причем замыкание системы (13) удовлетворяется в силу (7). В обоих случаях произвол решения - одна функция двух аргументов. Теорема доказана.

Имеем:

$$d\mathcal{F} = 2\vartheta\mathcal{F} + \Phi_k\omega^k, \tag{14}$$

где

$$\Phi_i = h_i x^1 x^2 + m b^i x^j x^3 + c x^0 x^3,$$

а ϑ -некоторая форма Пфаффа.

Фокальные точки квадрики $Q \in \mathcal{L}$ [1] определяются системой уравнений

$$\mathcal{F} = 0, \quad \Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0. \tag{15}$$

Следовательно, A_i - сдвоенные фокальные точки. Из (6) непосредственно вытекает, что поверхности (A_i) вырождаются в линии.

Если $c=0$ или $m=0$, то на квадрике Q существует коника, каждая точка которой - фокальная [2]. Если же

$$cm \neq 0, \tag{16}$$

то кроме точек A_α существуют только две фокальные точки квадрики Q, определяемые уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x^1x^2 - x^0x^3 = 0, \quad h_1x^1 + b^1mx^3 + cx^0 = 0, \\ h_2x^2 + b^2mx^3 + cx^0 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Список литературы

1. М а л а х о в с к и й В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.- Труды геом.семинара .ВИНИТИ АН СССР, 1974, 6, с.113-133.

2. М а л а х о в с к и й В.С. Конгруэнции квадрик с фокальной конгруэнцией коник.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.7, Калининград, 1976, с.54-60.

3. Ф и н и к о в С.П. Метод внешних форм Картана, М.-Л., 1948.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 10 1979

УДК 513.73

А.В. М а х о р к и н

СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПФАФФА ОДНОГО КЛАССА КОМПЛЕКСОВ КВАДРИК В P_3

В работе рассматривается комплекс (трехпараметрическое семейство) невырожденных квадрик трехмерного проективного пространства, такой, что фокальное многообразие квадрики комплекса содержит конику. Доказано, что система дифференциальных уравнений Пфаффа, определяющая комплекс квадрик, вполне интегрируема, и ее решение определяется с произволом девяти постоянных; коники, входящие в фокальное многообразие квадрики комплекса, принадлежат стационарной квадрике.

О п р е д е л е н и е. Комплексом K_s называется трехпараметрическое семейство невырожденных квадрик трехмерного проективного пространства, такое, что фокальное многообразие [1] квадрик семейства содержит конику.

В дальнейшем текущую квадрику комплекса K_s обозначим через Q, а конику, принадлежащую фокальному многообразию квадрики Q, через C.

Рассмотрим комплекс K_s в репере $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, где A_0 является полюсом плоскости коники C относительно квадрики Q, а вершины A_1, A_2, A_3 расположены в плоскости коники C так, чтобы репер $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ был автополярным репером для квадрики Q. В таком репере уравнение квадрики Q будет иметь вид:

$$Q \equiv a_{00}(x^0)^2 + a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 = 0, \quad (1)$$

причем

$$a_{00}\, a_{11}\, a_{22}\, a_{33} = -1. \quad (2)$$

Положим,

$$\omega^i \overset{def}{=} \omega_0^i \quad (i, j, k, \ldots = 1, 2, 3). \quad (3)$$

Так как формы

$$da_{11} - a_{11}\omega_1^1, \ da_{22} - a_{22}\omega_2^2, \ da_{33} - a_{33}\omega_3^3 \quad (4)$$

являются главными, то полагая

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = -1, \quad (5)$$

из (2) получим $a_{00} = 1$. При такой канонизации и из условия

$$\omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0 \quad (6)$$

следует, что формы $\omega_0^0, \omega_1^1, \omega_2^2, \omega_3^3$ стали главными.

Коника C определяется уравнением

$$C \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2, \quad x^0 = 0, \quad (7)$$

тогда из определения комплекса K_s

$$dQ\big|_{x^0=0} = \lambda C, \quad (8)$$

откуда получаем:

$$\omega_1^2 + \omega_2^1 = 0, \quad \omega_1^3 + \omega_3^1 = 0, \quad \omega_2^3 + \omega_3^2 = 0, \quad \omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3. \quad (9)$$

Тогда система дифференциальных уравнений Пфаффа комплекса K_s запишется в виде

$$\omega_i^0 = \Gamma_{ik}\omega^k, \quad (10)$$

$$\omega_1^2 + \omega_2^1 = 0, \quad \omega_1^3 + \omega_3^1 = 0, \quad \omega_2^3 + \omega_3^2 = 0, \quad (11)$$

$$\omega_1^1 - \omega_2^2 = 0, \quad \omega_2^2 - \omega_3^3 = 0, \quad \omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0. \quad (12)$$

Замыкая (11), получим:

$$\Gamma_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad \Gamma_{11} = \Gamma_{22} = \Gamma_{33}.$$

Следовательно, систему (10) можно записать в виде

$$\omega_i^0 = c\,\omega^i \quad (c = \Gamma_{11}). \quad (13)$$

Замыкая (13), получим

$$dc = 8c\,\omega_1^1. \quad (14)$$

Анализируя (11), (12), (13), (14), получаем [2]:

Т е о р е м а 1. Система дифференциальных уравнений Пфаффа комплекса K_s вполне интегрируема, и ее решение определяется с произволом девяти постоянных.

Рассмотрим квадрику $\widetilde{Q}$, определенную следующим уравнением:

$$\widetilde{Q} \equiv (x^0)^2 - c\left[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\right] = 0. \quad (15)$$

Так как

$$d\widetilde{Q} = 6\,\omega_1^1\,\widetilde{Q}, \quad (16)$$

то квадрика $\tilde{Q}$ стационарна и касается квадрики Q вдоль коники C. Таким образом, получена

Т е о р е м а 2. Коники C принадлежат стационарной квадрике $\tilde{Q}$, и квадрика Q комплекса K_s касается $\tilde{Q}$ вдоль C.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М а л а х о в с к и й В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.- Тр.геометр.семинара ВИНИТИ, 1974, 6, с. 113-133.

2. М а л а х о в с к и й В.С. Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 10 1979

УДК 513.73

Е.А. М и т р о ф а н о в а

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПАРАБОЛОИДОВ В A_3

В настоящей статье рассматривается класс M_2^* конгруэнции M_2 гиперболических параболоидов в трехмерном эквиаффинном пространстве A_3, для которого ассоциированные квадрики вырождаются в пары пересекающихся плоскостей. Доказана теорема существования и установлены некоторые геометрические свойства конгруэнции M_2^*.

Отнесем конгруэнцию гиперболических параболоидов к реперу $R=\{A,\bar{e}_\alpha\}$ ($\alpha, \beta, \gamma =1,2,3$), где A - фокальная точка параболоида Q, описывающая невырожденную поверхность (A), векторы ($i, j, k =1,2$) направлены по прямолинейным образующим параболоида Q, а вектор $\bar{e}_3$ - по его диаметру. Уравнение этого параболоида в данном репере имеет вид:

$$F \equiv x^1x^2 - px^3 = 0. \tag{1}$$

Для получения канонического репера осуществим нормировку векторов $\bar{e}_\alpha$ таким образом, чтобы точка $\mathcal{F}_1=(1;1;\frac{1}{p})$ являлась фокальной точкой параболоида Q.

Система пфаффовых уравнений конгруэнции M_2 запишется в виде

$$\omega^3=0,\quad \omega_j^i=\Gamma_{jk}^i\omega^k,\quad \omega_3^i=\Gamma_{3k}^i\omega^k,\quad 2p\omega_3^3-dp=p_k\omega^k,$$
$$p\omega_i^3-\omega^j=\Gamma_{ik}^3\omega^k,\quad \omega_3^3=a_k\omega^k,\quad \omega_1^1-\omega_2^2=b_k\omega^k,\ (i\neq j). \tag{2}$$