I.A. U n d a l o v a

LORENTZ'S MANIFOLDS, ADMITTING KILLING'S PLANE WITH A SINGULARITY

Analitical 4-dimentional Lorentz's manifolds admitting one-parameter group of motion with an isolated fixed point O are studied in the article. A form of metric of such spaces is obtained. Conditions are found under which the point O is a pole (in the sense of A.S.Solodovnikov).

УДК 514.75

ВЫРОЖДЕННЫЕ КОМПЛЕКСЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ КВАДРИКОЙ И ПРЯМОЙ

Т.П. Ф у н т и к о в а

(Калининградский государственный университет)

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются вырожденные комплексы $(QL)_{3,1}$, порожденные квадрикой Q и прямой L, причем многообразие квадрик Q - трехмерное, а прямых L - одномерное. Изучены классы вырожденных комплексов $(QL)_{3,1}$, для которых центры квадрик Q описывают поверхность (P).

Между образующими элементами вырожденного комплекса $(QL)_{3,1}$ устанавливается соответствие, при котором каждой квадрике Q соответствует единственная прямая L, полным прообразом которой является двупараметрическое семейство квадрик Q_L. Устанавливается также соответствие между множествами (L) и(P), при котором каждой прямой L соответствует на (P) линия Γ_L.

Отнесем вырожденный комплекс $(QL)_{3,1}$ к реперу $R=\{A,\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, который характеризуется следующим образом: точка A совмещена с центром P квадрики Q; векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ принадлежат касательной плоскости к поверхности (P); конец вектора $\bar{e}_1$ совмещен с точкой пересечения прямой L и касательной плоскости, а вектор $\bar{e}_2$ направлен по касательной к линии Γ_4; вектор $\bar{e}_3$ параллелен прямой L; концы векторов $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ инцидентны квадрике Q.

Квадрика (эллипсоид) Q в репере R задается уравнением

$$a_1(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2-2a_2x_1x_2-2a_3x_1x_3-2a_4x_2x_3-1=0 .$$

Так как векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ принадлежат касательной плоскости к поверхности (A), то

$$d\bar{A}=\omega^1\bar{e}_1+\omega^2\bar{e}_2,\ \omega^3=0,$$

следовательно

$$\omega_1^3=\kappa\omega^1+n\omega^2,\ \omega_2^3=n\omega^1+m\omega^2.$$

Вектор $\bar{e}_3$ параллелен прямой L и многообразие (L) -одномерное, т.е.

$$\mathrm{rang}\{\omega_3^1,\ \omega_3^2,\ \omega^1+\omega_1^1,\ \omega^2+\omega_1^2\}=1,$$

где ω^α, ω_α^β (α, β=1,2,3) - линейные дифференциальные формы, удовлетворяющие уравнениям структуры аффинного пространства.

Каждой прямой L соответствует на поверхности (A) линия Γ_L, определяемая условием $\omega^1=0$.

Приняв в качестве базисных форм комплекса $(QL)_{3,1}$ формы ω^1, ω^2, ω_2^2, получаем систему уравнений Пфаффа

$$\begin{gathered}\omega^3=0,\ \omega_1^1=(a-1)\omega^1,\ \omega_1^2=b\omega^1-\omega^2,\ \omega_3^2=c\omega^1,\\ \omega_3^1=r\omega^1,\ \omega_1^3=k\omega^1+n\omega^2,\ \omega_2^3=n\omega^1+m\omega^2,\\ \omega_2^1=p\omega^1+q\omega^2,\ \omega_3^3=\Gamma_{31}^3\omega^1+\Gamma_{32}^3\omega^2+\Gamma_{33}^3\omega_2^2,\\ da_k=\alpha_1\omega^1+\alpha_2\omega^2+\alpha_3\omega_2^2\ (k=1,2,3,4),\end{gathered}\tag{1}$$

определяющую комплекс $(QL)_{3,1}$ с произволом пяти функций трех аргументов. Пусть Г- линия на поверхности (A) с касательной, определяемой вектором $\bar{e}_1$.

Теорема 1. Торсы прямолинейных конгруэнций $(A\bar{e}_1)$ и $(A\bar{e}_2)$ высекают на поверхности (A) сеть линий Γ_L, Г. Прямолинейные конгруэнции (AA_1) и (AA_3) имеют по одному семейству соответствующих торсов.

Доказательство. Уравнения торсов прямолинейных конгруэнций $(A\bar{e}_1)$, $(A\bar{e}_2)$, $(A\bar{e}_3)$ имеют соответственно вид

$$\omega^1(c\omega^1-r\omega^2)=0,\ \omega^2(k\omega^1+n\omega^2)=0,\ (\omega^1)^2=0,$$

отсюда следует справедливость утверждения.

