$, скалярного умножения и μ для порождения $s(z_1, \ldots, z_n)$ из многочленов.

(i) Пусть $s(z_1, \ldots, z_n) \in A\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle$. Так как $s(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ порождается из $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ путем суммирования, $\bar{\omega} \in \bar{\Sigma}$ и скалярного умножения, мы заключаем, что $s(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in A^{\mathrm{rat}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$.

(ii) Случаи сложения, конкатенации с вершиной и скалярного умножения очевидны. Таким образом, докажем только случай оператора μ. Предположим, что для $1 \leqslant j \leqslant n$, $\mathrm{supp}(\sigma_j) \subseteq T_\Sigma(X \cup Z_m)$ для некоторого $m \geqslant 0$. Выберем $z = z_k \in Z$ с $k > m$. Без уменьшения общности предположим, что $s(z_1, \ldots, z_n) = \mu z.r(z_1, \ldots, z_n, z)$ (переменная z — «граница»), где $r(z_1, \ldots, z_n, z) \in A^{\mathrm{rat}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$. По предположению индукции имеем $r(\sigma_1, \ldots, \sigma_n, z) \in A^{\mathrm{rat}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$. Следовательно, $s(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \mu z.r(\sigma_1, \ldots, \sigma_n, z) \in A^{\mathrm{rat}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$ по параметрическому тождеству. □

Теорема 4.3 ([14], раздел 5). $A^{\mathrm{rat}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle = A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$.

Доказательство.

(i) Покажем, что $A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle \subseteq A^{\mathrm{rat}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$. Доказательство проведем индукцией по числу переменных конечной полиномиальной системы. Используем следующее предположение индукции: если $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $\tau_i \in A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$, $1 \leqslant i \leqslant n$, является наименьшим решением конечной полиномиальной системы $z_i = q_i(z_1, \ldots, z_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, с n переменными $z_1, \ldots, z_n$, где $q_i(z_1, \ldots, z_n) \in A\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle$, то $\tau_i \in A^{\mathrm{rat}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$.

(1) Пусть $n = 1$ и предположим, что $s \in A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$ — наименьшее решение конечной полиномиальной системы $z_1 = p(z_1)$. Так как $p(z_1)$ – многочлен, то $s = \mu z_1.p(z_1) \in A^{\mathrm{rat}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$.

(2) Возьмем конечную полиномиальную систему $z_i = q_i(z_1, \ldots, z_{n+1})$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, $n \geqslant 1$. Пусть $\tau(z_1) = (\tau_2(z_1), \ldots, \tau_{n+1}(z_1))$, $\tau_i(z_1) \in A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$, $2 \leqslant i \leqslant n+1$, — наименьшее решение конечной полиномиальной системы $z_i = q_i(z_1, \ldots, z_{n+1})$, $2 \leqslant i \leqslant n+1$. По предположению индукции заключаем, что $\tau_i(z_1) \in A^{\mathrm{rat}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$. Так как $q_1(z_1, \ldots, z_{n+1})$ — полином, то он принадлежит $A^{\mathrm{rat}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$. По теореме 4.2 $p(z_1) = q_1(z_1, \tau_2(z_1), \ldots, \tau_{n+1}(z_1))$ лежит в $A^{\mathrm{rat}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$. Тогда $\mu z_1.p(z_1)$ лежит в $A^{\mathrm{rat}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$. По теореме 4.2 $\tau_i(\mu z_1.p(z_1)) \in A^{\mathrm{rat}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$, $2 \leqslant i \leqslant n+1$. По правилу Бекича — Де Баккера — Скотта, $(\mu z_1.p(z_1), \tau_2(\mu z_1.p(z_1)), \ldots, \tau_{n+1}(\mu z_1.p(z_1)))$ — наименьшее решение конечной полиномиальной системы $z_i = q_i(z_1, \ldots, z_{n+1})$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$. Следовательно, компоненты наименьшего решения системы $z_i = q_i(z_1, \ldots, z_{n+1})$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, лежат в $A^{\mathrm{rat}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$.

(ii) Покажем, что $A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$ есть рационально замкнутая дистрибутивная Σ-алгебра, содержащая $A\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle$. Это повлечет, что $A^{\mathrm{rat}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle \subseteq A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$. По теореме 4.1 (с $X \cup Z$ вместо X) $A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$ есть дистрибутивная Σ-алгебра, замкнутая относительно скалярного произведения и содержащая $A\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle$. Следовательно, нам остается только показать, что $\mu z.s$, $s \in A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$, лежит в $A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$. Пусть $(\tau_2(z_1), \ldots, \tau_{n+1}(z_1))$ является наименьшим решением конечной полиномиальной системы $z_i = p_i(z_1, \ldots, z_{n+1})$, $2 \leqslant i \leqslant n+1$, и возьмем $s = \tau_2(z_1)$. Рассмотрим теперь конечную полиномиальную систему $z_1 = p_2(z_1, \ldots, z_{n+1})$, $z_i = p_i(z_1, \ldots, z_{n+1})$, $2 \leqslant i \leqslant n+1$. Тогда, по правилу Бекича—Де Баккера—Скотта, $\mu z_1.\tau_2(z_1)$ является первой компонентой ее наименьшего решения. $\square$

Аналогично рациональным выражениям (см. ч. II [3], раздел 3) и ΣZ-выражениям (см. [29]) определим рациональные выражения рядов деревьев. Пусть A, Σ, X, Z и $U = \{+, \cdot, \mu, [,]\}$ попарно дизъюнктны. Слово E над $A \cup \Sigma \cup X \cup Z \cup U$ называется *рациональным выражением рядов деревьев* над (A, Σ, X, Z), если:

(i) E — символ из $X \cup Z$, или

(ii) E — одна из следующих форм: $[E_1 + E_2]$, $\omega(E_1, \ldots, E_k)$, aE_1 или $\mu z.E_1$, где $E_1, E_2, \ldots, E_k$ — рациональные выражения рядов деревьев над (A, Σ, X, Z), $\omega \in \Sigma_k$, $k \geqslant 0$, $a \in A$ и $z \in Z$.

Каждое рациональное выражение рядов деревьев E над (A, Σ, X, Z) обозначает формальный ряд деревьев $|E|$ в $A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$ в соответствии со следующими соглашениями.

(i) Если E лежит в $X \cup Z$, то E обозначает ряд деревьев E, то есть $|E| = E$.

(ii) Для рациональных выражений рядов деревьев $E_1, \ldots, E_k$ над (A, Σ, X, Z), $\omega \in \Sigma_k$, $k \geqslant 0$, $a \in A$, $z \in Z$, определим $|[E_1 + E_2]| = |E_1| + |E_2|$, $|\omega(E_1, \ldots, E_k)| = \bar{\omega}(|E_1|, \ldots, |E_k|)$, $|aE_1| = a|E_1|$, $|\mu z.E_1| = \mu z.|E_1|$.

Пусть φ_1 и φ_2 — отображения из множества рациональных выражений рядов деревьев над (A, Σ, X, Z) во множество конечных подмножеств в $X \cup Z$, определенные следующим образом.

(i) $\varphi_1(x) = \emptyset$, $\varphi_2(x) = \{x\}$, $x \in X$,
$\varphi_1(z) = \{z\}$, $\varphi_2(z) = \emptyset$, $z \in Z$.

(ii) $\varphi_j([E_1 + E_2]) = \varphi_j(E_1) \cup \varphi_j(E_2)$,
$\varphi_j(\omega(E_1, \dots, E_k)) = \varphi_j(E_1) \cup \dots \cup \varphi_j(E_k)$,
$\varphi_j(aE_1) = \varphi_j(E_1)$, $a \neq 0$, $\varphi_j(0E_1) = \emptyset$, $a = 0$,
$\varphi_j(\mu z.E_1) = \varphi_j(E_1) - \{z\}$, $j = 1, 2$
для рациональных выражений рядов деревьев $E_1, E_2, \dots, E_k$ над (A, Σ, X, Z), $\omega \in \Sigma_k$, $k \geqslant 0$, $a \in A$, и $z \in Z$.

