УДК 574.76

В. С. Малаховский

НЕОБЫЧНЫЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ СОВОКУПНОСТЕЙ КВАДРАТНЫХ ТРЕХЧЛЕНОВ

Рассмотрено пять совокупностей квадратных трехчленов:

$$f_{a_\lambda}(x) \equiv x^2 - a_\lambda x + \frac{1}{4}(a_\lambda^2 + 2\lambda + 5),$$

где $\lambda \in \Lambda = \{3, 7, 19, 31, 79\}$, $a_\lambda \in A_\lambda = \{1, 3, 5, \dots, \lambda\}$.

Доказано, что $f_{a_\lambda}(x_0), x_0 = 0, 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(\lambda + a_\lambda)$ *суть простые числа, причем попарно различные из них для каждого* $\lambda \in A_\lambda$ *определяют одно и то же множество* M_λ, *состоящее из двух* $(\lambda = 3)$, *четырех* $(\lambda = 7)$, *десяти* $(\lambda = 19)$, *шестнадцати* $(\lambda = 31)$ *и сорока* $(\lambda = 79)$ *попарно различных чисел.*

Установлено, что

$$\forall a_\lambda \; f_{a_\lambda}(\frac{1}{2}(\lambda + a_\lambda) + 1) = (\frac{1}{2}(\lambda + 3))^2.$$

Исследованы необычные свойства квадратных трехчленов

$$f_\lambda(x) \equiv x^2 - x + \frac{1}{2}(\lambda + 3), \;\; \varphi_\lambda(x) \equiv x^2 + x + \frac{1}{2}(\lambda + 3).$$

Доказано, что

$$\varphi_\lambda(\frac{1}{2}(\lambda + 3) + 1) = (\frac{1}{2}(\lambda + 3))^2.$$

Five totalities of quadratic trinomials are considered:

$$f_{a_\lambda}(x) \equiv x^2 - a_\lambda x + \frac{1}{4}(a_\lambda^2 + 2\lambda + 5),$$

where $\lambda \in \Lambda = \{3, 7, 19, 31, 79\}$, $a_\lambda \in A_\lambda = \{1, 3, 5, \dots, \lambda\}$.

Numbers $f_{a_\lambda}(x_0), x_0 = 0, 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(\lambda + a_\lambda)$ *are prime numbers moreover mutually in pairs these numbers form identically sets for fixed* λ *consisting two* $(\lambda = 3)$, *four* $(\lambda = 7)$, *ten* $(\lambda = 19)$, *sixteen* $(\lambda = 31)$, *and 40* $(\lambda = 79)$ *numbers.*

It is proved that

$$\forall a_\lambda \; f_{a_\lambda}(\frac{1}{2}(\lambda + a_\lambda) + 1) = (\frac{1}{2}(\lambda + 3))^2$$

for any $a_\lambda \in A_\lambda$.

Unusual properties of quadratic trinomials

$$f_\lambda(x) \equiv x^2 - x + \frac{1}{2}(\lambda + 3), \;\; \varphi_\lambda(x) \equiv x^2 + x + \frac{1}{2}(\lambda + 3)$$

are investigated.

It is proved that

$$\varphi_\lambda(\frac{1}{2}(\lambda + 3) + 1) = (\frac{1}{2}(\lambda + 3))^2.$$

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта.
Сер.: Физико-математические и технические науки. 2018. № 1. С. 25 – 29.

Ключевые слова: квадратный трехчлен, множество, совокупность, простое число.

Keywords: quadratic trinomial, set, totality, prime number.

