УДК 514.74

Л. А. Игнаточкина[1], Н. С. Попова[1]
[1] Московский педагогический государственный университет, Россия
ignlia@gmail.com, nasik63@mail.ru

О свойствах ℓ -медиан *k*-симплексов и *k* -призм

Рассмотрены k-симплексы и k-призмы в n-мерных аффинных пространствах. Доказаны некоторые теоремы о медианах k-симплексов. Введено понятие ℓ -медианы k-призмы. Доказаны теоремы, описывающие некоторые аффинные свойства ℓ -медиан k-призмы.

Ключевые слова: аффинное пространство, симплекс, l-медиана.

1. Введение. Обобщением понятий треугольника и тетраэдра в многомерных аффинных пространствах является k -симплекс. Многие понятия, связанные с треугольником и тетраэдром, переносятся на k -симплексы. При этом для k -симплексов доказываются теоремы, аналогичные теоремам для треугольников и тетраэдров. В данной работе мы рассмотрим обобщения понятия медианы треугольника. Уже при переходе к тетраэдру кроме медиан тетраэдра появляется возможность рассматривать бимедианы тетраэдра — отрезки, которые соединяют середины противоположных ребер тетраэдра. Они обладают свойствами, аналогичными свойствам медиан тетраэдра, хотя и не повторяют их дословно. При переходе к k -симплексам появляется еще больше возможностей для введения в рассмотрение отрезков, сходных по свойствам с медианами треугольника, а именно ℓ -медиан [1].

Поступила в редакцию 06.02.2018 г.

Из двух k-симплексов, совмещаемых параллельным переносом на вектор, не параллельный их k-плоскостям, получается обобщение треугольной призмы трехмерного пространства. Назовем эти фигуры k-призмами. Мы введем для них аналоги ℓ-медиан k-симплекса и изучим некоторые их аффинные свойства.

2. k-симплексы и k-призмы. Пусть дано n-мерное векторное пространство V^n. Напомним [2], что *n-мерным аффинным пространством* A^n называется множество A^n, для которого определено отображение $\sigma : A^n \times A^n \to V^n$, удовлетворяющее двум условия: 1) для любого элемента $X \in A^n$ и любого вектора $\vec{p} \in V^n$ существует единственный элемент $Y \in A^n$, такой что $\sigma(X, Y) = \vec{p}$; 2) для любых элементов $X, Y, Z \in A^n$ $\sigma(X, Y) + \sigma(Y, Z) = \sigma(X, Z)$. Второе условие называется *правилом треугольника*. Элементы множества A^n называются *точками*, векторное пространство V^n — *пространством трансляций*. Будем обозначать $\sigma(X, Y) = \overrightarrow{XY}$.

Пусть в пространстве трансляций V^n задана линейно независимая система векторов $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$, а в аффинном пространстве A^n фиксирована точка A_0. *k-симплексом* аффинного пространства A^n называется множество точек $X \in A^n$, таких, что

$$\overrightarrow{A_0X} = t^1\vec{a}_1 + \ldots + t^k\vec{a}_k, \quad t^i \geq 0, \; i = 1, \ldots, k, \quad \sum_{i=1}^{k} t^i \leq 1.$$

Очевидно, что 1-симплекс — это отрезок, 2-симплекс — треугольник (с внутренними точками), 3-симплекс — тетраэдр (с внутренними точками). Договоримся одну точку называть 0-симплексом.

Точка k-симплекса, для которой $t^i = 1, i = 1, \ldots, k$ — произвольное фиксированное значение, а остальные $t^j = 0$, обозначается A_i и называется *вершиной* k-симплекса. Очевидно, что $\overrightarrow{A_0 A_i} = \vec{a}_i$. Симплекс обозначается перечислением своих вершин: $A_0 A_1 \ldots A_k$. Для удобства проведения доказательств обозначим $\vec{a}_0 = \overrightarrow{A_0 A_0} = \vec{0}$. Тогда $\overrightarrow{A_i A_j} = \vec{a}_j - \vec{a}_i$, $i, j = 0, 1, \ldots, k$.

Если в определении k-симплекса условия на коэффициенты t^j заменить на условия $t^j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, k$, то получим определение k-плоскости аффинного пространства. Другими словами, k-симплекс содержится в k-плоскости, которая определяется его вершинами. Так как любая k-плоскость является k-мерным аффинным пространством (ее пространство трансляций — это ее направляющее подпространство), то для исследования свойств k-симплексов можно использовать k-мерные аффинные пространства.

