Из (I2) следует, что векторы $\vec{\ell}(\vec{\xi})$ и $\vec{\xi}$ неортогональны.

Пусть вдоль интегральных линий поля $\vec{\xi}$ отображение ℓ является изометрическим. Имеем $\vec{\xi}^{\,2}=\vec{\xi}^{\,2}$. Тогда из (I2) следует

$$(\vec{\ell}(\vec{\xi})-\vec{\xi})\cdot\vec{\xi}=0,$$

то есть векторы $\vec{\xi}$ и $(\vec{\ell}(\vec{\xi})-\vec{\xi})$ ортогональны.

Обратно, если векторы $\vec{\xi}$ и $(\vec{\ell}(\vec{\xi})-\vec{\xi})$ ортогональны, то имеем

$$\vec{\ell}(\vec{\xi})\cdot\vec{\xi}=\vec{\xi}^{\,2}.$$

Отсюда $\vec{\xi}^{\,2}=\vec{\xi}^{\,2}$, т.е. отображение $\ell: V_p\to\bar{V}_p$ является изометрическим вдоль интегральных линий поля $\vec{\xi}$. Справедлива

Т е о р е м а 3. Отображение $\ell: V_p\to\bar{V}_p$ является изометрическим вдоль интегральных линий градиентного векторного поля $\vec{\xi}$, ортогонального секущей поверхности, тогда и только тогда, когда векторы $\vec{\xi}$ и $(\vec{\ell}(\vec{\xi})-\vec{\xi})$ ортогональны.

Библиографический список

I. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ.М. 1979. Т.9.С.5-246.

2. Л а п т е в Г.Ф. Распределения касательных элементов // Тр.Геометр.семинара/ ВИНИТИ. М. 1971.Т.3.С.29-48.

3. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр.Моск.матем.о-ва / ГИТЛ.М. 1953.Т.2. С.275-383.

4. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности.М.: Наука. 1976.

5. Т о л с т о п я т о в В.П. К геометрии векторного поля // Дифференциальная геометрия многообразий фигур : Межвуз. темат.сб.науч.тр. / Калинингр.ун-т. Калининград.1985.Вып.16. С.84-86.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.19 1988

УДК 514.75

ВЫРОЖДЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ, ПОРОЖДЕННЫЕ ПАРОЙ ЭЛЛИПСОВ, СО СПЕЦИАЛЬНЫМ СВОЙСТВОМ ФОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Т.П. Ф у н т и к о в а
(Калининградский технический институт)

В трехмерном аффинном пространстве исследуются вырожденные [1] конгруэнции $(C_1C_2)_{1,2}$, порожденные парой эллипсов C_1 и C_2, имеющих общую касательную l, но не инцидентных одной плоскости. Многообразие (C_1) - одномерное, а многообразие (C_2) - двумерное, таким образом, каждому эллипсу C_1 соответствует однопараметрическое семейство эллипсов $(C_2)_{C_1}$.

Отнесем конгруэнцию $(C_1C_2)_{1,2}$ к реперу $R=\{A,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, вершина A которого помещена в точку касания эллипсов C_1, C_2, концы векторов $\bar{e}_3$, $\bar{e}_1$ совмещены соответственно с центрами O_1 и O_2 эллипсов C_1 и C_2, вектор $\bar{e}_2$ направлен по касательной l и нормирован.

В работе [2] конгруэнциям $(C_1C_2)_{1,2}$ дана геометрическая характеристика, там же рассмотрен класс конгруэнций $(C_1C_2)_{1,2}$, многообразие (C_1) которых образует каналовую поверхность.

Рассмотрим конгруэнции $(C_1C_2)_{1,2}$, для которых: 1/ касательные к линии (O_1) проходят через соответствующие точки O_2; 2/ асимптотические направления на поверхности (A) являются аффинно-биссекторными относительно направлений касательных к координатным линиям Γ_{C_1} $(\omega^1=0)$ и Γ $(\omega^2=0)$. Такие конгруэнции назовем конгруэнциями K_1.

Уравнения эллипсов C_1 и C_2 относительно выбранного репера и система уравнений Пфаффа, определяющая конгруэнции $(C_1C_2)_{1,2}$, имеют вид:

$$C_1:\ (x^3)^2-2x^3+(x^2)^2=0,\quad x^1=0;$$

$$C_2:\ (x^1)^2-2x^1+a^2(x^2)^2=0,\quad x^3=0;$$

$$\begin{cases} \omega_\alpha^1 = 0, \ \ \omega_{i+1}^2 = -\omega^i, \ \ \omega^3 = 0, \ \ \omega_2^2 = \omega_1^3 = \omega_3^3 = -\omega^1, \\ \omega_2^3 = \omega^2, \ \ \omega_1^2 = -\omega^2, \ \ da = A_i \omega^i \ \ (i = 1,2; \ \alpha = 1,2,3). \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

Конгруэнции K_1 существуют с произволом одной функции двух переменных аргументов.

