Замыкая уравнения (4_1), получаем

$$\omega_\kappa \wedge \omega^\kappa_n = 0, \qquad (5_1)$$

$$\omega^n \wedge \omega^\kappa_n = 0, \qquad (5_2)$$

Из (5) следует, что

$$\rho^{i\kappa} = \rho^{\kappa i} \qquad (6)$$

Если $\omega^n = 0$, то уравнения (5_2) тождественно исчезают. При $\omega^n \neq 0$ уравнения (5_2) принимают вид:

$$\omega^\kappa_n = h^\kappa \omega^n \qquad (7)$$

Таким образом существуют два класса конгруэнций V°_{n-1}:

1/конгруэнции V^{01}_{n-1}, определяемые системой дифференциальных уравнений

$$\nabla a_{ij} = 0, \quad \omega^i = 0, \quad \omega^n = 0, \qquad (8)$$
$$\omega^i_n = \rho^{i\kappa}\omega_\kappa, \quad da_{nn} - 2a_{nn}\omega^n_n = b^i\omega_i;$$

2/конгруэнции V^{02}_{n-1}, определяемые системой пфаффовых уравнений

$$\nabla a_{ij} = 0, \quad \omega^i = 0, \quad \omega^n = e^i\omega_i, \qquad (9)$$
$$\omega^i_n = h^i\omega^n, \quad da_{nn} - 2a_{nn} = b^i\omega_i.$$

Из систем (8) и (9) следует, что центры всех гиперквадрик $Q \in V^{01}_{n-1}$ неподвижны, а центры гиперквадрик $Q \in V^{02}_{n-1}$ перемещаются по линии, касательная к которой сопряжена гиперплоскости фокальной квадрики $\mathcal{K}$.

Список литературы

1. Сопина Е.П. Конгруэнции центральных невырожденных гиперквадрик в n-мерном аффинном пространстве.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.6. Калининград, 1976, с.105-111.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

В.Н.Худенко

СВЯЗНОСТЬ В РАССЛОЕНИИ, АССОЦИИРОВАННОМ С МНОГООБРАЗИЕМ КВАДРИК

В n-мерном проективном пространстве изучается связность в расслоении, ассоциированном с многообразием p-мерных квадрик, геометрически охарактеризованы объект связности, а также два его подобъекта.

В n-мерном проективном пространстве P_n рассмотрим невырожденное h-параметрическое многообразие $(h,h,n)^2_p$ квадрик Q_p $(1 \leq p \leq n-2)$ [1]. Плоскость размерности $(p+1)$ квадрики Q_p в дальнейшем будем обозначать L_{p+1}. Отнесем пространство P_n к реперу $R=\{A_J\}$, деривационные формулы которого имеют вид

$$dA_J = \omega^K_J A_K, \qquad (1)$$

причем формы Пфаффа ω^K_J удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$\mathcal{D}\omega^K_J = \omega^L_J \wedge \omega^K_L. \qquad (2)$$

Здесь и в дальнейшем индексы принимают значения

$$I, J, K, \ldots = 1, 2, \ldots, n+1; \quad \alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1, 2, \ldots, p+2;$$
$$a, b, c, \ldots = p+3, p+4, \ldots, n+1; \quad i, j, k, \ldots = 1, 2, \ldots, h.$$

Поместим вершины репера A_α в плоскости L_{p+1}, а вершины A_a вне этой плоскости, тогда квадрика Q_p определяется системой уравнений

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^a = 0, \qquad (3)$$

причем $\det(a_{\alpha\beta}) = 1$. Зададим многообразие $(h,h,n)^2_p$ параметрически с помощью системы уравнений

$$\omega^a_\alpha = \Lambda^a_{\alpha i}\tau^i, \qquad (4)$$
$$\theta_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta i}\tau^i, \qquad (5)$$

где

$$\theta_{\alpha\beta}=da_{\alpha\beta}-a_{\alpha\gamma}\omega^{\gamma}_{\beta}-a_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}_{\alpha}+\frac{2}{p+2}a_{\alpha\beta}\omega^{\gamma}_{\gamma},$$

τ^i -инвариантные формы бесконечной аналитической группы преобразований h -мерного пространства параметров [2]. Уравнения (4) определяют h -параметрическое многообразие B_h плоскостей L_{p+1}.

