ОБ ОСНАЩЕНИЯХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГИПЕРПЛОСКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А.В. С т о л я р о в

(*Чувашский государственный пединститут*)

Задача внутреннего инвариантного оснащения (в смысле А.П.Нордена [1], Э.Картана [2], Э.Бортолотти [3] и т.д.) подмногообразий являлась одной из проблем дифференциальной геометрии. Усилиями ряда геометров (Г.Ф.Лаптев, Н.М.Остиану, М.А.Акивис, В.И.Близникас, Ю.Г.Лумисте, П.И.Швейкин, К.И. Гринцевичюс и т.д.) удалось решить ряд трудных вопросов в этом направлении.

Известно [4], [5], [6], что оснащение в смысле Э.Картана неголономных подмногообразий, погруженных в n-мерное пространство проективной связности $P_{n,n}$, играет существенную роль при изучении проективных и нормальных связностей, индуцируемых на этих подмногообразиях.

В предлагаемой работе рассматриваются три инвариантным образом определяемые оснащения в смысле Э.Картана распределения гиперплоскостных элементов $\Re$, погруженного в пространство проективной связности $P_{n,n}$. В случае взаимной нормализации подмногообразия находится инвариантная связь между ними.

В работе индексы принимают следующие значения:

$$\bar{I},\bar{K},\bar{L}=\overline{0,n};\ I,K,L,P,Q=\overline{1,n};\ i,j,k,s,t=\overline{1,n-1}.$$

Рассмотрим n-мерное пространство проективной связности $P_{n,n}$, определенное Э.Картаном [7] с помощью $(n+1)^2$ форм Пфаффа, подчиненных структурным уравнениям

$$D\omega_{\bar{I}}^{\bar{K}}=\omega_{\bar{I}}^{\bar{L}}\wedge\omega_{\bar{L}}^{\bar{K}}+\frac{1}{2}R_{\bar{I}PQ}^{\bar{K}}\omega_0^P\wedge\omega_0^Q,\omega_{\bar{L}}^{\bar{L}}=0. \qquad (1)$$

В уравнениях (1) функции $R_{\bar{I}PQ}^{\bar{K}}$ кососимметричны по P,Q и их совокупность образует тензор кривизны-кручения пространства $P_{n,n}$; в случае $R_{\bar{I}PQ}^{\bar{K}}\equiv 0$ пространство $P_{n,n}$ представляет собой n-мерное проективное пространство P_n .

Известно [4], [8], что в репере нулевого порядка $\{A_0,A_I\}$ дифференциальные уравнения распределения гиперплоскостных элементов $\Re\subset P_{n,n}$ имеют вид:

$$\omega_i^n=\Lambda_{iK}^n\omega_0^K. \qquad (2)$$

Совокупность функций $\{\Lambda_{ij}^n\}$ образует тензор первого порядка (необязательно симметричный):

$$\nabla\Lambda_{ij}^n+\Lambda_{ij}^n\omega_0^0=\Lambda_{ijK}^n\omega_0^K. \qquad (3)$$

Ниже рассматривается класс регулярных распределений $\Re \subset P_{n,n}$, т.е. $\left|\Lambda_{ij}^n\right| \neq 0.$ Симметрический тензор первого порядка $\{a_{ij}^n\}$, где

$$a_{ij}^n = \frac{1}{2}(\Lambda_{ij}^n + \Lambda_{ji}^n), \nabla a_{ij}^n + a_{ij}^n \omega_0^0 = a_{ijK}^n \omega_0^K,$$

вообще говоря, невырожден; это позволяет ввести в рассмотрение обращенный симметричный тензор a_n^{ij}:

$$a_n^{ik} a_{kj}^n = \delta_j^i, \nabla a_n^{ij} - a_n^{ij} \omega_0^0 = -a_n^{is} a_n^{jt} a_{stK}^n \omega_0^K. \tag{4}$$

Заметим, что

$$\Lambda_{ij}^n = a_{ij}^n + R_{ij}^n, R_{ij}^n = \frac{1}{2}(\Lambda_{ij}^n - \Lambda_{ji}^n).$$

