УДК 514.76

Г. А. Банару
Смоленский государственный университет, Россия
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-2-3

О некоторых тензорах 6-мерных уплощающихся эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли

В данной заметке рассмотрены 6-мерные уплощающиеся эрмитовы подмногообразия алгебры октав. Вычислены компоненты тензора римановой кривизны, тензора Риччи и тензора Вейля конформной кривизны.

Ключевые слова: почти эрмитова структура, тензор римановой кривизны, тензор Риччи, тензор Вейля конформной кривизны, 6-мерное уплощающееся подмногообразие алгебры Кэли

1. Геометрия 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли развивается с 60-х годов прошлого века. Среди многих известных математиков, которые получили результаты в этой области, особо выделяются американский специалист Альфред Грей и отечественный геометр Вадим Фёдорович Кириченко. Именно В. Ф. Кириченко получил полную классификацию 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры октав [1]. Отметим, что в обзоре [2] содержится значительная часть достижений в области геометрии 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли (естественно, кроме результатов, полученных в последнее десятилетие).

2. Напомним [3], что *почти эрмитовой структурой на многообразии* M^{2n} четной размерности называется пара

Поступила в редакцию 26.03.2024 г.

$\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$, где J — почти комплексная структура, а $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика. При этом J и $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ должны быть согласованы таким условием:

$$\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}),$$

где $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких векторных полей на рассматриваемом многообразии M^{2n}. Многообразие с заданной на нем почти эрмитовой структурой называется *почти эрмитовым*. С каждой почти эрмитовой структурой $\{J,\ g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ на многообразии M^{2n} связана так называемая фундаментальная форма, которая определяется равенством

$$F(X, Y) = \langle X, JY\rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Почти эрмитова структура называется *эрмитовой*, если ее тензор Нейенхейса

$$N(X, Y) = \frac{1}{4}(J^2\,[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY])$$

обращается в нуль, и келеровой, если $\nabla F = 0$.

Известно [3], что в алгебре Кэли $\mathbf{O} \equiv \mathrm{R}^8$ определены два неизоморфных 3-векторных произведения:

$$P_1(X,\ Y, Z\,) = -X(\bar{Y}Z) + \langle X,\ Y\rangle Z + \langle Y,\ Z\rangle X - \langle Z, X\rangle Y;$$

$$P_2(X,\ Y, Z\,) = -(X\bar{Y})Z + \langle X,\ Y\rangle Z + \langle Y,\ Z\rangle X - \langle Z, X\rangle Y.$$

Здесь $X, Y, Z \in \mathbf{O}$; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbf{O}$, $X \to \bar{X}$ — оператор сопряжения в $\mathbf{O}$. Если $M^6 \subset \mathbf{O}$ — 6-мерное ориентируемое подмногообразие алгебры октав, то на нем индуцируется почти эрмитова структура $\{J_\alpha, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$, определяемая в каждой точке $p \in M^6$ соотношением

$$J_\alpha(X) = P_\alpha(X, e_1, e_2), \qquad \alpha = 1, 2,$$

где $\{e_1,\ e_2\}$ — произвольный ортонормированный базис нормального к M^6 подпространства в точке p, $X \in T_p(M^6)$. Точка $p \in M^6$ называется общей, если $e_0 \notin T_p(M^6)$, где e_0 — единица алгебры октав (см.: [1]). Подмногообразия, состоящие только из общих точек, называются *подмногообразиями общего типа*. Все рассматриваемые далее подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$

будем считать подмногообразиями общего типа. 6-мерное подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ называется *уплощающимся* (чаще planar, реже flattening), если оно содержится в гиперплоскости алгебры Кэли. Отметим, что понятие уплощающегося подмногообразия алгебры октав ввели в рассмотрение В. Ф. Кириченко и М. Б. Банару [4]. Оказалось, что к числу уплощающихся относятся все 6-мерные келеровы подмногообразия алгебры октав (которые, как мы упоминали выше, полностью классифицированы В. Ф. Кириченко). При этом нужно непременно отметить, что известны примеры 6-мерных уплощающихся подмногообразий алгебры Кэли с почти эрмитовой структурой, отличной от келеровой [5—7].