Замыкание системы (4) и (5) можно записать в виде

$$(\nabla\Lambda_{\alpha\beta j}+\frac{2}{p+2}\Lambda_{\alpha\beta j}\omega^{\gamma}_{\gamma}-2a_{\gamma(\alpha}\Lambda^a_{\beta)j}\omega^{\gamma}_a+\frac{2}{p+2}a_{\alpha\beta}\Lambda^a_{\gamma j}\omega^{\gamma}_a)\wedge\tau^i=0,$$
$$\nabla\Lambda^a_{\alpha j}\wedge\tau^i=0, \qquad (6)$$

причем дифференциальный оператор ∇ действует следующим образом: $\nabla\Lambda^a_{\alpha j}=d\Lambda^a_{\alpha j}-\Lambda^a_{\beta j}\omega^\beta_\alpha+\Lambda^b_{\alpha j}\omega^a_b-\Lambda^a_{\alpha i}\tau^i_j$.

С многообразием $(h,h,n)^2_p$ ассоциируется главное расслоение $G(B_h)$ с соответствующими структурными уравнениями [2] и

$$D\omega^c_a=\omega^b_a\wedge\omega^c_b+\tau^i\wedge\omega^c_{ia},$$
$$D\omega^\beta_\alpha=\omega^\gamma_\alpha\wedge\omega^\beta_\gamma+\tau^i\wedge\omega^\beta_{\alpha i}, \qquad (7)$$
$$D\omega^\alpha_a=\omega^\beta_a\wedge\omega^\alpha_\beta+\omega^b_a\wedge\omega^\alpha_b,$$

где $\omega^c_{ia}=-\Lambda^c_{\alpha i}\omega^\alpha_a$, $\omega^\beta_{\alpha i}=\Lambda^a_{\alpha i}\omega^\beta_a$.

Базой расслоения $G(B_h)$ является многообразие B_h (или пространство параметров), а типовым слоем- подгруппа стационарности плоскости L_{p+1}.

В главном расслоении $G(B_h)$ зададим связность по Г.Ф.Лаптеву [2] с помощью поля объекта связности $\Gamma=\{\Gamma^\alpha_{ai},\Gamma^b_{ai},\Gamma^\beta_{\alpha i}\}$ на базе B_h :

$$\nabla\Gamma^\beta_{\alpha i}+\omega^\beta_{\alpha i}=\Gamma^\beta_{\alpha ij}\tau^j,\quad \nabla\Gamma^c_{ai}+\omega^c_{ai}=\Gamma^c_{aij}\tau^j,$$
$$\nabla\Gamma^\alpha_{ai}+\Gamma^b_{ai}\omega^\alpha_b-\Gamma^\alpha_{\beta i}\omega^\beta_a=\Gamma^\alpha_{aij}\tau^j. \qquad (8)$$

Зададим оснащение Бортолотти [3] многообразия B_h с помощью системы точек $B_a=A_a+\lambda^\alpha_a A_\alpha$, причем $\nabla\lambda^\alpha_a+\omega^\alpha_a=\lambda^\alpha_{ai}\tau^i$.Фундаментальный объект Λ и оснащающий квазитензор $\lambda=(\lambda^\alpha_a)$ позволяют охватить компоненты объекта связности Γ по формулам

$$\Gamma^\beta_{\alpha i}=\Lambda^a_{\alpha i}\lambda^\beta_a,\quad \Gamma^c_{ai}=-\Lambda^c_{\alpha i}\lambda^\alpha_a,\quad \Gamma^\alpha_{ai}=-\Lambda^b_{\beta i}\lambda^\alpha_b\lambda^\beta_a. \qquad (9)$$

Из (9) следует

Т е о р е м а 1. Оснащение Бортолотти позволяет ввести связность в главном расслоении [3].

Используя (2),(4) и (9), получим

$$dA_\alpha=\tilde\omega^\beta_\alpha A_\beta+\omega^a_\alpha B_a,\quad dB_a=\tilde\omega^b_a B_b+(\dots)^\alpha_a A_\alpha, \qquad (10)$$

где $\tilde\omega^\beta_\alpha=\omega^\beta_\alpha-\Gamma^\beta_{\alpha i}\tau^i$, $\tilde\omega^b_a=\omega^b_a-\Gamma^b_{ai}\tau^i$.

Из (10) следуют два утверждения.

Т е о р е м а 2. Подобъект $\Gamma_1=\{\Gamma^\alpha_{\beta i}\}$ объекта Γ характеризуется проектированием на плоскость L_{p+1} смежной с ней плоскости $L_{p+1}+dL_{p+1}$ из оснащающей плоскости P_{n-p-2}.