Во второй дифференциальной окрестности введем охват

$$b_i = a_{ijk}^n a_n^{jk}, \nabla b_i + b_i \omega_0^0 + (n+1)(\omega_i^0 - a_{ij}^n \omega_n^j) = b_{iK} \omega_0^K. \tag{5}$$

В третьей дифференциальной окрестности возьмем функцию

$$\mathrm{S_n} = \frac{1}{\mathrm{n}^2 - 1}\left(\mathrm{b_{ij}} - \frac{1}{\mathrm{n}+1}\mathrm{b_i b_j}\right)\mathrm{a_n^{ij}}, \tag{6}$$

$$\nabla S_n + S_n \omega_0^0 - 2\left(\frac{1}{n+1} b_s \omega_n^s - \omega_n^0\right) = S_{nK} \omega_0^K.$$

Известно [5], что поле геометрического объекта третьего порядка $\{S_n, b_i, a_{ij}^n\}$ на распределении $\Re \subset P_{n,n}$ определяет поле инвариантных соприкасающихся гиперквадрик, уравнения которых в репере нулевого порядка имеют вид:

$$a_{ij}^n x^i x^j + \frac{2}{n+1} b_i x^i x^n + S_n (x)^2 = 2x^0 x^n. \tag{7}$$

Дифференцируемое подмногообразие, погруженное в пространство с фундаментально-групповой связностью, называется оснащенным [9], если на нем определено поле некоторого геометрического объекта g^a (поле оснащающего объекта подмногообразия):

$$dg^a = \psi_{s_2}^a (g) \omega^{s_2} + \psi_{s_1}^a \omega^{s_1},$$

где ω^{s_1} - главные (первичные) формы, ω^{s_2} - вторичные формы Пфаффа на многообразии.

Тип оснащения погруженного подмногообразия характеризуется строением основных функций $\psi_{s_2}^a (g)$, определяющих оснащающий объект g^a; в зависимости от их строения имеем различные оснащения подмногообразия. Например, оснащение (нормализация) распределения $\Re \subset P_{n,n}$ в смысле А.П.Нордена равносильно [4] заданию на подмногообразии двух полей квазитензоров ν_n^i и ν_i^0:

$$\nabla \nu_n^i + \omega_n^i = \nu_{nK}^i \omega_0^K, \nabla \nu_i^0 + \omega_i^0 = \nu_{iK}^0 \omega_0^K; \tag{8}$$

эти поля квазитензоров определяют на $\mathfrak{R}$ поля нормалей первого и второго родов соответственно.

Известно [5], что условием взаимности (полярной сопряженности) нормализации $\{\nu_n^i, \nu_i^0\}$ относительно поля соприкасающихся гиперквадрик (7) является выполнение соотношений

$$\nu_k^0 = \frac{1}{n+1} b_k + a_{ks}^n \nu_n^s. \qquad (9)$$

Аналогично, оснащение распределения $\mathfrak{R}$ в смысле Э.Картана равносильно [4] заданию на подмногообразии двух полей геометрических объектов $\{\nu_n^i\}, \{\nu_n^i, \nu_n^0\}$:

$$\nabla \nu_n^i + \omega_n^i = \nu_{nK}^i \omega_0^K, \nabla \nu_n^0 + \nu_n^j \omega_j^0 + \omega_n^0 = \nu_{nK}^0 \omega_0^K; \qquad (10)$$

поле $\{\nu_n^i, \nu_i^0\}$ определяет поле оснащающих инвариантных точек $M_n = A_n + \nu_n^i A_i + \nu_n^0 A_0$, принадлежащее полю нормалей первого рода ν_n^i.