3. Более 40 лет назад В. Ф. Кириченко получил структурные уравнения почти эрмитовой структуры на 6-мерном ориентируемом подмногообразии алгебры октав (в репере, адаптированном почти эрмитовой структуре) [1]:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega^a_b \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{abh} D_{hc}\omega^c \wedge \omega_b + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{ah[b} D_h{}^{c]}\omega_b \wedge \omega_c; \\ d\omega_a &= -\omega^b_a \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{abh} D^{hc}\omega_c \wedge \omega^b + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ah[b} D^h{}_{c]}\omega^b \wedge \omega^c; \\ d\omega^a_b &= \omega^a_c \wedge \omega^c_b - \left(\frac{1}{2}\delta^{ah}_{bg} D_{h[k} D^g{}_{j]} + \sum_\varphi T^\varphi_{\hat{a}[k} T^\varphi_{j]b}\right)\omega^k \wedge \omega^j, \end{aligned} \tag{1}$$

где через $\{\omega^k\}$ обозначены компоненты форм смещения, через $\{\omega^k_j\}$ — компоненты форм римановой связности. Здесь и далее

$$\varphi = 7,\ 8;\ \ a, b, c, d, g, h = 1, 2, 3;$$

$$\hat{a} = a + 3;\ \ k, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Как в [1] и [2], $\omega_a = \omega^{\hat{a}}$. При этом

$\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{abc}^{123}$, $\varepsilon^{abc} = \varepsilon_{123}^{abc}$ — компоненты тензора Кронекера порядка три;

$\delta_{bg}^{ah} = \delta_b^a \delta_g^h - \delta_g^a \delta_b^h$ — кронекеровская дельта второго порядка;

$$D^{hc} = D_{\hat{h}\hat{c}}, \quad D_h{}^c = D_{h\hat{c}}, \quad D^h{}_c = D_{\hat{h}c};$$

$$D_{cj} = \mp T_{cj}^8 + iT_{cj}^7, \quad D_{\hat{c}j} = \mp T_{\hat{c}j}^8 - iT_{\hat{c}j}^7,$$

где $\left\{T_{kj}^{\varphi}\right\}$ — компоненты конфигурационного тензора (в терминологии Грея), или второй основной формы погружения подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ (см.: [1]).

Если почти эрмитова структура является эрмитовой, то уравнения (1) принимают следующий вид (см.: [5; 6]):

$$\begin{gathered} d\omega^a = \omega_b^a \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{abh} D_{hc}\omega^c \wedge \omega_b; \\ d\omega_a = -\omega_a^b \wedge \omega_b + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{abh} D^{hc}\omega_c \wedge \omega^b; \\ d\omega_b^a = \omega_c^a \wedge \omega_b^c - \left(\frac{1}{2}\delta_{bg}^{ah} D_{hd} D^{gc} + \sum_{\varphi} T_{\hat{a}\hat{c}}^{\varphi} T_{bd}^{\varphi}\right)\omega_c \wedge \omega^d. \end{gathered} \tag{2}$$

Эрмитово $M^6 \subset \mathbf{O}$ является уплощающимся в том и только том случае, если

$$T_{ab}^8 = \mu T_{ab}^7; \quad T_{\hat{a}\hat{b}}^8 = \bar{\mu} T_{\hat{a}\hat{b}}^7; \quad \mu \in C; \quad \mu = const. \tag{3}$$

Это легко можно объяснить следующим образом. Пусть 6-мерное подмногообразие алгебры Кэли является подмногообразием гиперплоскости в $\mathbf{O}$. Тогда, если использовать язык линейной алгебры, T_{kj}^8 и T_{kj}^7 являются линейно зависимыми в каждой точке подмногообразия M^6. Обратная цепочка рассуждений также достаточно очевидна. Заметим лишь, что случай, когда хотя бы одно из значений T_{kj}^{φ} обращается в нуль, мы из рассмотрения исключаем. Как было уже отмечено выше, к числу уплощающихся относятся и 6-мерные келеровы подмногообразия алгебры Кэли (это соответствует случаю $\mu = i = \sqrt{-1}$ [5]).

Важнейшую роль в геометрии почти эрмитовых многообразий играет тензор римановой кривизны (тензор Римана — Кристоффеля). Во многих статьях цитируется утверждение Альфреда Грея, высказанное им почти полвека назад, о том, что «ключом к геометрии почти эрмитовых многообразий служат тождества, которым удовлетворяет их тензор римановой кривизны» [8].