Т е о р е м а 3. Подобъект $\Gamma_2=\{\Gamma^b_{ai}\}$ объекта Γ характеризуется проектированием на плоскость P_{n-p-2} смежной с ней плоскости $P_{n-p-2}+dP_{n-p-2}$ из центра L_{p+1}.

Запишем dB_a в виде

$$dB_a=(\dots)^b_a B_b+\underline{\Delta}\lambda^\alpha_a A_\alpha, \qquad (11)$$

где $\underline{\Delta}\lambda^\alpha_a$ -ковариантный дифференциал квазитензора λ^α_a [4]

Из (11) следует

Т е о р е м а 4. Оснащающая плоскость остается на месте тогда и только тогда, когда ковариантный дифференциал $\underline{\Delta}\lambda^\alpha_a=0$.

Следовательно, связность Γ не допускает параллельного перенесения оснащающей плоскости.

Список литературы

1.Худенко В.Н. К геометрии многообразий многомерных квадрик.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.11,Калининград,1980,с.98-101.

2.Остиану Н.М. Об инвариантном оснащении семейства многомерных плоскостей.- Тр.геометр.семинара, т.2,с.247-262.

3.Шевченко Ю.И. Об оснащениях многообразий плоскостей в проективном пространстве.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.9.Калининград, 1978,с.124-134.

4.Шевченко Ю.И. Геометрическая характеристика некоторых индуцированных связностей поверхности.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.12,Калининград,1981,с.126-130.

5. Bortolotti E. Connessioni nelle varieta luogo di spazi. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1933, 3, 81-89.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.14 1983

УДК 514.75

В.П.Ц а п е н к о

СЕМЕЙСТВО ПЛОСКОСТЕЙ,АССОЦИИРОВАННЫХ С ГИПЕРКОНГРУЭНЦИЕЙ V_{n-1}

В n-мерном проективном пространстве рассмотрим $(n-1)$-параметрическое невырожденное многообразие пар фигур (P,Q) -гиперконгруэнцию V_{n-1} .Здесь Q -гиперквадрика,а P -неинцидентная ей точка.

Отнесем многообразие V_{n-1} к реперу $R=\{A,A_i,A_n\}$ $(A=A_0;\ i,j,k\ldots=\overline{1,n-1})$,где вершина A помещена в точку P ,а вершины A_i - в касательную гиперплоскость T_{n-1} к гиперповерхности S_{n-1},описанной точкой P .Уравнение гиперквадрики Q и система уравнений Пфаффа многообразия V_{n-1} запишутся в виде

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + 2 a_{0\alpha} x^0 x^\alpha + (x^0)^2 = 0,$$

$$\omega_0^n = 0, \quad \omega_i^n = \Lambda_{ij}\,\omega_0^j \quad (\Lambda_{ij}=\Lambda_{ji}),$$

$$\nabla a_{\alpha\beta} - a_{0\alpha}\,\omega_\beta^0 - a_{0\beta}\,\omega_\alpha^0 = a_{\alpha\beta i}\,\omega_0^i,$$

$$\nabla a_{0\alpha} - \omega_\alpha^0 = a_{0\alpha i}\,\omega_0^i \quad (\alpha,\beta,\ldots = 1,2,\ldots,n),$$

где оператор ∇ определяется по правилу $\nabla E_{a_1\ldots a_\tau} = dE_{a_1\ldots a_\tau} - E_{b a_2\ldots a_\tau}\omega^b_{a_1} - \ldots - E_{a_1\ldots a_{\tau-1} b}\,\omega^b_{a_\tau} + \tau E_{a_1\ldots a_\tau}\,\omega_0^0$.

Рассматривая структурные уравнения,которым удовлетворяют базисные формы ω_0^i и вторичные формы $\omega_0^0, \omega_j^i, \omega_i^0, \omega_n^n, \omega_n^i, \omega_n^0$, получаем,что с гиперконгруэнцией V_{n-1} ассоциируется главное расслоение $G_\tau(S_{n-1})$,базой которого является гиперповерхность S_{n-1} ,а типовым слоем - подгруппа стационарности G_τ $(\tau=n^2+1)$ центрированной гиперплоскости T_{n-1} .В главном расслоении $G_\tau(S_{n-1})$фундаментально-групповую связность зададим по Г.Ф.Лаптеву [1],вводя формы связности: