УДК 519.86

Л. Г. Корсакова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОИЗВОДСТВА ПРОДУКЦИИ ПРИ РАЗНОРОДНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

Рассматривается проблема оптимизации стоимостных результатов деятельности фирмы при разнородных ограничениях. Обоснована целесообразность и эффективность применения для этих целей множителей Лагранжа, что позволяет перейти от условного экстремума к безусловному. Показано, что при определенных условиях подход на основе множителей Лагранжа может быть применен и для дифференцированного учета затрат на производство продукции многопродуктовой фирмой.

This paper addresses the problem of optimizing a company's cost performance under heterogeneous constraints. The author proves the appropriateness and efficiency of applying the Lagrange multipliers to this end, which makes it possible to move from the conditional to the unconditional extremum. The article shows that, under certain conditions, the Lagrange multiplier based approach can be applied to differential cost accounting for the production of a multiproduct firm.

Ключевые слова*:* дифференцированный учет затрат, разнородные ограничения, множитель Лагранжа, условный и безусловный экстремумы.

Key words*:* differential cost accounting, heterogeneous constraints, Lagrange multipliers, conditional and unconditional extrema.

Фундаментальной проблемой экономики является оценка затрат и результатов. Анализ затрат при ряде допущений сравнительно прост. Так, при изолированном рассмотрении отдельной однопродуктовой фирмы достаточно просто просуммировать отдельные элементы затрат. Однако данная задача применима в первую очередь только для целей иллюстрации метода. В реальности фирмы развиваются как многопродуктовые комплексы, где производство различных видов продукции взаимосвязано и требует разнородных ресурсов. В принципе возможно организовать учет затрат по отдельным видам продукции, а на этой основе провести минимизацию этих затрат. Однако сумма *локальных минимумов* еще не приводит к *глобальному минимуму*, т.е. минимуму общих затрат на производство всей продукции, поскольку при этом не учитывается влияние производства одного вида продукции на затраты по производству других видов продукции. Например, затраты на производство продукции тепличным хозяйством за счет вторичного тепла, производимого ТЭЦ, и за счет собственной котельной будут существенно отличаться. Таким образом, необходимо анализировать не только затраты на производство продукции, но и влияние данного производства на затраты по выпуску других видов продукции в рамках многопродуктовой фирмы. Как будет показано в статье, для решения этой задачи целесообразно использовать *метод множителей Лагранжа.*

Задачу нахождения минимума затрат производства приходится решать при ограничениях на ресурсы и взаимозависимости переменных, от которых зависит оптимизируемая величина, что требует *условной оптимизации*. Применение множителей Лагранжа позволяет перейти к поиску *безусловного оптимума*.

Функция Лагранжа в самом общем случае имеет вид

$$L(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m)=f(x_1,\ldots x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(g_i(x_1,\ldots,x_n)-b_i\right),$$

где $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ — некоторые коэффициенты, значения которых заранее неизвестны. Эти коэффициенты называются множителями Лагранжа. Функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ — это функция цели, соотношения $g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)=b_i,\quad 1\le i\le m$ — уравнения связи.

При решении оптимизационных задач разнородные ограничения: по бюджету (ден. ед.), по площадям производственных помещений (м^2), по количеству наемных работников (чел.) и т.д. представляют систему неравенств или равенств. Важно подчеркнуть, что данные ограничения разнородны, имеют различную природу и в силу этого непосредственно не сводимы к единой интегральной оценке.

Функция Лагранжа при разнородных ограничениях является их линейной комбинацией, коэффициентами которой выступают множители Лагранжа. Они определяют размерность и имеют для каждой конкретной ситуации особый экономический смысл. Рассмотрим основные классы таких задач.

Первый класс составляют задачи нахождения минимума затрат производства, в которых множители Лагранжа — это нормативы эффективности материальных ресурсов, использование которых позволяет нахождение условного экстремума свести к задаче нахождения безусловного экстремума.