Данное рациональное выражение рядов деревьев E над (A, Σ, X, Z), $\varphi_1(E) \subseteq Z$, содержит «свободные переменные» в E, так как $\varphi_2(E) \subseteq X$ содержит используемые символы алфавита листьев X. Это означает, что $|E|$ — формальный ряд деревьев в $A\langle\langle T_\Sigma(\varphi_2(E) \cup \cup \varphi_1(E))\rangle\rangle$. Из теоремы 4.3 и определений, данных выше, вытекают некоторые следствия.

Следствие 4.4. *Ряд деревьев s принадлежит $A^{\mathrm{rat}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle \cap \cap A\langle\langle T_\Sigma(X' \cup Z')\rangle\rangle$, где $X' \subseteq X$, $Z' \subseteq Z$, тогда и только тогда, когда существует рациональное выражение рядов деревьев E над (A, Σ, X, Z) такое, что $s = |E|$, где $\varphi_2(E) = X'$ и $\varphi_1(E) = Z'$.*

Следствие 4.5. *Ряд деревьев s принадлежит $A^{\mathrm{rat}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle \cap \cap A\langle\langle T_\Sigma(X')\rangle\rangle$, $X' \subseteq X$, тогда и только тогда, когда существует рациональное выражение рядов деревьев E над (A, Σ, X, Z) такое, что $s = |E|$, где $\varphi_1(E) = \emptyset$ и $\varphi_2(E) = X'$.*

Следствие 4.6. *Ряд деревьев s принадлежит $A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_\Sigma(X')\rangle\rangle$, $X' \subseteq X$, тогда и только тогда, когда существует рациональное выражение рядов деревьев E над (A, Σ, X, Z) такое, что $s = |E|$, где $\varphi_1(E) = \emptyset$ и $\varphi_2(E) = X'$.*

Заметим, что наше следствие 4.4 является более сильным, чем теорема Клини в [14], раздел 5, так как мы можем использовать нашу теорему 4.2 и не нуждаемся в «замыкании относительно подстановки» в определении рационально замкнутой дистрибутивной Σ-алгебры. Суммируем наши результаты в теореме типа теоремы Клини (см. [14]).

Теорема 4.7. *Следующие утверждения о степенном ряде $r \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ эквивалентны:*

(i) r – компонента наименьшего решения конечной полиномиальной системы;

(ii) r – поведение конечного полиномиального автомата над рядами деревьев;

(iii) существует рациональное выражение рядов деревьев E над (A, Σ, X, Z), где $\varphi_1(E) = \emptyset$, такое, что $r = |E|$.

Доказательство. По следствию 3.6 и теореме 4.3. □

В характеризации распознаваемых языков над деревьями в [29] используют следующую операцию замыкания для языка над деревьями $r(y_1, \ldots, y_n, y) \in \mathbb{B}\langle\langle T_\Sigma(X \cup \{y_1, \ldots, y_n, y\})\rangle\rangle$, $y = y_{n+1}$:

$$r^{0,y}(y_1, \ldots, y_n, y) = \{y\},$$
$$r^{j+1,y}(y_1, \ldots, y_n, y) = r(y_1, \ldots, y_n, r^{j,y}(y_1, \ldots, y_n, y)) \cup r^{j,y}(y_1, \ldots, y_n, y),$$
$$j \geqslant 0, r^{*y}(y_1, \ldots, y_n, y) = \bigcup_{j\geqslant 0} r^{j,y}(y_1, \ldots, y_n, y).$$

(Здесь мы используем изоморфизм между $\mathfrak{P}(T_\Sigma(Y))$ и $\mathbb{B}\langle\langle T_\Sigma(Y)\rangle\rangle$.)