Пусть дан k-симплекс $A_0 A_1 \ldots A_k$. Рассмотрим его вершины $A_{i_0}, \ldots, A_{i_m}$, $m \le k$. Тогда множество точек

$$\{X \in A^n : \overrightarrow{A_{i_0} X} = \mu^1 \overrightarrow{A_{i_0} A_{i_1}} + \ldots + \mu^m \overrightarrow{A_{i_0} A_{i_m}}, \mu^a \ge 0,$$

$$a = 1, \ldots, m, \ \sum_{a=1}^{m} \mu^a \le 1\}$$

называется m *-гранью* k-симплекса. Оно, очевидно, является m -симплексом. 1-грань также называется *ребром* k-симплекса.

Пусть в аффинном пространстве A^n дан k-симплекс $A_0 A_1 \ldots A_k$. Возьмем в пространстве трансляций V^n ненулевой вектор $\vec{b}$, не принадлежащий направляющему подпространству k-плоскости, определяемой вершинами данного k-симплекса. Рассмотрим k-симплекс $B_0B_1\ldots B_k$, который получается при параллельном переносе k-симплекса $A_0A_1\ldots A_k$ на вектор $\vec{b}$. Будем называть вершины A_i и B_i, $i = 0,\ldots, k$ соответствующими. Очевидно, что $\overrightarrow{A_iB_i} = \vec{b}$. Множество точек аффинного пространства A^n, состоящее из симплексов $A_0A_1\ldots A_k$, $B_0B_1\ldots B_k$ и отрезков, соединяющих соответствующие вершины, назовем k-*призмой.* Симплексы $A_0A_1\ldots A_k$ и $B_0B_1\ldots B_k$ будем называть *основаниями.*

3. Медианы k-симплекса и их обобщения. Медиана k-симплекса определяется по индукции. *Медианой* треугольника (2-симплекса) называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны. *Медианой* k-симплекса называется отрезок, соединяющий вершину k-симплекса с точкой пересечения медиан противоположной $(k-1)$-грани (то есть грани, которая не содержит эту вершину) [1].

Из школьного курса геометрии хорошо известна теорема: медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины. В рамках элементарной геометрии также доказывается обратная теорема: если три отрезка, соединяющие вершины треугольника с точками противоположных сторон треугольника, пересекаются в одной точке и делятся в отношении 2:1, считая от вершины, то эти отрезки являются медианами треугольника.

Эти теоремы обобщаются на случай k-симплекса [1; 3]. Прямая теорема: медианы k-симплекса пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении $k:1$, считая от вершины. Обратная теорема: если отрезки, соединяющие вершины k-симплекса с точками противоположных $(k-1)$-граней, пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении $k:1$, считая от вершины, то эти отрезки являются медианами k-симплекса.

Мы докажем обратные теоремы для треугольника и k-симплекса в более общем виде.

Теорема 1. *Если отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками прямых, содержащих противоположные стороны треугольника, пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении 2:1, считая от вершины, то эти отрезки являются медианами треугольника.*

Доказательство. Пусть дан треугольник $A_iA_jA_q$, где индексы $i,j,q=0,1,2$ и попарно различны. Пусть даны отрезки A_iK_{jq}, где K_{jq} — точки прямых A_jA_q. Обозначим точку пересечения всех этих отрезков через K. Обозначим $\vec{x}_i=\overrightarrow{A_jK_{jq}}+\overrightarrow{A_qK_{jq}}$. Чтобы доказать, что A_iK_{jq} являются медианами треугольника, достаточно доказать, что $\vec{x}_i=\vec{0}$ для любого $i=0,1,2$. Используя условие теоремы и правило треугольника, получаем

$$\vec{x}_i=\overrightarrow{A_jA_i}+\overrightarrow{A_qA_i}+3\overrightarrow{A_iK}=2\vec{a}_i-\vec{a}_j-\vec{a}_q+3\overrightarrow{A_iK}.$$

Так как это равенство верно для любых $i,j,q=0,1,2$, меняем индексы i и j местами:

$$\vec{x}_j=2\vec{a}_j-\vec{a}_i-\vec{a}_q+3\overrightarrow{A_jK}.$$

Из последних двух равенств получаем

$$\vec{x}_i-\vec{x}_j=3\vec{a}_i-3\vec{a}_j+3\overrightarrow{A_iA_j}=\vec{0}.$$

Тогда $\vec{x}_i=\vec{x}_j, i,j=0,1,2$ и различны. Так как каждый из векторов $\vec{x}_i$ параллелен стороне треугольника A_jA_q, то из последнего равенства получаем, что $\vec{x}_i=\vec{0}, i=0,1,2$.

Аналогичная теорема имеет место для k-симплекса. Для ее доказательства нам потребуется лемма.

Лемма 1. *Пусть дан k-симплекс $A_0A_1\dots A_k$ в аффинном пространстве A^n. Точка M пространства A^n является точкой пересечения медиан k-симплекса $A_0A_1\dots A_k$ тогда и только тогда, когда $\sum_{i=0}^{k}\overrightarrow{A_iM}=\vec{0}$.*

Доказательство. Пусть M — точка пересечения медиан данного k-симплекса $A_0A_1\dots A_k$. Проведем доказательство методом математической индукции. Хорошо известно, что для треугольника утверждение верно. Пусть оно верно для $(k-1)$-симплекса. Рассмотрим k-симплекс. Так как медианы k-симплекса пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении $k:1$, считая от вершины [1], получим

$$\sum_{i=0}^{k}\overrightarrow{A_iM}=\sum_{i=0}^{k}\frac{k}{k+1}\overrightarrow{A_iM_{j_0\dots j_{k-1}}},\qquad(1)$$

где $M_{j_0\dots j_{k-1}}$ — точка пересечения медиан $(k-1)$-грани $A_{j_0}\dots A_{j_{k-1}}$, $j_0,\dots,j_{k-1}=0,\dots,k$, попарно различны и отличны от i. Так как для $(k-1)$-симплекса теорема верна, получаем

$$\overrightarrow{A_{j_0}M_{j_0\dots j_{k-1}}}+\dots+\overrightarrow{A_{j_{k-1}}M_{j_0\dots j_{k-1}}}=\vec{0}.$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{A_iM_{j_0\dots j_{k-1}}}=\frac{1}{k}\left(\vec{a}_{j_0}+\dots+\vec{a}_{j_{k-1}}-k\vec{a}_i\right).$$

Подставляя это равенство в (1), получаем, что $\sum_{i=0}^{k}\overrightarrow{A_iM}=\vec{0}$.

Обратно, пусть дана точка M в пространстве A^n, для которой выполняется равенство $\sum_{i=0}^{k}\overrightarrow{A_iM}=\vec{0}$. Обозначим через

K точку пересечения медиан k-симплекса $A_0 A_1 \ldots A_k$. Тогда по доказанному для нее выполняется $\sum_{i=0}^{k} \overrightarrow{A_i K} = \vec{0}$. Вычтем из одного равенства другое. Тогда получим $\overrightarrow{KM} = \vec{0}$, то есть $K = M$ — точка пересечения медиан.

Теорема 2. *Если отрезки, соединяющие вершины k-симплекса с точками $(k-1)$-плоскостей, содержащих противоположные $(k-1)$-грани k-симплекса, пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $k:1$, считая от вершины, то эти отрезки являются медианами k-симплекса.*

Доказательство. Рассмотрим отрезки $A_i K_{j_0 \cdots j_{k-1}}$, соединяющие вершины A_i с точками $K_{j_0 \cdots j_{k-1}}$ плоскостей противоположных $(k-1)$-граней. Пусть все эти отрезки пересекаются в точке K и делятся ею в отношении $k:1$, считая от вершины. Обозначим

$$\vec{x}_i = \overrightarrow{A_{j_0} K_{j_0 \cdots j_{k-1}}} + \ldots + \overrightarrow{A_{j_{k-1}} K_{j_0 \cdots j_{k-1}}}.$$

Согласно доказанной лемме достаточно показать, что $\vec{x}_i = \vec{0}$ для всех $i = 0, \ldots, k$. Используя правило треугольника и условие теоремы, получим

$$\vec{x}_i = \overrightarrow{A_{j_0} A_i} + \ldots + \overrightarrow{A_{j_{k-1}} A_i} + (k+1)\overrightarrow{A_i K} =$$
$$= \vec{a}_{j_0} + \ldots + \vec{a}_{j_{k-1}} - k\vec{a}_i + (k+1)\overrightarrow{A_i K}.$$