Сопоставляя структурные уравнения Картана общего вида

$$d\,\omega^k = \omega^k_j \wedge \omega^j;$$

$$d\,\omega^k_j = \omega^k_m \wedge \omega^m_j + \frac{1}{2} R^k{}_{jml}\,\omega^m \wedge \omega^l$$

со структурными уравнениями (2) и принимая во внимание соотношения (3), мы получаем такие значения для четырех компонент, определяющих тензор римановой кривизны (остальные 12 компонент могут быть выведены из них с использованием свойств симметрии этого тензора):

$$R_{abcd} = 0\,; R_{\hat{a}bcd} = 0\,; R_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0\,;$$

$$R_{\hat{a}b\hat{c}d} = -\,2\mu^2 T^7_{\hat{a}\hat{c}} T^7_{bd}.$$

Напомним [9], что *тензором Риччи риманова многообразия* называется тензор с компонентами

$$ric_{kj} = R^m{}_{kjm}.$$

Ввиду вещественности этого тензора достаточно найти только компоненты ric_{ab} и $ric_{\hat{a}b}$.

Получаем такой результат:

$$ric_{ab} = 0; \quad ric_{\hat{a}b} = -2\,\mu^2\,T^7_{\hat{a}\hat{c}}\,T^7_{cb}.$$

Наконец, приведем значения спектра тензора Вейля конформной кривизны. Этот тензор, как известно [9], определяется следующим образом:

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{1}{n-2}(ric_{ik}\, g_{jl} + ric_{jl}\, g_{ik} - ric_{il}\, g_{jk} -$$

$$-ric_{jk}\, g_{il}) + \frac{K}{(n-1)(n-2)}(g_{jk}\, g_{il} - g_{jl}\, g_{ik}).$$

Здесь через n обозначена размерность многообразия, через K — его скалярная кривизна.

Как и в случае с тензором римановой кривизны, исходя из свойств этого тензора достаточно найти только компоненты W_{abcd}, $W_{\hat{a}bcd}$, $W_{\hat{a}\hat{b}cd}$, $W_{\hat{a}b\hat{c}d}$, которые полностью его определяют.

Получены такие значения:

$$W_{abcd} = 0;$$

$$W_{\hat{a}bcd} = 0;$$

$$W_{\hat{a}\hat{b}cd} = -\frac{\mu^2}{2}\left(T^7_{\hat{a}\hat{h}}\, T^7_{hc}\, \delta^b_d + T^7_{\hat{b}\hat{h}}\, T^7_{hd}\, \delta^a_c - T^7_{\hat{a}\hat{h}}\, T^7_{hd}\, \delta^b_c -\right.$$

$$\left.-T^7_{\hat{b}\hat{h}}\, T^7_{hc}\, \delta^a_d\right) + \frac{K}{20}\, \delta^{ba}_{cd};$$

$$W_{\hat{a}b\hat{c}d} = -\,2\,\mu^2\, T^7_{\hat{a}\hat{c}}\, T^7_{bd} + \frac{\mu^2}{2}\left(T^7_{\hat{a}\hat{h}}\ \delta^c_b + T^7_{\hat{c}\hat{h}}\ \delta^a_d\right)T^7_{hd} +$$

$$+\frac{K}{20}\, \delta^c_b\, \delta^a_d.$$

Соберем результаты воедино в таблицу классических тензоров 6-мерных уплощающихся эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли.

Тензор	Спектр тензора (компоненты, определяющие тензор)
Тензор римановой кривизны	$R_{abcd} = 0,\ R_{\hat{a}bcd} = 0,\ R_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0,$ $R_{\hat{a}b\hat{c}d} = -2\,\mu^2\, T^7_{\hat{a}\hat{c}}\, T^7_{bd}$
Тензор Риччи	$ric_{ab} = 0,\ ric_{\hat{a}b} = -2\,\mu^2\, T^7_{\hat{a}\hat{c}}\, T^7_{cb}$

Тензор Вейля (тензор конформной кривизны)	$W_{abcd} = 0,\ W_{\hat{a}bcd} = 0,$ $W_{\hat{a}\hat{b}cd} = -\frac{\mu^2}{2}\left(T^7_{\hat{a}\hat{h}}T^7_{hc}\,\delta^b_d + T^7_{\hat{b}\hat{h}}T^7_{hd}\,\delta^a_c - T^7_{\hat{a}\hat{h}}T^7_{hd}\,\delta^b_c - T^7_{\hat{b}\hat{h}}T^7_{hc}\,\delta^a_d\right) + \frac{K}{20}\,\delta^{ba}_{cd},$ $W_{\hat{a}b\hat{c}d} = -\,2\,\mu^2\,T^7_{\hat{a}\hat{c}}T^7_{bd} + \frac{\mu^2}{2}\left(T^7_{\hat{a}\hat{h}}\,\delta^c_b + T^7_{\hat{c}\hat{h}}\,\delta^a_d\right)T^7_{hd} + \frac{K}{20}\,\delta^c_b\,\delta^a_d$

Обратим внимание на то, что вычисленные компоненты тензора Вэйля позволят исследовать так называемые конформные аналоги тождеств Грея из [8]. Вычисленный спектр тензора Риччи, естественно, может послужить основой для изучения условий, при которых различные виды 6-мерных уплощающихся эрмитовых подмногообразий алгебры октав являются многообразиями Эйнштейна.