Рассмотрим конечную полиномиальную систему над $\mathbb{B}$, содержащую одно уравнение и переменную y_0: $y_0 = r(y_1, \ldots, y_n, y_0) + y$, и обозначим через $(\tau^j(y_1, \ldots, y_n, y) \mid j \geqslant 0)$ ее аппроксимирующую последовательность

$$\begin{aligned}\tau^0(y_1, \ldots, y_n, y) &= 0\,,\\ \tau^{j+1}(y_1, \ldots, y_n, y) &= r(y_1, \ldots, y_n, \tau^j(y_1, \ldots, y_n, y)) + y, j \geqslant 0\,.\end{aligned}$$

С равенством $r^{j+1,y}(y_1, \ldots, y_n, y) = r(y_1, \ldots, y_n, r^{j,y}(y_1, \ldots, y_n, y)) + y, j \geqslant 0$, простое доказательство индукцией по элементам аппроксимирующей последовательности показывает, что для $j \geqslant 0$:

(i) $y \leqslant r^{j,y}(y_1, \ldots, y_n, y)$, $y \leqslant \tau^{j+1}(y_1, \ldots, y_n, y)$;

(ii) $\tau^j(y_1, \ldots, y_n, y) \leqslant r^{j,y}(y_1, \ldots, y_n, y)$;

(iii) $r^{j,y}(y_1, \ldots, y_n, y) \leqslant \tau^{j+1}(y_1, \ldots, y_n, y)$.

Поскольку $r^{j,y}(y_1, \ldots, y_n, y) = \sum_{0\leqslant i\leqslant j} r^{i,y}(y_1, \ldots, y_n, y)$, получим $\sup(\tau^j(y_1, \ldots, y_n, y) \mid j \geqslant 0) = r^{*y}(y_1, \ldots, y_n, y)$. Следовательно, $r^{*y}(y_1, \ldots, y_n, y)$ — наименьшее решение $y_0 = r(y_1, \ldots, y_n, y_0) + y$, то есть $\mu y_0.(r(y_1, \ldots, y_n, y_0) + y) = r^{*y}(y_1, \ldots, y_n, y)$. Эти соображения справедливы не только для $\mathbb{B}$, но и для всех колец идемпотентов.

Бозапалидис [14] предложил заменить $\mu y_0.(r(y_1, \ldots, y_n, y_0)+y)$ на $\mu y.r(y_1, \ldots, y_n, y)$. (Для контекстно-свободных языков Грушка [32] неявно использовал этот оператор замыкания; см. Куих [36].) Мы использовали этот оператор замыкания из [14] в нашей статье. Существенное различие между этими двумя операторами замыкания состоит в том, что $r^{*y}(y_1, \ldots, y_n, y) \in \mathbb{B}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y_n \cup \{y\})\rangle\rangle$, тогда как $\mu y.r(y_1, \ldots, y_n, y) \in \mathbb{B}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y_n)\rangle\rangle$.

Согласно параметрическому тождеству мы даже можем сказать больше: $\mu y.r(y_1, \ldots, y_n, y) = r^{*y}(y_1, \ldots, y_n, 0)$. Следовательно, наша интерпретация рациональных выражений рядов деревьев над $[(\mathbb{B}, \Sigma, X, Z)$, приведенная ниже, отличается от интерпретации в [29].

Каждое рациональное выражение рядов деревьев E над $(\mathbb{B}, \Sigma, X, Z)$ означает язык над деревьями $|E| \subseteq T_\Sigma(X \cup Z)$ в соответствии со следующими соглашениями.

(o) Язык над деревьями, обозначенный символом 0, есть $\emptyset$.

(i) Язык над деревьями, обозначенный символом $x \in X$, есть $\{x\}$.

(ii) Язык над деревьями, обозначенный символом $z \in Z$, есть $\{z\}$.