Пусть нам даны m различных условий приложения разнородных ресурсов, наличие каждого из них на начало планового периода обозначим Q_h, где $h = 1,2,\ldots,m$. Требуется произвести n различных продуктов. Затраты труда на каждого из них — c_i, где $i = 1,2,\ldots,n$. Обозначим затраты h-го средства производства на i-й продукт через q_{hi}. Затраты труда c_i имеют разные значения в зависимости от используемых средств производства, т. е.

$$c_i = f_i\left(q_{1i}, q_{2i}, \ldots, q_{mi}\right),\ (i = 1,2,\ldots,n,\ h = 1,2,\ldots,m),$$

причем все эти функции имеют непрерывные частные производные по q_{hi}. Нужно найти такое распределение средств производства и вложений между различными назначениями (т. е. такие q_{hi}), при которых $\sum_{i=1}^{n} c_i = \min$ при условии, что использование каждого средства производства равно его наличию:

$$\sum_{i=1}^{n} q_{hi} - Q_h = 0. \qquad (1)$$

Прибавив к функции, минимум которой мы ищем $\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)$, условия (1), умноженные на некоторые (пока неизвестные) множители λ_h, получим более сложную функцию

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} c_i + \sum_{h=1}^{m} \lambda_h \left(\sum_{i=1}^{n} q_{hi} - Q_h\right).$$

При соблюдении условий (1) эта функция равна $\sum_{i=1}^{n} c_i$. Приравнивая нулю частные производные первого порядка по q_{hi} от этой функции (считая λ_h постоянными), получим mn уравнений вида

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_{hi}} = \frac{\partial}{\partial q_{hi}}\left(c_i + \sum_{h=1}^{m} \lambda_h\, q_{hi} = 0\right). \qquad (2)$$

Вместе с m условиями (1), выражающими требование равенства расхода каждого средства производства его наличию, получаем nm+m уравнений, решая которые находим nm неизвестных q_{hi} и m множителей $\lambda_h z$. Таков путь нахождения *минимума затрат* по методу Лагранжа. Практическая реализация этого метода достаточно сложна, поэтому находят соотношения между конечными величинами, соответствующие уравнениям (2). Поскольку равенство нулю градиента функции является необходимым условием ее экстремума, то полученные равенства предположительно можно заменить соотношениями:

$$c_i + \sum_{h=1}^{m} \lambda_h\, q_{hi} = extremum. \qquad (3)$$

Для проверки этого предположения просуммируем выражение (3) по i, получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{m} \lambda_h\, q_{hi}.$$

В этом выражении двойная сумма — величина постоянная (при данных λ_h), не зависящая от распределения Q_h по различным назначениям:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{m} \lambda_h\, q_{hi} = \sum_{h=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \lambda_h\, q_{hi} = \sum_{h=1}^{m} \lambda_h \sum_{i=1}^{n} q_{hi} = \sum_{h=1}^{m} \lambda_h\, Q_h = const.$$

Значит, если сумма $\sum_{i=1}^{n} c_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{m} \lambda_h\, q_{hi} z$ в минимуме, то и $\sum_{i=1}^{n} c_i = \min$.

Решение задачи по методу Лагранжа дает нам такие множители для средств производства, при которых совместно осуществляются следующие соотношения: $S_i = \sum_{i=1}^{n} c_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{m} \lambda_h\, q_{hi} = \min$ и

$\sum_{i=1}^{n} q_{h\,i} = Q_h$. Это означает совместимость частных минимумов S_i. Но S_i выражают не что иное, как дифференциальные затраты по i-му продукту. Метод Лагранжа позволяет найти множители, необходимые для исчисления дифференциальных затрат: λ_h по смыслу своему нормативы эффективности Q_h .

Другой класс задач связан с нахождением максимального дохода от выпуска двух продуктов, для производства которых нужны два вида одних и тех же ограниченных ресурсов. Пусть заданы производственные функции каждого из них. Суммарное количество каждого фактора фиксировано. Заданы цены продуктов. При каких условиях доход от выпуска будет максимальным?

Для решения этой задачи обозначим через x_1 и x_2 объемы выпуска первого и второго продуктов соответственно. Пусть x_3 и x_4 — объемы факторов, использованные при производстве первого продукта с производственной функцией $x_1 = F_1(x_3, x_4)$. Аналогично, пусть x_5 и x_6 — объемы факторов, использованные при производстве первого продукта с производственной функцией $x_2 = F_2(x_5, x_6)$. Предполагается, что x_3 и x_5 представляют один и тот же фактор, так же как x_4 и x_6.