Меняя индексы i и j_0 местами и вычитая из одного равенства другое, получим $\vec{x}_i - \vec{x}_{j_0} = \vec{0}$. Это верно для всех значений индексов от 0 до k. Так как каждый вектор $\vec{x}_i$ параллелен соответствующей $(k-1)$-грани $A_{j_0} \ldots A_{j_{k-1}}$, получаем $\vec{x}_i = \vec{0}$ для всех $i = 0, \ldots, k$.

Пусть дан k-симплекс $A_0A_1\ldots A_k$. Будем называть ребро A_iA_j и $(k-2)$-грань $A_{q_0}\ldots A_{q_{k-2}}$ (индексы $i, j, q_0,\ldots, q_{k-2} = 0,\ldots, k$ и все попарно различны) *противоположными*. *Бимедианой* тетраэдра называется отрезок, соединяющий середины его противоположных ребер. *Бимедианой* k-симплекса называется отрезок, соединяющий середину его ребра с точкой пересечения медиан противоположной $(k-2)$-грани [1].

Из элементарной геометрии хорошо известна теорема: бимедианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею пополам. При этом точки пересечения медиан и бимедиан тетраэдра совпадают. Обратная теорема также хорошо известна из элементарной геометрии: если три отрезка, соединяющих внутренние точки противоположных ребер тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею пополам, то эти отрезки являются бимедианами тетраэдра.

Аналогичная теорема имеет место и для k-симплексов [1]: бимедианы k-симплекса пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $(k-1):2$, считая от ребра. В [1] обратная теорема сформулирована для внутренних точек ребер и противоположных $(k-2)$-граней. Мы сформулируем и докажем эту теорему в более общем случае расположения точек.

Теорема 3. *Пусть дан k-симплекс и отрезки, соединяющие точки прямых, содержащих его ребра, с точками плоскостей противоположных $(k-2)$-граней. Если все эти отрезки пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $(k-1):2$, считая от ребра, то эти отрезки являются бимедианами данного k-симплекса.*

Доказательство. Пусть дан k-симплекс $A_0A_1\ldots A_k$. Обозначим через K_{ij} точку на прямой A_iA_j и через $K_{q_0\ldots q_{k-2}}$ — точку

$(k-2)$-плоскости грани $A_{q_0}\dots A_{q_{k-2}}$. Пусть все отрезки $K_{ij}K_{q_0\dots q_{k-2}}$ пересекаются в точке K и делятся ей в отношении $(k-1):2$.

Обозначим

$$\vec{x}_{ij}=\overrightarrow{A_iK_{ij}}+\overrightarrow{A_jK_{ij}};\ \vec{x}_{q_0\dots q_{k-2}}=\overrightarrow{A_{q_0}K_{q_0\dots q_{k-2}}}+\dots+\overrightarrow{A_{q_{k-2}}K_{q_0\dots q_{k-2}}}.$$

Используя правило треугольника и условие теоремы, получаем

$$\vec{x}_{ij}+\vec{x}_{q_0\dots q_{k-2}}=\sum_{r=0}^{k}\overrightarrow{A_rK}+2\overrightarrow{KK_{ij}}+(k-1)\overrightarrow{KK}_{q_0\dots q_{k-2}}=\sum_{r=0}^{k}\overrightarrow{A_rK}.$$

Обозначим $\sum\limits_{r=0}^{k}\overrightarrow{A_rK}=\vec{x}$, так как этот вектор не зависит от индексов $i,j,q_0,\dots,q_{k-2}$. Меняя индексы i и q_0, получим

$$\vec{x}_{ij}+\vec{x}_{q_0\dots q_{k-2}}=\vec{x};\ \vec{x}_{q_0j}+\vec{x}_{iq_1\dots q_{k-2}}=\vec{x}.$$

Вычитая из одного равенства другое, получим

$$\vec{x}_{ij}-\vec{x}_{q_0j}=\vec{x}_{iq_1\dots q_{k-2}}-\vec{x}_{q_0\dots q_{k-2}}.$$