Запишем подробно совокупность многочленов

$$f_{a_\lambda}(x) \equiv x^2 - a_\lambda x + \frac{1}{4}(a_\lambda^2 + 2\lambda + 5),$$

для каждого $\lambda \in \Lambda$:

$$x^2 - x + 3, \;\; x^2 - 3x + 5, \;\; (\lambda = 3) \tag{1}$$

$$x^2 - x + 5, \;\; x^2 - 3x + 7, \;\; x^2 - 5x + 11, \;\; x^2 - 7x + 17, \;\; (\lambda = 7) \tag{2}$$

$$\begin{cases} x^2 - x + 11, x^2 - 3x + 13, x^2 - 5x + 17, x^2 - 7x + 23, \\ x^2 - 9x + 31, x^2 - 11x + 41, x^2 - 13x + 53, x^2 - 15x + 67, \\ x^2 - 17x + 83, x^2 - 19x + 101, (\lambda = 19) \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x^2 - x + 17, x^2 - 3x + 19, x^2 - 5x + 23, x^2 - 7x + 29, \\ x^2 - 9x + 37, x^2 - 11x + 47, x^2 - 13x + 59, x^2 - 15x + 73, \\ x^2 - 17x + 89, x^2 - 19x + 107, x^2 - 21x + 127, \\ x^2 - 23x + 149, x^2 - 25x + 173, x^2 - 27x + 199, \\ x^2 - 29x + 227, x^2 - 31x + 257, (\lambda = 31) \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} x^2 - x + 41, x^2 - 3x + 43, x^2 - 5x + 47, x^2 - 7x + 53, \\ x^2 - 9x + 61, x^2 - 11x + 71, x^2 - 13x + 83, x^2 - 15x + 97, \\ x^2 - 17x + 113, x^2 - 19x + 131, x^2 - 21x + 151, \\ x^2 - 23x + 173, x^2 - 25x + 197, x^2 - 27x + 223, \\ x^2 - 29x + 251, x^2 - 31x + 281, x^2 - 33x + 313, \\ x^2 - 35x + 347, x^2 - 37x + 383, x^2 - 39x + 41x + 421, \\ x^2 - 41x + 461, x^2 - 43x + 503, x^2 - 45x + 547, \\ x^2 - 47x + 593, x^2 - 49x + 641, x^2 - 51x + 691, \\ x^2 - 53x + 743, x^2 - 55x + 797, x^2 - 57x + 853, \\ x^2 - 59x + 911, x^2 - 61x + 971, x^2 - 63x + 1033, \\ x^2 - 65x + 1097, x^2 - 67x + 1163, x^2 - 69x + 1231, \\ x^2 - 71x + 1301, x^2 - 73x + 1373, x^2 - 75x + 1447, \\ x^2 - 77x + 1523, x^2 - 79x + 1601. (\lambda = 79) \end{cases} \tag{5}$$

Рассмотрим рациональную функцию

$$F(\lambda, a_\lambda) = \frac{1}{4}(a_\lambda^2 + 2\lambda + 5).$$

Для каждого $\lambda \in \Lambda$ она определяет подмножества M_λ простых чисел:

$$M_3 = \{3, 5\},$$

$$M_7 = \{5, 7, 11, 17\},$$

$$M_{19} = \{11, 13, 17, 23, 31, 41, 53, 67, 83, 101\};$$

$$M_{31} = \{17, 19, 23, 29, 37, 47, 59, 73, 89, 107, 127, 149, 173, 199, 227, 257\},$$

$$\begin{gathered} M_{79} = \{41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, \\ 113, 131, 151, 173, 197, 223, 251, 281, 313, 347, 383, \\ 421, 461, 503, 547, 593, 641, 691, 743, 797, 853, 911, 971, \\ 1033, 1097, 1163, 1231, 1301, 1373, 1447, 1523, 1601\}. \end{gathered}$$

Теорема 1. *Значения многочленов* (1—4) *при*

$$x_0 = 0, 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}(\lambda + a_\lambda)$$

являются простыми числами, причем для каждого $\lambda \in A_\lambda$ *множество этих простых чисел* M_λ *одно и то же.*

*Доказательств*о. Для квадратных трехчленов (5) эта теорема доказана в [1].