Задача состоит в следующем:

$$max\ \{f(x) = p_1x_1 + p_2x_2\},$$
$$x_1 - F_1(x_3, x_4) = 0,\ x_3 + x_5 - k_1 = 0,$$
$$x_2 - F_2(x_5, x_6) = 0,\ x_4 + x_6 - k_2 = 0.$$

Функция Лагранжа в этом случае запишется в виде

$$L(x,\lambda) = p_1x_1 + p_2x_2 - \lambda_1\left(x_1 - F_1(x_3,x_4)\right) - \lambda_2\left(x_2 - F_2(x_5,x_6)\right) -$$
$$-\lambda_3\left(x_3 + x_5 - k_1\right) - \lambda_4\left(x_4 + x_6 - k_2\right).$$

Приравнивая частные производные по x нулю, получим условия на выпуск, максимизирующие доход:

$$p_1\left(\partial F_1/\partial x_3\right) = p_2\left(\partial F_2/\partial x_5\right) = \lambda_3, \qquad p_1\left(\partial F_1/\partial x_4\right) = p_2\left(\partial F_2/\partial x_6\right) = \lambda_4.$$

Следовательно, стоимость предельного продукта по каждому фактору будет одна и та же в обеих отраслях. Заметим, что все множители Лагранжа оказались равными ценам: λ_1, λ_2 — цены продуктов, λ_3, λ_4 — цены факторов.

Третий класс задач связан с анализом производственных функций. Фирма производит однородную продукцию, затрачивая при этом n видов ресурсов. Выпуск y задается производственной функцией $y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где x_i — затраты i-го вида ресурса, $x_i \geq 0$ при $1 \leq i \leq n$. Предположим, что функция F имеет частные производные по всем переменным во всех внутренних точках области определения R_+^n .

Пусть p_i — цена i-го вида ресурса $(p_i \geq 0)$, C — бюджет фирмы, т.е. сумма, которую фирма может потратить на закупку ресурсов. Предположим, что фирма собирается потратить с этой целью всю сумму C. Тогда переменные x_i должны удовлетворять ограничению $p_1x_1 + \ldots + p_nx_n = C$.

Найдем условный экстремум функции $y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при наличии уравнения связи $p_1x_1 + \ldots + p_nx_n = C$. Для этого составим функцию Лагранжа

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = F(x_1, \ldots, x_n) - \lambda\left(p_1x_1 + \ldots p_nx_n - C\right)$$

и найдем ее стационарные точки — решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \dfrac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) - \lambda p_1 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_n} = \dfrac{\partial F}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) - \lambda p_n = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = p_1x_1 + \ldots + p_nx_n - C = 0. \end{cases}$$

Предположим, что эта система имеет решение $\left(x_1^0, \ldots x_n^0, \lambda^0\right)$, причем $x_i^0 > 0$ при $1 \leq i \leq n$. Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\left(x_1^0,\dots x_n^0\right)=\lambda^0 p_1, \quad \dots \quad \frac{\partial F}{\partial x_n}\left(x_1^0,\dots x_n^0\right)=\lambda^0 p_n.$$

Итак, можно сделать вывод о том, что в точке условного экстремума предельные выпуски по ресурсам пропорциональны ценам этих ресурсов с коэффициентом пропорциональности λ^0.

Таким образом, применение множителей Лагранжа позволяет распределить ограниченные ресурсы фирмы (а ресурсы всегда ограничены, по крайней мере, возможны альтернативные варианты их использования) для производства различных видов продукции, а также перейти от поиска условного экстремума к безусловному в условиях взаимовлияющих переменных.

На уровне региона, в определенном смысле, решаются сходные задачи. Здесь также ресурсы ограничены. Однако региональные власти редко могут решать проблемы прямым административным запретом. Чаще применяются методы экономического регулирования эффективного распределения ресурсов между предпринимательскими структурами с целью оптимизации их использования.

Список литературы

1. *Зайцев М. Г., Варюхин С. Е.* Методы оптимизации управления и принятия решений: примеры, задачи, кейсы: учеб. пособие. 2-е изд., испр. М., 2008.
2. *Математическое* моделирование: Проблемы и результаты. М., 2003.
3. *Томас Р.* Количественные методы анализа хозяйственной деятельности / пер. с англ. М., 1999.

Об авторе

Людмила Григорьевна Корсакова — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, e-mail: LKorsakova@kantiana.ru

About author

Dr. Ludmila Korsakova, Associate Professor, I. Kant Baltic Federal University, e-mail: LKorsakova@kantiana.ru