УДК 519.6(075.8)+533.922

Г. В. Квитко, К. С. Латышев, Т. А. Аноева

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРАНСПОРТИРОВКИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ. АНАЛОГИЯ С УРАВНЕНИЯМИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Проведено аналитическое сравнение гиперболической системы из четырех уравнений для моментов функции распределения электронов релятивистского электронного пучка (РЭП), моделирующей процессы его транспортировки в газовой среде, и уравнений газовой динамики для идеального политропного газа. Найденная аналогия между этими моделями позволила уточнить математическую постановку задачи для РЭП и облегчить выбор граничных условий задачи.

Analytical comparison of hyperbolic system consists of four equations for moments of the distribution function of relativistic electron beam (REB), the modeling transportation processes in the gas environment and the equations of gas dynamics of ideal polytropic gas was carried out. The found analogy between these models allowed to specify mathematical statement of a problem for REB and to facilitate a choice of edge conditions of the task.

Ключевые слова: релятивистский электронный пучок, функция распределения, моментные уравнения, гиперболическая система, начальные и граничные условия, газовая динамика, газовая струя.

Key words: relativistic electron beam, distribution function, moment's equations, hyperbolic system, initial and boundary conditions, gas dynamics, gas stream.

Введение

Общепринятой методологической основой для построения различных моделей транспортировки РЭП является аппарат кинетических уравнений [1; 2] с самосогласованным полем для функции распределения $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ электронов пучка. В общем случае отыскание решений кинетического уравнения — задача достаточно трудная, и поэтому используются различные упрощающие предположения, сокращающие размерность задачи и упрощающие ее математическую постановку.

При квазигидродинамическом описании РЭП основа математической модели — уравнения для моментов функции распределения. В методе моментов [3] кинетическое уравнение — генератор для получения, вообще говоря, бесконечной цепочки уравнений, связывающих параметры пучка. В силу сложного характера такие системы (обрезанные и замкнутые), как правило, решаются численно. Аналитическое исследование процессов распространения релятивистских пучков возможно в отдельных частных случаях, один из которых и рассмотрен.

Система моментных уравнений для электронов РЭП

В работе [4] из кинетического уравнения для установившегося пучка (взятого в той части пространства, где уже закончилась ионизация, то есть $\partial f / \partial t = 0$) при учете ряда физических упрощений (взаимодействия только кулоновские, дебаевское экранирование, пренебрежение коллективным азимутальным движением $\partial f / \partial \phi = 0$, приближение Фоккера — Планка и т. д.) такая задача была решена. По известной технологии в цилиндрической системе координат $\{r, \varphi, z\}$, где эволюционная переменная z, направлена по пучку, была получена замкнутая нелинейная система из шести интегродифференциальных уравнений для моментов одночастичной функции распределения $f(r, \phi, z, p_r, p_\phi, p_z)$ электронов РЭП. Предполагалось, что продольное движение частиц пучка является детерминированным, а распределение электронов РЭП по поперечным импульсам и координатам носит стохастический характер. Такое требование приводит к выполнению условий $\theta_r << 1$ и $\theta_\phi << 1$ (параксиальное предположение). Переменные $\theta_r = p_r / p_z$, $\theta_\phi = p_\phi / p_z$ представляют собой углы наклона электронов пучка к радиальному и азимутальному направлениям соответственно, а p_r, p_φ, p_z — компоненты вектора импульса электронов РЭП. Параксиальность и моноэнергетичность пучка обеспечивают выполнение условия, по которому продольная компонента импульса p_z считается одинаковой для всех электронов пучка, в связи с чем функция распределения электронов РЭП не меняется от продольной составляющей импульса p_z, то есть $\partial f / \partial p_z = 0$. Задача рассматривалась в отсутствии внешних электрических полей.

Полученная в [4] система уравнений, моделирующая процессы транспортировки РЭП, ввиду своей сложности допускает проведение лишь численного исследования задачи. Но если исключить влияние внешнего магнитного поля и рассматривать систему только для первых низших четырех моментных функций, то пространственная эволюция РЭП будет описываться уже системой из четырех уравнений, которая близка к одномерным уравнениям газовой динамики и имеет вид:

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{b}}{\partial r} = \vec{f}, \qquad (1)$$

где

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho\cdot u_r\\ p_{rr}+\rho\cdot u_r^2\\ p_{\phi\phi}\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}u_r\rho\\ p_{rr}+u_r^2\rho\\ 3u_r p_{rr}+u_r^3\rho\\ u_r p_{\phi\phi}\end{pmatrix},\ \vec{f}=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ f_3\\ f_4\end{pmatrix},$$

$$f_1=-\frac{1}{r}u_r\rho,\ f_2=-\frac{1}{r}\left[\left(p_{rr}-p_{\phi\phi}\right)+u_r^2\rho\right]-\frac{2}{r}\mu\eta\rho,$$

$$f_3=-\frac{1}{r}\left[\left(3p_{rr}-2p_{\phi\phi}\right)u_r+u_r^3\rho\right]-\frac{4}{r}\mu\eta u_r\rho+\frac{1}{2}I_{st}\,\rho,\ f_4=-\frac{3}{r}p_{\phi\phi}u_r+\frac{1}{2}I_{st}\rho.$$

Моменты функции распределения $f(r,z,\theta_r,\theta_\phi)$, входящие в систему (1): 0-й момент $\rho=\hat{T}(f)$ интерпретируется как плотность (или концентрация) электронов пучка; два момента 1-го порядка $u_r=\hat{T}(\theta_r f)$ и $u_\phi=\hat{T}(\theta_\phi f)$ — радиальная и азимутальная составляющие средней массовой скорости электронов пучка соответственно, а два центрированных момента 2-го порядка $p_{rr}=\hat{T}[(\theta_r-u_r)^2 f]$, $p_{\phi\phi}=\hat{T}[(\theta_\phi-u_\phi)^2 f]$ характеризуют величину разброса скоростей электронов РЭП относительно среднего значения и представляют собой диагональные компоненты тензора давлений. Оператор $\hat{T}$ осуществляет интегрирование по пространству скоростей (углов θ): $\hat{T}(...)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(...)d\theta_r\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\theta_\phi$. Все моменты являются функциями r и z. В систему (1) входят параметры: $\mu=I/I_A$ — отношение тока пучка к предельному току Альфвена; $\eta=\eta(r,z)$ — функция зарядовой компенсации пучка; $\Omega_c=\omega_c/\beta c$, где β — релятивистский фактор, c — скорость света, ω_c — циклотронная частота и I_{st} — интеграл столкновений электронов пучка с частицами среды.

Так как все корни характеристического уравнения системы (1) $\lambda_{1,2}=u_r$, $\lambda_{3,4}=u_r\pm\sqrt{3p_{rr}/\rho}$ вещественные, то можно говорить о гиперболичности полученной системы уравнений. Все моментные функции, входящие в (1), представляют собой осредненные параметры, которые можно непосредственно сравнивать с результатами эксперимента.

Система уравнений (1) дополняется начальными и граничными условиями. В качестве начальных условий могут быть выбраны, вообще говоря, произвольные функции. Что касается граничных условий, то если предполагать их гладкость вблизи оси пучка и на правой границе, то они должны обладать следующими свойствами. На левой границе (ось пучка) имеем:

$$u_r(0,z)=0,\ u_\phi(0,z)=0,\ p_{rr}(0,z)=p_{\phi\phi}(0,z).$$

На правой границе пучка $r=a$ (в принципе, при разлете пучка может иметь место условие $a\to\infty$):

$$\rho(a, z) = 0,\ p_{rr}(a, z) = 0,\ p_{\phi\phi}(a, z) = 0.$$

Все производные моментных функций по переменной r на обеих границах ограничены. С учетом начальных и граничных условий для системы моментных уравнений (1) поставлена краевая задача.

Аналогия с газовой динамикой

Сравним наши уравнения для РЭП с известной системой уравнений газовой динамики [5]. В системе (1) составляющая тензора давлений p_{rr} играет роль гидродинамического давления, а величина $\sqrt{3p_{rr} / \rho}$ определяет скорость распространения малых возмущений (аналог скорости звука в газе).

Интеграл столкновений I_{st} — источник тепловой энергии, а члены, содержащие произведение $\mu\cdot\eta$, задают массовую сжимающую силу, противодействующую разлету пучка за счет разброса скоростей.

На линиях тока $\lambda = dr / dz = u_r$ выполняются два соотношения:

$$d\ln[p_{rr} / (r^3\rho^3)] = I_{st}\rho / (2p_{rr})dz\,,$$
$$d\ln[p_{\phi\phi}r^2 / \rho] = I_{st}\rho / (2p_{\phi\phi})\,dz\,.$$

Если пренебречь столкновениями ($I_{st} = 0$), то величины $p_{rr} / (r^3\rho^3)$ и $(p_{\phi\phi}\, r^2) / \rho$ сохраняются вдоль линий тока и представляют собой аналог энтропийной функции.

В отличие от уравнений газовой динамики, инварианты системы моментных уравнений для РЭП содержат явную зависимость от пространственной r-координаты. Это проявляется в том, что при линейном сжатии или расширении, когда $u_r(r,z) = rV_r(z)$, вдоль линий тока можно записать соотношения $\rho r^2 = \text{const}$, $p_{rr} / \rho^2 = \text{const}$ и $p_{\phi\phi} / \rho^2 = \text{const}$. Таким образом, при линейном характере движения электронного газа пучка его свойства соответствуют поведению идеального газа (с показателем адиабаты $\sigma = 2$). В этой ситуации различия между составляющими p_{rr} и $p_{\phi\phi}$ тензора давления стираются. В частности, это проявляется в окрестности оси симметрии, где $p_{rr} = p_{\phi\phi}$, а скорость u_r можно считать линейной с точностью до величины третьего порядка малости. При этом дифференциальная часть системы (1) совпадает с уравнениями газовой динамики, и решение системы моментных уравнений ведет себя (в некотором смысле) подобно решению газодинамических уравнений, описывающих уравнение газовой струи. Основное качественное отличие этих двух решений заключается в том, что затопленная струя удерживается от разлета имеющимся в невозмущенной среде противодавлением, в то время как пучок удерживается массовыми силами.

При отсутствии рассеяния пучок заряженных частиц, описываемый (1), может иметь конечную границу; в частности, допускается стационарное решение, не зависящее от пространственной переменной z. Равновесие возможно при выполнении во всех точках $r \geqslant 0$ условия $r \cdot \partial p_{rr} / \partial r = p_{\phi\phi} - p_{rr} - 2\mu \cdot \eta(r) \cdot \rho$. Граница пучка — линия тока, и на ней «давление» p_{rr} и «скорость звука» $\sqrt{3p_{rr} / \rho}$ должны принимать нулевые значения. При этом функции p_{rr} и ρ могут быть, вообще говоря, разрывными и не обращаться в нуль при приближении к границе. Однако такая постановка задачи некорректна в физическом смысле, то есть не удовлетворяет начальным условиям в реальных пучках. Поэтому ограничимся случаями, когда при $r \to r_{гр}$ имеем $\rho \to 0$, $p_{rr} \to 0$ и $p_{\varphi\varphi} \to 0$.

При численном решении (1) в эйлеровых переменных возникают трудности с заданием граничных условий и с проведением расчета вблизи внешней границы пучка: условие на границе $\rho = p_{rr} = p_{\varphi\varphi} = 0$ в терминах сплошной среды означает вакуум, и численное решение при близких к вакууму условиях может терять устойчивость.

Серьезные затруднения вызывает то, что при проведении численных расчетов необходимо достаточно далеко по z рассчитывать эволюционную задачу. В рамках рассматриваемой модели оказалось, что граничные условия не оказывают воздействия на течение электронного газа внутри рассматриваемой области, а значит, не влияют и на решение поставленной задачи о транспортировке РЭП. Это решение определяется только начальными условиями при $z = 0$. Можно доказать, что по мере приближения к границе скорость передачи звуковых возмущений стремится к нулю. Также несложно доказать, что при наличии рассеяния ($I_{st} > 0$) в рассматриваемой нами моментной модели пучок не может иметь конечной границы по переменной r и решение системы (1) нужно рассматривать во всей области $r \geqslant 0$.

Это приводит к тому, что при движении по z постепенно теряется точность численного решения. Чтобы уменьшить влияние этого эффекта, при обсчете системы моментных уравнений в эйлеровых переменных применяют численные методы высокого порядка точности.

Как и для уравнений газовой динамики, решение системы моментных уравнений может иметь разрывы, на которых выполняются соотношения Гюгонио:

$$D[\rho] = [u_r\rho],\ D[u_r\rho] = [p_{rr} + u_r^2\rho],\ D[p_{rr} + u_r^2\rho] = [u_r(3p_{rr} + u_r^2\rho)],\ \ D[p_{\phi\phi}] = [u_r p_{\phi\phi}],$$

где D – скорость движения фронта разрыва, а $[F] = F_П - F_Л$ — скачок расчетных параметров при переходе через разрыв. По аналогии с газовой динамикой называют «ударными волнами» те разрывы, поток массы через которые отличен от нуля. Это означает, что

$$m = \rho_П (u_{rП} - D) = \rho_Л (u_{rЛ} - D) \neq 0\,.$$

В тех случаях, когда электронный газ пучка является бесстолкновительным, физическая основа возникновения «ударных волн» в пучках будет другая, чем в газодинамических процессах. Это явление связано с действием массовых сжимающих сил.

«Ударные волны», распространяющиеся на периферию, вызывают дополнительные трудности, которые наиболее ярко проявляются при проведении расчета вблизи внешней границы пучка. Это требует применения численных методов, достаточно хорошо описывающих разрывные решения, например метода распада-разрыва С. К. Годунова.

Проделанный сравнительный анализ позволяет заключить, что между уравнениями газовой динамики и моментными уравнениями (1) для пучка существуют определенная аналогия. Это позволяет, во-первых, уточнить математическую постановку задачи транспортировки РЭП, во-вторых, облегчить выбор соответствующих граничных условий для задачи транспортировки РЭП и, в-третьих, определиться с корректным выбором численных методов решения задачи.

Список литературы

1. *Lee E. P.* Kinetic theory of a relativistic beams // Phys. Fluids. 1976. Vol. 19, № 1. P. 60—69.

2. *Lee E. P., Cooper R. K.* General envelope equation for cylindrically symmetric charged particle beams // Part. Accel. 1976. Vol. 7. P. 83—95.

3. *Баранцев Р. Г.* Метод интегральных моментных кинетических уравнений // ДАН СССР. 1963. Т. 151, № 5. С. 1038—1041.

4. *Квитко Г. В., Латышев К. С.* Транспортировка релятивистского электронного пучка в газоплазменных средах и продольном магнитном поле // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, № 6. С. 29—43.

5. *Самарский А. А., Попов Ю. П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. М., 1980.

Об авторах

Геннадий Васильевич Квитко — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: gkvitko.univ@ gmail.com

Константин Сергеевич Латышев — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: KLatyshev@kantiana.ru

Аноева Татьяна Алексеевна — асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: an_tanushka@mail.ru

About authors

Dr Gennady Kvitko — assistant professor, I. Kant Federal University, Kaliningrad.
E-mail: gkvitko.univ@gmail.com

Dr Konstantin Latyshev — professor, I. Kant Federal University, Kaliningrad.
E-mail: KLatyshev@kantiana.ru

Tatyana Anoeva — PhD student, I. Kant Federal University, Kaliningrad.
E-mail: an_tanushka@mail.ru