Список литературы

1. *Кириченко В.Ф.* Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Изв. вузов. Математика. 1980. №8. С. 32—38.

2. *Banaru M.B.* Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra // J. Math. Sci. (New York). 2015. Vol. 207, №3. P. 354—388.

3. *Gray A.* Six-dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products // Tôhoku Math. J. 1969. Vol. 21, №4. P. 614—620.

4. *Банару М.Б., Кириченко В.Ф.* Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли // УМН. 1994. Т. 49, вып. 1 (295). С. 205—206.

5. *Banaru M.B., Banaru G.A.* A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. 2014. №1 (74). P. 23—32.

6. *Banaru M.B., Banaru G.A.* 1-cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the Octonian // SUT J. Math. 2015. Vol. 51, №1. P. 1—9.

7. *Банару М.Б., Банару Г.А.* Об уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли // ДГМФ. 2017. Вып. 48. С. 21—25.

8. *Gray A.* Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds // Tôhoku Math. J. 1976. Vol. 28, №4. P. 601—612.

9. *Кириченко В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса, 2013.

Для цитирования: *Банару Г.А.* О некоторых тензорах 6-мерных уплощающихся эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // ДГМФ. 2024. №55 (2). С. 47—56. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-2-3.

MSC 2010: 53B35, 53B25

G.A. Banaru
Smolensk State University
4 Przhevalsky St., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2023-55-2-3

On some tensors of six-dimensional Hermitian planar submanifolds of Cayley algebra

Submitted on March 26, 2024

In the present note, we consider six-dimensional Hermitian planar submanifolds of Cayley algebra. The almost Hermitian structure on such a six-dimensional submanifold is induced by means of so-called Brown — Gray three-fold vector cross products in Cayley algebra. The six-dimensional Hermitian planar submanifolds of the octave algebra contain all

six-dimensional Kählerian submanifolds of Cayley algebra. However, there exist non-Kählerian six-dimensional Hermitian planar submanifolds in the octave algebra.

The components of the tensor of the Riemannian curvature for a six-dimensional almost Hermitian planar submanifold of Cayley algebra are computed. Remark that the tensor of Riemannian curvature plays a fundamental role in geometry of almost Hermitian manifolds. Knowing all components of the tensor of the Riemannian curvature for a six-dimensional almost Hermitian planar submanifold of the octave algebra, it is possible to study so-called Gray's identities for this submanifold.

The components of the Ricci tensor and of the tensor of conformal curvature (known also as Weyl tensor) for a six-dimensional almost Hermitian planar submanifold of Cayley algebra are also computed.

Keywords: almost Hermitian structure, tensor of Riemannian curvature, Ricci tensor, tensor of conformal curvature, six-dimensional Hermitian planar submanifold of Cayley algebra

References

1. *Kirichenko, V.F.:* Classification of Kählerian structures, defined by means of three-fold vector cross products on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra. Izvestia Vuzov. Math., 8, 32—38 (1980).

2. *Banaru, M.B.:* Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra. J. Math. Sci. (New York), **207**:3, 354—388 (2015).

3. *Gray, A.:* Six-dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products. Tôhoku Math. J., **21**:4, 614—620 (1969).

4. *Banaru, M.B., Kirichenko, V.F.:* The Hermitian geometry of the 6-dimensional submanifolds of Cayley algebra. Russian Math. Surveys, **49**:1, 223—225 (1994).

5. *Banaru, M.B., Banaru, G.A.:* A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra. Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica, 1 (74), 23—32 (2014).

6. *Banaru, M.B., Banaru, G.A.:* 1-cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the Octonian. SUT J. Math., **51**:1, 1—9 (2015).

7. *Banaru M.B., Banaru G.A.:* On planar 6-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra. DGMF, 48, 21—25 (2017).

8. *Gray, A.:* Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds. Tôhoku Math. J., **28**:4, 601—612 (1976).

9. *Kirichenko, V.F.:* Differential-geometric structures on manifolds. Odessa (2013).

For citation: Banaru, G.A. On some tensors of six-dimensional Hermitian planar submanifolds of Cayley algebra. DGMF, 55 (2), 47—56 (2024). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-2-3.