(iii) Для рациональных выражений рядов деревьев $E_1, E_2, \ldots, E_k$ над $(\mathbb{B}, \Sigma, X, Z)$, $\omega \in \Sigma_k$, $k \geqslant 0$, $z \in Z$: $|[E_1 + E_2]| = |E_1| \cup \cup |E_2|, |\omega(E_1, \ldots, E_k)| = \bar{\omega}(|E_1|, \ldots, |E_k|), |\mu z.E_1| = \mu z.|E_1|$.

В следующей теореме мы используем обозначения из [29].

Теорема 4.8. *Следующие утверждения о языке над деревьями $L \subseteq T_\Sigma(X)$ эквивалентны:*

(i) L порождается регулярной ΣX-грамматикой;

(ii) L распознается недетерминированным конечным root-to-frontier ΣX-распознавателем;

(iii) $L = |E|$, где E — рациональное выражение рядов деревьев над $(\mathbb{B}, \Sigma, X, Z)$ и $\varphi_1(E) = \emptyset$.

Заметим, что теорема 4.8 сильнее, чем предложение 9.3 (теорема Клини) в [29], так как мы не нуждаемся в «замыкании относительно подстановки» для наших выражений над деревьями над $(\mathbb{B}, \Sigma, X, Z)$.

Пример 4.1. Пусть $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, $\Sigma_0 = \{c, d\}$, $\Sigma_1 = \{g\}$, $\Sigma_2 = \{f\}$, $z, z_1 \in Z$, и рассмотрим рациональное выражение рядов деревьев $[g(c) + \mu z_1.[f(c, z_1) + z]]$ над $(\mathbb{B}, \Sigma, X, Z)$. Оно означает

$$|[g(c) + \mu z_1.[f(c, z_1) + z]]| = \\ g(c) + z + f(c, z) + f(c, f(c, z)) + f(c, f(c, f(c, z))) + \ldots$$

Кроме того,

$$|[g(c) + \mu z_1.[f(c, z_1) + d]]| = |[g(c) + \mu z_1.[f(c, z_1) + z]]|[d/z]\,.$$

Сравните это со вторым параграфом [29, с. 21]. □

Исследование частично поддержано акцией Австро-Венгерского научно-педагогического сотрудничества, проект 53OeU1.

Supported by Aktion Österreich-Ungarn, Wissenschafts- und Erziehungs-kooperation, Projekt 53OeU1.

Список литературы

1. *Aho A. V.* Indexed grammars—an extension of context-free grammars // JACM. 1968. V. 15. P. 647–671.

2. *Алешников С. И., Болтнев Ю. Ф., Език З. и др.* Формальные языки и автоматы I: полукольца Конвея и конечные автоматы // Вестник Калининградского государственного университета. 2003. Вып. 3. С. 7—38.

3. *Алешников С. И., Болтнев Ю. Ф., Език З. и др.* Формальные языки и автоматы II: непрерывные полукольца и алгебраические системы // Там же. 2005. Вып. 1—2. С. 19—45.

4. *Алешников С. И., Болтнев Ю. Ф., Език З. и др.* Формальные языки и автоматы III: магазинные автоматы и формальные степенные ряды //

Вестник Российского государственного университета им. И. Канта. 2006. Вып. 10. С. 8—27.

5. *Алешников С. И., Болтнев Ю. Ф., Език З. и др.* Формальные языки и автоматы IV: трансдукторы и абстрактные семейства // Там же. 2008. Вып. 10. С. 6—23.

6. *Алешников С. И., Болтнев Ю. Ф., Език З. и др.* Формальные языки и автоматы V: пары полукольцо-полумодуль Конвея и конечные автоматы // Там же. 2009. Вып. 10. С. 6—41.

7. *Berstel J.* Transductions and Context-Free Languages. Teubner, 1979.

8. *Berstel J., Reutenauer C.* Recognizable formal power series on trees // Theor. Comput. Sci. 1982. Vol. 18. P. 115–148.