Пусть распределение гиперплоскостных элементов $\mathfrak{R} \subset P_{n,n}$ нормализовано полями квазитензоров ν_n^i, ν_n^0. Можно проверить, что каждый из следующих трех охватов удовлетворяет уравнению (10) для функции ν_n^0:

$$Q_n^0(\nu) = \frac{1}{2} S_n + \frac{1}{n+1} b_s \nu_n^s + \frac{1}{2} a_{st}^n \nu_n^s \nu_n^t, \qquad (11)$$

$$K_n^0(\nu) = -\frac{1}{n-1}(\nu_{ns}^s - a_{st}^n \nu_n^s \nu_n^t), \qquad (12)$$

$$\overline{K}_n^0(\nu) = \frac{1}{n-1}(\nu_{ts}^0 - \nu_t^0 \nu_s^0) a_n^{st} + \nu_s^0 \nu_n^s. \qquad (13)$$

Точка $Q_n = A_n + \nu_n^i A_i + Q_n^0(\nu) A_0$ есть вторая точка пересечения нормали первого рода ν_n^i с соприкасающейся гиперквадрикой (7) в центре A_0 распределения $\mathfrak{R}$; отметим, что первой точкой пересечения нормали ν_n^i с гиперквадрикой (7) является сам центр A_0 .

Точка $K_n = A_n + \nu_n^i A_i + K_n^0(\nu) A_0$ есть точка Кенигса нормали ν_n^i [4], [8], которую назовем первой точкой Кенигса. В соответствии с этим точку $\overline{K}_n = A_n + \nu_n^i A_i + \overline{K}_n^0(\nu) A_0$ назовем второй точкой Кенигса нормали ν_n^i. Отметим, что, в отличие от полей оснащающих точек Q_n и K_n, поле второй точки Кенигса порождается лишь при задании поля нормали второго рода ν_i^0 на $\mathfrak{R} \subset P_{n,n}$ (сравни охваты (11) - (13)).

Точка $\widetilde{K}_n = A_n + \nu_n^i A_i + \nu_n^0 A_0$ нормали ν_n^i, полярно сопряженная первой точке Кенигса K_n относительно гиперквадрики (7), определяется охватом

$$\nu_n^0 = \widetilde{K}_n^0 = S_n - K_n^0 + a_{ij}^n \nu_n^i \nu_n^j + \frac{2}{n+1} b_i \nu_n^i. \qquad (14)$$

Охват (14) равносилен одному из следующих соотношений:

$$\widetilde{K}_n^0 = 2Q_n^0 - K_n^0; (A_0 Q_n; K_n \widetilde{K}_n) = -1. \tag{15}$$

Пусть нормализация распределения $\Re \subset P_{n,n}$ является взаимной, т.е. справедливы соотношения (9). Из (9) находим

$$\nu_n^i = a_n^{ik} \left(\nu_k^0 - \frac{1}{n+1} b_k \right). \tag{16}$$

Дифференцируя последние соотношения, имеем:

$$\nu_{ns}^i = -a_n^{it} a_n^{kj} a_{tjs}^n \left(\nu_k^0 - \frac{1}{n+1} b_k \right) + a_n^{ik} \left(\nu_{ks}^0 - \frac{1}{n+1} b_{ks} \right),$$

откуда с учетом (5) находим

$$\nu_{ns}^s = a_n^{sk} \left(\nu_{ks}^0 - \frac{1}{n+1} b_{ks} - b_k b_s + \frac{1}{n+1} b_s b_k \right). \tag{17}$$

В силу соотношений (6), (11) - (13), (14), (16), (17) имеем $\widetilde{K}_n^0 = \overline{K}_n^0$. Таким образом, справедлива

Теорема. Для регулярного распределения гиперплоскостных элементов $\Re \subset P_{n,n}$, нормализованного взаимно, точки пересечения нормали первого рода с соприкасающейся гиперквадрикой в соответствующем центре распределения и ее точки (первая и вторая) Кенигса образуют гармоническую четверку.

В условиях этой теоремы справедливо $K_n^0 + \overline{K}_n^0 = 2Q_n^0$.

Библиографический список

1. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976. 432 с.

2. *Cartan E.* Les éspaces á connexion projektive // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М., 1937. Вып. 4. С. 147-159.

3. *Bortolotti E.* Connessioni nelle luogo varietá di spazi; applikazione alla geometria metrika differenziale delle congruenze di rette // Rent. Semin. Sci Univ. Cagliari. 1933. №3. P. 81-89.