Вектор в левой части равенства параллелен грани $A_iA_jA_{q_0}$, а в правой — грани $A_iA_{q_0}A_{q_1}\dots A_{q_{k-2}}$. Следовательно, этот вектор параллелен ребру $A_iA_{q_0}$, то есть

$$\vec{x}_{ij}-\vec{x}_{q_0j}=\lambda\vec{x}_{iq_0};\ \lambda\in\mathbb{R}. \qquad (2)$$

Циклируем в этом равенстве индексы $i\to j\to q_0\to i$:

$$\vec{x}_{jq_0}-\vec{x}_{iq_0}=\mu\vec{x}_{ji};\ \mu\in\mathbb{R}.$$

Складывая эти равенства с учетом $\vec{x}_{ij}=\vec{x}_{ji}$, получаем, что $(1-\mu)\vec{x}_{ij}=(1+\lambda)\vec{x}_{iq_0}$. Так как векторы в этом равенстве параллельны ребрам A_iA_j и $A_iA_{q_0}$, это равенство возможно, если $\vec{x}_{ij}=\vec{0}$ или $\lambda=-\mu=-1$. Во втором случае из (2) получаем, что

$$\vec{x}_{ij}-\vec{x}_{q_0j}+\vec{x}_{iq_0}=\vec{0}.$$

Опять циклируем индексы $i\to j\to q_0\to i$ и складываем. Получим $\vec{x}_{ij}=\vec{0}$.

Итак, в обоих случаях мы получили $\vec{x}_{ij}=\vec{0}$, следовательно, точка K_{ij} — середина ребра A_iA_j. Тогда $\vec{x}_{q_0\ldots q_{k-2}}=\vec{x}$, то есть один и тот же вектор $\vec{x}$ параллелен всем $(k-2)$-граням k-симплекса. Это возможно только в случае, когда этот вектор нулевой. Следовательно, $\vec{x}_{q_0\ldots q_{k-2}}=\vec{0}$. Тогда по лемме 1 точка $K_{q_0\ldots q_{k-2}}$ является точкой пересечения медиан $(k-2)$-грани $A_{q_0}\ldots A_{q_{k-2}}$. Следовательно, отрезки $K_{ij}K_{q_0\ldots q_{k-2}}$ — это бимедианы k-симплекса.

В [1] вводится понятие ℓ-медианы k-симплекса. Отрезок, соединяющий точки пересечения медиан $(\ell-1)$-грани и противоположной ей $(k-\ell)$-грани, называется ℓ*-медианой.* Это же понятие, но в другой терминологии вводится в [3]. Там же доказывается, что ℓ-медианы k-симплекса пересекаются в одной точке и делятся в отношении $(k-\ell+1):\ell$, считая от $(\ell-1)$-грани. При этом для всех значений ℓ точки пересечения ℓ-медиан совпадают между собой и совпадают с точкой пересечения медиан k-симплекса.

4. Медианы k-призмы и их обобщения. Из курса элементарной геометрии хорошо известна следующая теорема: пусть дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Три отрезка

AA_2, BB_2, CC_2, где A_2 — середина B_1C_1, B_2 — середина A_1C_1, где C_2 — середина A_1B_1, пересекаются в одной точке и делятся в отношении $2:1$, считая от вершины.

Мы обобщим эту теорему и докажем ее для случая k-призмы, а также докажем обратную к ней теорему.

Пусть дана k-призма $A_0 \dots A_k B_0 \dots B_k$. *Медианой* k*-призмы* будем называть отрезок $B_i M_{j_0 \dots j_{k-1}}$, где $M_{j_0 \dots j_{k-1}}$ — точка пересечения медиан $(k-1)$-грани $A_{j_0} \dots A_{j_{k-1}}$ k-симплекса $A_0 \dots A_k$. Индексы $i, j_0, \dots, j_{k-1}$ принимают значения $0, \dots, k$ и все попарно различны.

Теорема 4. *Медианы k-призмы пересекаются в одной точке M и делятся ею в отношении $k:1$, считая от вершины.*

Доказательство. Пусть дана k-призма $A_0 \dots A_k B_0 \dots B_k$. Рассмотрим аффинную систему координат $\left(A_0, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}\right)$. Пусть $B_i M_{j_0 \dots j_{k-1}}$ — ее медианы. На каждой медиане возьмем точку M, которая делит ее в отношении $k:1$, считая от B_i, и найдем ее координаты. Имеем

$$\overrightarrow{A_0M} = \overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{B_0B_i} + \overrightarrow{B_iM} = \vec{b} + \vec{a}_i + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{B_iM_{j_0 \dots j_{k-1}}} =$$

$$= \vec{b} + \vec{a}_i + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{B_iA_i} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{A_iM_{j_0 \dots j_{k-1}}} =$$

$$= \frac{1}{k+1}\vec{b} + \frac{1}{k+1}\left(\vec{a}_{j_0} + \dots + \vec{a}_{j_{k-1}} + \vec{a}_i\right).$$

Тогда координаты всех точек M имеют вид $\left(\frac{1}{k+1}, \dots, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}\right)$ и не зависят от индексов $i, j_0, \dots, j_{k-1}$. Следовательно, все точки M совпадают между собой и все медианы пересекаются в одной точке.

Обозначим через $M_{j_0 \cdots j_k}$ точку пересечения медиан основания $A_0 \ldots A_k$, а через $N_{j_0 \cdots j_k}$ — точку пересечения медиан основания $B_0 \ldots B_k$. Тогда, проводя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 4, получим, что

$$M_{j_0 \cdots j_k}\left(\frac{1}{k+1},\ldots,\frac{1}{k+1},0\right); \quad N_{j_0 \cdots j_k}\left(\frac{1}{k+1},\ldots,\frac{1}{k+1},1\right). \qquad (3)$$

Сравнивая координаты векторов $\overrightarrow{M_{j_0 \ldots j_k} M}$ и $\overrightarrow{M_{j_0 \cdots j_k} N_{j_0 \cdots j_k}}$, получаем, что все три точки $N_{j_0 \cdots j_k}, M_{j_0 \cdots j_k}$, M лежат на одной прямой.

Докажем обратную теорему.

Теорема 5. *Пусть дана* k*-призма* $A_0 \ldots A_k B_0 \ldots B_k$. *Если отрезки, соединяющие вершины основания* $B_0 \ldots B_k$ k*-призмы с точками* $K_{j_0 \cdots j_{k-1}}$ *плоскостей противоположных* $(k-1)$*-граней основания* $A_0 \ldots A_k$, *пересекаются в одной точке* K *и делятся ей в отношении* $k:1$, *считая от вершины, то они являются медианами* k*-призмы.*

Доказательство. Пусть M — точка пересечения медиан k-призмы. Тогда по теореме 4

$$\overrightarrow{B_i M} + k\overrightarrow{MM_{j_0 \cdots j_{k-1}}} = \vec{0}.$$

По условию теоремы и правилу треугольника из этого равенства получим

$$(k+1)\overrightarrow{MK} + k\overrightarrow{K_{j_0 \cdots j_{k-1}} M_{j_0 \cdots j_{k-1}}} = \vec{0}.$$

Значит, вектор $\overrightarrow{MK}$ параллелен всем $(k-1)$-граням симплекса $A_0 \ldots A_k$, то есть $\overrightarrow{MK} = \vec{0}$. Тогда $\overrightarrow{K_{j_0 \cdots j_{k-1}} M_{j_0 \cdots j_{k-1}}} = \vec{0}$ и точки $K_{j_0 \cdots j_{k-1}}$, $M_{j_0 \cdots j_{k-1}}$ совпадают, то есть отрезки $B_i K_{j_0 \cdots j_{k-1}}$ совпадают с медианами k-призмы.

Назовем 2*-медианой* k-призмы отрезок $N_{ij}M_{j_0\cdots j_{k-2}}$, где N_{ij} — середина ребра B_iB_j, а $M_{j_0\cdots j_{k-2}}$ — точка пересечения медиан противоположной $(k-2)$-грани $A_{j_0}\ldots A_{j_{k-2}}$. Индексы $i, j, j_0,\ldots, j_{k-2}$ принимают все значения от 0 до k и все попарно различны.