9. *Block R. E., Griffing G.* Recognizable formal series on trees and cofree coalgebraic systems // J. of Algebra 1999. Vol. 215. P. 543–573.

10. *Bloom St. L., Ésik Z.* Iteration Theories. EATCS Monographs on Theoretical Computer Science. Springer, 1993.

11. *Bozapalidis S.* Effective construction of the syntactic algebra of a recognizable series on trees // Acta Inf. 1991. Vol. 28. P. 351–363.

12. *Bozapalidis S.* Alphabetic tree relations // Theoret. Comput. Sci. 1992. Vol. 99. P. 177–211.

13. *Bozapalidis S.* Convex algebras, convex modules and formal power series on trees // J. Automata, Languages and Combinatorics 1996. Vol. 1. P. 165–180.

14. *Bozapalidis S.* Equational elements in additive algebras // Theory Comput. Systems 1999. Vol. 32. P. 1–33.

15. *Bozapalidis S.* Context-free series on trees // Information and Computation 2001. Vol. 169. P. 186–229.

16. *Bozapalidis S., Rahonis G.* On two families of forests // Acta Inf. 1994. Vol. 31. P. 235–260.

17. *Bucher W., Maurer H.* Theoretische Grundlagen der Programmiersprachen. B. I. Wissenschaftsverlag, 1984.

18. *Comon H., Dauchet M., Gilleron R., Jaquemard F., Lugiez D., Tison S., Tommasi M.* Tree Automata-Techniques and Applications. Manuscript.

19. *Courcelle B.* Equivalences and transformations of regular systems—Applications to recursive program schemes and grammars // Theor. Comp. Sci. 1986. Vol. 42. P. 1–122.

20. *Engelfriet J.* Bottom-up and top-down tree transformations—a comparison // Math. Systems Theory. 1975. Vol. 9. P. 198–231.

21. *Engelfriet J., Fülöp Z., Vogler H.* Bottom-up and Top-down Tree Series Transducers // J.Automata, Languages and Combinatorics. 2002. Vol. 7. P. 11–70.

22. *Engelfriet J., Schmidt E. M.* IO and OI. I // J. Comput. Systems Sci. 1977. Vol. 15. P. 328–353.

23. *Ésik Z.* Completeness of Park induction // Theor. Comput. Sci. 1997. Vol. 177. P. 217–283.

24. *Ĭsik Z., Kuich W.* Formal tree series // J. Automata, Languages and Combinatorics. 2003. Vol. 8. P. 219–285.

25. *Fischer M. J.* Grammars with macro-like productions // 9th Annual Symposium on Switching and Automata Theory. 1968. P. 131–142.

26. *Fülöp Z., Vogler H.* Syntax-Directed Semantics. Springer, 1998.

27. *Fülöp Z., Vogler H.* Tree series transformations that respect copying // Theory of Computing Systems. 2003. Vol. 36. P. 247–293.

28. *Gécseg F., Steinby M.* Tree Automata. Akademiai Kiado, 1984.

29. *Gécseg F., Steinby M.* Tree Languages / Handbook of Formal Languages. Springer, 1997. Vol. 3. Chapt. 1. P. 1–68.