4. *Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.* Распределения *m*-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. 1 // Тр. геом. семинàðà / ВИНИТИ. АН СССР. М., 1971. Т. 3. С. 49-94.

5. *Столяров А.В.* Двойственная теория оснащенных многообразий: Монография. 2-е изд. Чебоксары: Чувашск. пед. ин-т, 1994. 290 с.

6. *Столяров А.В.* Двойственные нормальные связности на гиперполосном распределении // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1997. Вып. 28. С. 72 - 78.

7. *Cartan E.* Lecons sur la théorie des espaces a connexion projective. Paris, 1937.

8. *Остиану Н.М.* Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т. 4. С. 71-120.

9. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. мат. о-ва. 1953. Т. 2. С. 275-382.

A.V. S t o l y a r o v

SUMMARY PAPER “ABOUT EQUIPPET DISTRIBUTION OF HYPERPLANE ELEMENTS”

The paper equippet in the sense of E.Cartan distribution of hyperplane elements, dipped into the space a connexion projektive; in case of mutual normalization of submanifolds there is an invariant link among them.

УДК 514.7

ЛОРЕНЦЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОЛЕ КИЛЛИНГА С ОСОБЕННОСТЬЮ

И.А.У н д а л о в а

(Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского)

В работе изучаются аналитические 4-мерные лоренцевы многообразия, допускающие однопараметрическую группу движений с изолированной неподвижной точкой О. Получен вид метрики таких пространств. Найдены условия, при выполнении которых, точка О является полюсом (в смысле А.С. Солодовникова).

Пусть $V^4=(M,g)$ – 4-мерное, аналитическое лоренцево многообразие, допускающее однопараметрическую группу движений (G_1) с изолированной неподвижной точкой О. Известно [1],[2], что можно подобрать нормальную (с центром в О) систему координат, относительно которой компоненты A^α векторного поля A группы G_1 имеют вид:

$$A^1=x^2 ,\ A^2=-x^1 ,\ A^3=c^2x^4 ,\ A^4=x^3 , \qquad (1)$$

где x^α ($\alpha,\beta=1,\dots,4$) - нормальные координаты произвольной точки, а c -некоторая отличная от нуля постоянная. Среди всех траекторий группы G_1 геодезическими являются только изотропные кривые : $x^1=0$, $x^2=0$, $x^3=\pm cx^4$. Решая уравнения* $(D^L_A g)_{\alpha\beta}=0$, $\Gamma^\alpha_{\beta\sigma}x^\beta x^\sigma=0$, можно найти компоненты $g_{\alpha\beta}$ метрического тензора g относительно данной нормальной системы координат [2]:

$g_{11}=1+n(x^2)^2+k\omega-2m_2\omega x^1x^2$, $g_{22}=1+n(x^1)^2+k\omega+2m_2\omega x^1x^2$,

$g_{12}=-nx^1x^2+m_2\omega(x^1)^2-m_2\omega(x^2)^2$, $g_{13}=-kx^1x^3+m_2y^2x^2x^3+m_4\omega x^1x^4+m_6x^2x^4$,

$g_{14}=c^2kx^1x^4-c^2m_2y^2x^2x^4-m_4\omega x^1x^3-m_6x^2x^3$, $g_{23}=-kx^2x^3-m_2y^2x^1x^3+m_4\omega x^2x^4-m_6x^1x^4$, (2)

$g_{24}=c^2kx^2x^4+c^2m_2y^2x^1x^4-m_4\omega x^2x^3+m_6x^1x^3$, $g_{33}=1+ky^2+\delta(x^4)^2-2m_4y^2x^3x^4$,

$g_{34}=m_4y^2(x^3)^2+m_4y^2c^2(x^4)^2-\delta x^3x^4$, $g_{44}=-c^2-c^2ky^2+\delta(x^3)^2-2c^2m_4y^2x^3x^4$,

---

* Здесь и в дальнейшем D^L_A-дифференциал Ли на базе векторного поля A, $\Gamma^\alpha_{\beta\sigma}$-коэффициенты связности ∇, определенной метрикой g.