Теорема 2. Касательные плоскости к фокальным поверхностям прямолинейной конгруэнции $(A\bar{e}_3)$ проходят через касательные к линиям Γ_L, Г.

Доказательство. Фокусами луча прямолинейной конгруэнции $(A\bar{e}_3)$ являются точки

$$\bar{F}_1=\bar{A}-\frac{1}{r}\bar{e}_3,\quad \bar{F}_2=\bar{A}-\frac{1}{c}\bar{e}_3,$$

причем

$$(d\bar{F}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)=0,\ (d\bar{F}_2,\bar{e}_1,\bar{e}_3)=0.$$

Теорема 3. Если касательная плоскость к индикатрисе вектора $\bar{e}_1$ параллельна касательной плоскости к поверхности (A), то поверхности (A) и (L) являются коническими поверхностями с вершиной в точке A_1.

Доказательство. Имеем:

$$d\bar{e}_1=\omega^1[(a-1)\bar{e}_1+b\bar{e}_2+k\bar{e}_3]+\omega^2[-\bar{e}_2+n\bar{e}_3],$$

$$(d\bar{e}_1\ \bar{e}_1\ \bar{e}_2)=0 \text{ при } k=0,\ n=0, \text{ т.е. } \omega_1^3=0.$$

Дифференцируя внешним образом это уравнение, получаем b=0, a=0. Тогда

$$(d\bar{A}\ \bar{e}_1\,d\bar{e}_1)=0,\ (d\bar{A}_1\ \bar{e}_3\,d\bar{e}_3)=0,\ dA_1\equiv 0.$$

Теорема 4. Если многообразие (L) - торс с точкой ребра возврата A_1, то линии Γ_L,Г сопряжены на поверхности (A).

Доказательство. Многообразие (L) -торс с точкой ребра возврата A_1, если $(d\bar{A}_1\ \bar{e}_3\ d\bar{e}_3)=0$, т.е. b=0, a=0. Тогда $\omega^1+\omega_1^1=0$, $\omega^2+\omega_1^2=0$. Дифференцируя внешним образом эти уравнения получаем n=0. Уравнение асимптотических линий поверхностей (А) принимает вид $k(\omega^1)^2+m(\omega^2)^2=0$, т.е. линии Γ_L,Γ сопряжены на поверхности (А).

Рассмотрим комплексы $(QL)_3$, у которых линии Γ_L,Γ являются асимптотическими на поверхности (А) и точка A_1 - характеристическая точка плоскости $[A\ \bar{e}_1\ \bar{e}_3]$. В этом случае система уравнений Пфаффа имеет вид

$$\begin{gathered}
\omega^3=0,\ \omega_1^1=(1/p-1)\,\omega^1,\ \omega_1^2=-\omega^2,\ \omega_3^2=-1/p\omega^1 \\
\omega_3^1=-\omega^1,\ \omega_1^3=n\omega^2,\ \omega_2^3=n\omega^1,\ \omega_2^1=p\omega^1, \qquad (2) \\
\omega_3^3=\Gamma_{31}^3\,\omega^1+\Gamma_{32}^3\,\omega^2+\Gamma_{33}^3\,\omega_2^2,\ da_k=\alpha_1\omega^1+\alpha_2\omega^2+\alpha_3\omega_2^2, \\
da_k=\alpha_1\omega^1+\alpha_2\omega^2+\alpha_3\omega_2^2, \\
d\ln l=\omega_2^2+(a+1)\,\omega^1-\omega_3^3-2p\omega^2.
\end{gathered}$$

Теорема 5. Поверхности (А) и (L) являются одной и той же линейчатой квадрикой.

Доказательство. Точки A и A_1 принадлежат квадрике К, уравнение которой имеет вид

$$-hx_1x_2+x_3-x_1x_3+px_2x_3=0$$

Из системы (2) следует, что $dK\equiv 0$, т.е. квадрика инвариантна.

Библиографический список

1. *Малаховский В.С.* О вырожденных конгруэнциях пар фигур // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1973. Вып.3. С.41-49.

2. *Кретов М.В.* О комплексах центральных квадрик в аффинном пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1980. Вып.11. С.51-61.

T.P. F u n t i k o w a

DEGENERATE COMPLEXES, GENERATED BY A QUADRIC AND A LINE

Degenerate complexes, generated by a quadric and a line are considered in a three-dimensional affine space, where manifold of quadrics is threedimensional and that of lines is onedimensional. Klasses of degenerated komplexes are studied, for which centers of quadrics decribe a surface.