Теорема 6. *2-медианы k-призмы пересекаются в одной точке M_2 и делятся ею в отношении $(k-1):2$, считая от ребра.*

Доказательство. Принцип доказательства такой же, как в теореме 4. Выбираем аффинную систему координат $\left(A_0, \vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_k, \vec{b}\right)$, на каждой 2-медиане $N_{ij}M_{j_0\cdots j_{k-2}}$ берем точку M_2, которая делит ее в отношении $(k-1):2$, считая от N_{ij}, и находим координаты этих точек в выбранной системе координат:

$$\overrightarrow{A_0M_2} = \overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{B_0N_{ij}} + \frac{k-1}{k+1}\left(\overrightarrow{N_{ij}B_0} + \overrightarrow{B_0A_0} + \overrightarrow{A_0M_{j_0\cdots j_{k-2}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{k+1}\left(\vec{a}_i + \vec{a}_j + \vec{a}_{j_0} + \ldots + \vec{a}_{j_{k-2}}\right) + \frac{2}{k+1}\vec{b}.$$

Мы получаем, что координаты всех точек M_2 совпадают, следовательно, все 2-медианы пересекаются в одной точке.

Докажем обратную теорему.

Теорема 7. *Пусть дана k-призма $A_0\ldots A_kB_0\ldots B_k$. Если отрезки, соединяющие точки P_{ij} прямых, содержащих ребра основания $B_0\ldots B_k$, с точками $K_{j_0\cdots j_{k-2}}$ плоскостей противоположных $(k-2)$-граней основания $A_0\ldots A_k$, пересекаются в одной точке K и делятся ею в отношении $(k-1):2$, считая от ребра, то они являются 2-медианами k-призмы.*

Доказательство. Обозначим

$$\vec{y}_{ij} = \overrightarrow{B_i P_{ij}} + \overrightarrow{B_j P_{ij}}\,; \vec{x}_{j_0 \dots j_{k-2}} = \overrightarrow{A_{j_0} K_{j_0 \dots j_{k-2}}} + \dots + \overrightarrow{A_{j_{k-2}} K_{j_0 \dots j_{k-2}}}.$$

Проводя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 3, получаем

$$\vec{y}_{ij} + \vec{x}_{j_0 \dots j_{k-2}} = \vec{x} - 2\vec{b}\,, \quad \vec{x} = \sum_{t=0}^{k} \overrightarrow{A_t K}.$$

Меняем индексы i и j_0 местами и вычитаем из одного равенства другое

$$\vec{y}_{ij} - \vec{y}_{j_0 j} = \vec{x}_{ij_1 \dots j_{k-2}} - \vec{x}_{j_0 \dots j_{k-2}}.$$

В левой части равенства вектор параллелен грани $B_i B_j B_{j_0}$, а значит, и грани $A_i A_j A_{j_0}$, а в правой части — грани $A_i A_{j_0} A_{j_1} \dots A_{j_{k-2}}$. Тогда этот вектор параллелен ребру $A_i A_{j_0}$, то есть

$$\vec{y}_{ij} - \vec{y}_{j_0 j} = \lambda \vec{y}_{ij_0}\,, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Проводя дословно рассуждения из последней части доказательства теоремы 3, получаем $\vec{y}_{ij} = \vec{0}$, то есть P_{ij} — середина ребра $B_i B_j$. Тогда $\vec{x}_{j_0 \dots j_{k-2}} = \vec{x} - 2\vec{b}$, то есть один и тот же вектор $\vec{x} - 2\vec{b}$ параллелен всем $(k-2)$-граням k-симплекса $A_0 \dots A_k$. Это возможно только в том случае, если $\vec{x}_{j_0 \dots j_{k-2}} = \vec{x} - 2\vec{b} = \vec{0}$, следовательно, по лемме 1 точка $K_{j_0 \dots j_{k-2}}$ является точкой пересечения медиан $(k-2)$-грани $A_{j_0} \dots A_{j_{k-2}}$. Тогда отрезки $P_{ij} K_{j_0 \dots j_{k-2}}$ являются 2-медианами k-призмы.

Введем понятие ℓ-медианы k-призмы, $3 \le \ell \le k-2$. Назовем *ℓ-медианой* k-призмы отрезок $N_{i_0 \dots i_{\ell-1}} M_{j_0 \dots j_{k-\ell}}$, где точка $N_{i_0 \dots i_{\ell-1}}$ — точка пересечения медиан $(\ell - 1)$-грани основания

$B_0 \dots B_k$, а точка $M_{j_0 \dots j_{k-\ell}}$ — точка пересечения медиан противоположной $(k-\ell)$-грани основания $A_0 \dots A_k$ (индексы $i_0, \dots, i_{\ell-1}, j_0, \dots, j_{k-\ell}$ принимают все значения от 0 до k и все попарно различны). Если договориться считать середину отрезка точкой пересечения медиан 1-симплекса, а точку — точкой пересечения медиан 2-симплекса, то в данное определение ℓ-медианы можно включить определения медианы (1-медианы) и 2-медианы k-призмы.