30. *Ginsburg S.* Algebraic and Automata-Theoretic Properties of Formal Languages. North-Holland, 1975.
31. *Grätzer G.* Universal Algebra. Springer, 1979.
32. *Gruska J.* A characterization of context-free languages // Journal of Computer and System Sciences. 1971. Vol. 5. P. 353–364.
33. *Guessarian I.* Algebraic Semantics // Lect. Notes Comput. Sci. 1981. Vol. 99.
34. *Guessarian I.* Pushdown tree automata. Math. Systems Theory. 1983. Vol. 16. P. 237–263.
35. *Kuich W.* Semirings and formal power series: Their relevance to formal languages and automata theory // Handbook of Formal Languages. Springer, 1997. Vol. 1. Chapt. 9. P. 609–677.
36. *Kuich W.* Gaußian elimination and a characterization of algebraic power series // MFCS 98, Lect. Notes Comput. Sci. 1998. Vol. 1450. P. 512–521.
37. *Kuich W.* Formal power series over trees // Proceedings of the 3rd International Conference Developments in Language Theory. Aristotle University of Thessaloniki, 1998. P. 61–101.
38. *Kuich W.* Tree transducers and formal tree series // Acta Cybernetica. 1999. Vol. 14. P. 135–149.
39. *Kuich W.* Full abstract families of tree series I // Jewels are Forever. Springer, 1999. P. 145–156.
40. *Kuich W.* Abstract families of tree series II // Proceedings of the International Workshop on Grammar Systems 2000. Schlesische Universität Troppau, 2000. P. 347–358.
41. *Kuich W.* Formal series over algebras // Proceedings of MFCS 2000, Lect. Notes Comput. Sci. 1893. Springer, 2000. P. 488-496.
42. *Kuich W.* Pushdown tree automata, algebraic tree systems, and algebraic tree series // Information and Computation. 2001. Vol. 165. P. 69–99.
43. *Kuich W.* Formal power series over sorted algebras // Discrete Math. 2002. Vol. 254. P. 231–258.
44. *Kuich W., Salomaa A.* Semirings, Automata, Languages. EATCS Monographs on Theoretical Computer Science. Vol. 5. Springer, 1986.
45. *Lausch H., Nöbauer W.* Algebra of Polynomials. North-Holland, 1973.
46. *Rounds W. C.* Trees, transducers and transformations. PhD thesis, Stanford University, 1968.
47. *Rounds W. C.* Context-free grammars on trees // ACM Symposium on Theory of Computing. 1969. P. 143–148.
48. *Rounds W. C.* Mappings and grammars on trees // Math. Systems Theory. 1970. Vol. 4. P. 257–287.
49. *Salomaa A.* Formal Languages. Academic Press, 1973.
50. *Seidl H.* Deciding equivalence of finite tree automata // STACS88, Lect. Notes Comput. Sci. 1989. Vol. 349. P. 480–492.
51. *Thatcher J. W.* Generalized^2 sequential machine maps. IBM Research Report RC 2466, 1969.
52. *Thatcher J. W.* Generalized sequential machine maps // J. Comp. Syst. Sci. 1970. Vol. 4. P. 339–367.
53. *Thatcher J. W., Wright J. B.* Generalized finite automata theory with an application to a decision problem of second-order logic // Math. Systems Theory. 1968. Vol. 2. P. 57–81.
54. *Wechler W.* Universal Algebra for Computer Scientists. EATCS Monographs on Computer Science, Vol. 25. Springer, 1992.

Об авторах

Сергей Иванович Алешников — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, e-mail: elliptec@mail.ru.

Юрий Федорович Болтнев — ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, e-mail: boltnev59@list.ru.

Золтан Език — д-р, Сегедский ун-т, Венгрия, e-mail: kuich@ tuwien.ac.at.

Сергей Александрович Ишанов — канд. физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, e-mail: sergey.ishanov@ya.ru.

Вернер Куих — д-р, Венский техн. ун-т, Австрия, e-mail: kuich@ tuwien.ac.at.

Authors

Dr Sergey Aleshnikov – assistant professor, I. Kant Baltic Federal University, e-mail: elliptec@ mail.ru.

Yuriy Boltnev – high instructor, I. Kant Baltic Federal University, e-mail: boltnev59@list.ru.

Dr Zoltán Ésik – University of Szeged, Hungary, e-mail: kuich@ tuwien.ac.at.

Dr Sergey Ishanov – professor, I. Kant Baltic Federal University, e-mail: sergey.ishanov@ya.ru.

Dr Werner Kuich – Technische Universitдt Wien, Austria, e-mail: kuich@ tuwien.ac.at.