Для квадратных трехчленов (1—4) теорема доказывается непосредственной проверкой. Проведем, например, доказательство для $\lambda = 7$, т. е. для многочленов (2). При

$$x^2 - x + 5,\ 0 \leqslant x_0 \leqslant \frac{1}{2}(7+1) = 4,$$

получаем

$$\{5, 5, 7, 11, 17\} \equiv \{5, 7, 11, 17\} = M_7.$$

Когда

$$x^2 - 3x + 7,\ 0 \leqslant x_0 \leqslant \frac{1}{2}(7+3) = 5,$$

имеем

$$\{7, 5, 5, 7, 11, 17\} \equiv \{5, 7, 11, 17\} = M_7;$$

Если

$$x^2 - 5x + 11,\ 0 \leqslant x_0 \leqslant \frac{1}{2}(7+5) = 6,$$

находим

$$\{11, 7, 5, 5, 7, 11, 17\} \equiv \{5, 7, 11, 17\} = M_7;$$

Наконец, при

$$x^2 - 7x + 17,\ 0 \leqslant x_0 \leqslant \frac{1}{2}(7+7) = 7,$$

получим

$$\{17, 11, 7, 5, 5, 7, 11, 17\} \equiv \{5, 7, 11, 17\} = M_7.$$

Теорема 2. *Для любого* $a_\lambda \in A_\lambda$

$$f_{a_\lambda}(\frac{1}{2}(\lambda + a_\lambda) + 1) = (\frac{1}{2}(\lambda + 3))^2.$$

Доказательство. Имеем:

$$\frac{1}{2}(\lambda + a_\lambda) + 1 = \frac{1}{2}(\lambda + a_\lambda + 2).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{4}(\lambda^2 + a_\lambda^2 + 4 + 2\lambda a_\lambda + 4\lambda + 4a_\lambda - 2(\lambda + a_\lambda + 2)a_\lambda +$$

$$+ a_\lambda^2 + 2\lambda + 5) = \frac{1}{4}(\lambda^2 + 6\lambda + 9) = (\frac{1}{2}(\lambda + 3))^2.$$

Рассмотрим две совокупности квадратных трехчленов:

$$f_\lambda(x) \equiv x^2 - x + \frac{1}{2}(\lambda + 3),$$

$$\varphi_\lambda(x) \equiv x^2 + x + \frac{1}{2}(\lambda + 3),$$

где $\lambda \in \Lambda.$ Значения этих многочленов

$$f_\lambda(x_0),\ x_0 = \overline{0, \frac{1}{2}(\lambda + 1)},$$

$$\varphi_\lambda(x_0),\ x_0 = \overline{0, \frac{1}{2}(\lambda - 1)}$$

определяют одно и то же множество $M_\lambda,$ состоящее из $\frac{1}{2}(\lambda + 1)$ попарно различных простых чисел. Так как

$$\varphi_\lambda(x) \equiv f_\lambda(x) + 2x,$$

то если

$$f_\lambda(x_0) = p_1 \in M_\lambda,$$

то

$$\varphi_\lambda(x_0) = p_1 + 2x_0 = p_2 \in M_\lambda.$$

Например,

$$f_{31}(12) = 149,$$

$$\varphi_{31}(12) = 149 + 2 \cdot 12 = 173.$$

Теорема 3. Для любого $\lambda \in \Lambda$ справедливо равенство

$$\varphi_\lambda(\frac{1}{2}(\lambda - 1) + 1) = (\frac{1}{2}(\lambda + 3))^2.$$

Доказательство. Так как

$$\frac{1}{2}(\lambda-1)+1=\frac{1}{2}(\lambda+1),$$

то

$$\frac{1}{4}(\lambda^2+2\lambda+1)+2(\lambda+1)+2\lambda+6)=\frac{1}{4}(\lambda^2+6\lambda+9)=(\frac{1}{2}(\lambda+3))^2.$$

Список литературы

1. *Малаховский В. С.* Удивительные свойства некоторых подмножеств простых чисел и их особая роль во множестве натуральных чисел // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2016. Вып. 47. С. 89—97.

2. *Малаховский В. С.* Числа знакомые и незнакомые. Калининград, 2004.

Об авторе

Владислав Степанович Малаховский — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: nikolaymal@mail.ru

The author

Prof. V. Malakhovsky, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: nikolaymal@mail.ru