Рассмотрим ℓ-медианы $N_{i_0 \dots i_{\ell-1}} M_{j_0 \dots j_{k-\ell}}$ k-призмы для некоторого фиксированного ℓ. На каждой ℓ-медиане возьмем точку M_ℓ, такую что

$$\overrightarrow{N_{i_0 \dots i_{\ell-1}} M_\ell} = x \overrightarrow{N_{i_0 \dots i_{\ell-1}} M_{j_0 \dots j_{k-\ell}}}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Будем искать значение x, требуя, чтобы координаты в системе координат $\left(A_0, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}\right)$ точек M_ℓ были бы одинаковыми для всех ℓ-медиан. Выразим эти координаты через x.

$$\overrightarrow{A_0 M_\ell} = \overrightarrow{A_0 B_0} + \overrightarrow{B_0 N_{i0 \dots i\,\ell-1}} + x\left(\overrightarrow{N_{i0 \dots i\,\ell-1} B_0} + \overrightarrow{B_0 A_0} + A_0 M_{j0 \dots jk-\ell}\right) =$$

$$= (1-x)\vec{b} + \frac{1}{\ell}(1-x)\left(\vec{a}_{i0} + \dots + \vec{a}_{i\ell-1}\right) + \frac{x}{k-\ell+1}\left(\vec{a}_{j0} + \dots + \vec{a}_{jk-\ell}\right).$$

Требуем, чтобы $\frac{1}{\ell}(1-x) = \frac{x}{k-\ell+1}$, то есть $x = \frac{k-\ell+1}{k+1}$. В этом случае все точки M_ℓ имеют координаты

$$M_\ell\left(\frac{1}{k+1}, \dots, \frac{1}{k+1}, \frac{\ell}{k+1}\right),$$

то есть совпадают между собой, и все ℓ-медианы пересекаются в точке M_ℓ. При этом они делятся в отношении $(k-\ell+1):\ell$, считая от $(\ell-1)$-грани.

Итак, мы доказали

Теорема 8. *ℓ-медианы k-призмы пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $(k-\ell+1):\ell$, считая от $(\ell-1)$-грани.*

Сравнивая координаты точек пересечения медиан оснований k-призмы (3) и координаты точек M_ℓ, получаем

Следствие 1. *Точки пересечения ℓ-медиан k-призмы, $1 \le \ell \le k$ лежат на отрезке с концами в точках пересечения медиан оснований и делят его на $(k+1)$ равные части.*

Список литературы

1. *Денисова Н.С.* Геометрия треугольника, тетраэдра, симплекса : учеб. пособие. М., 2016.

2. *Кириченко В.Ф., Гусева Н.И., Денисова Н.С. и др.* Геометрия : учеб. пособие для студ. учреждений высш. пед. проф. образования. М., 2012. Т. 1.

3. *Понарин Я.П.* Элементарная геометрия. Т. 3 : Треугольники и тетраэдры. М., 2009.

L. Ignatochkina[1], *N. Popova*[1]
[1] *Moscow State Pedagogical University*
1/1 M. Pirogovskaya St., Moscow, 119991, Russia
nasik63@mail.ru

About properties of ℓ-medians for *k*-simplex and *k*-prism

Submitted on February 06, 2018

We consider k-simplex and k-prism of *n*-dimensional affine space. We prove some theorems about medians of k-simplex. ℓ-median of *k*-prism is defined. We prove the theorems about properties for ℓ-median of *k*-prism.

Keywords: affine space, simplex, ℓ-median.

References

1. *Denisova, N. S.:* Geometry of triangle, tetrahedron, simplex. M.: MPSU (2016).

2. *Kirichenko, V. F., Guseva, N. I., Denisova, N. S.:* Geometry. Vol. 1. M.: Academia (2012).

3. *Ponarin, Ja. P.:* Elementary geometry. Vol. 3: Triangle and tetrahedrons. M.: MCCME (2009).