Т е о р е м а. Для конгруэнций K_1 справедливы следующие свойства: I/ центры эллипсов C_1 и C_2 принадлежат инвариантной прямой O_1O_2. Плоскости эллипсов C_1 взаимно параллельны ; 2/аффинные нормали к поверхности (A) в точке A проходят через соответствующие центры эллипсов C_1, и конгруэнция аффинных нормалей является цилиндрической; 3/ торсы прямолинейных конгруэнций $(A\bar{e}_\alpha)$ соответствуют и высекают на поверхности (A) сеть линий Γ_{c_1}, Γ ; 4/линии Γ_{c_1} на поверхности (A) являются линиями Дарбу, а линии Γ -плоскими линиями тени, союзными линиями конгруэнции аффинных нормалей поверхности (A) ; 5/ поверхность (A) является аффинной поверхностью вращения; 6/ точки $(0,0,0)$ и $A_2(2,0,0)$- фокальные точки эллипса C_2, им соответствует фокальное направление $\omega^1 = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/Для текущей точки $\bar{M} = \bar{A} + \bar{e}_1 + \lambda(\bar{e}_1 - \bar{e}_3)$ прямой O_1O_2: $d\bar{M} = (d\lambda + \omega^1 - \lambda\omega^1)(\bar{e}_1 - \bar{e}_3)$, что доказывает инвариантность прямой O_1O_2. Параллельность плоскостей эллипсов C_1, определяемых векторами $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, следует из равенств

$$(d\bar{e}_2, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = 0, \quad (d\bar{e}_3, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = 0.$$

2/Касательные к асимптотическим направлениям $\omega^1 - \omega^2 = 0$ и $\omega^1 + \omega^2 = 0$ на поверхности (A) определяются в точке A соответственно векторами $\bar{E}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ и $\bar{E}_2 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2$. При условиях $(\bar{\eta}, \bar{E}_1, d\bar{E}_1)_{\omega^1 = -\omega^2} = 0$, $(\bar{\eta}, \bar{E}_2, d\bar{E}_2)_{\omega^1 = \omega^2} = 0$ получаем аффинную нормаль $\bar{\eta} = e_3$, причем $(d\bar{e}_3)_{\omega^2 = 0} = -\bar{e}_3\omega^1$, т.е. конгруэнция аффинных нормалей - цилиндрическая.

3/ Свойство справедливо, т.к. торсы прямолинейных конгруэнций $(A, \bar{e}_\alpha)$ определяются одним и тем же уравнением $\omega^1 \cdot \omega^2 = 0$.

4/ Уравнение поверхности (A) относительно репера R имеет вид: $6x^3 = -3(x^1)^2 + 3(x^2)^2 + (x^1)^3 + 3x^1(x^2)^2 + [4]$. Тогда уравнения, определяющие аффинное нормальное сечение поверхности по направлению вектора $\vec{e}_2$, в точке A записываются в виде

$$x^1 = 0, \quad 2x^3 = (x^2)^2 + [4]. \qquad (2)$$

Из (2) следует, что аффинная нормаль аффинного нормального сечения в точке A совпадает с аффинной нормалью поверхности, т.е. линии Γ_{c_1} являются линиями Дарбу.

Соприкасающаяся плоскость линии Γ на поверхности (A) определяется точкой A и векторами $\bar{e}_1$, $\bar{e}_3$ и, следовательно, проходит через аффинную нормаль к поверхности (A) в точке A, т.е. линии Γ -союзные линии конгруэнции аффинных нормалей поверхности (A). Торсы $\omega^2 = 0$ прямолинейной конгруэнции $(A\bar{e}_2)$ являются цилиндрическими поверхностями, следовательно, линии Γ -линии тени, а значит и плоские линии.

5/Аффинные нормали поверхности (A) пересекают неподвижную прямую O_1O_2. Кроме того, согласно предыдущим предложениям теоремы на поверхности (A) существует однопараметрическое семейство плоских линий тени (линии Γ), плоскости которых проходят через неподвижную прямую O_1O_2, т.е. поверхность (A) является аффинной поверхностью вращения [3].

6/ Координаты фокальных точек эллипса C_2 определяются из системы

$$\begin{cases} c_2 = 0, \\ dc_2 = 0. \end{cases}$$

Исследуя эту систему, получаем, что фокальными точками эллипса C_2 являются точки $A\ (0,0,0)$, $A_2\ (2,0,0)$ и точки, определяемые системой уравнений

$$\begin{cases} -x^1 + a^2(x^2)^2 + aA_1(x^2)^2 + aA_2x^1x^2 + a^2(x^1)^2 - a^2x^1 + 1 = 0, \\ (x^1)^2 - 2x^1 + a^2(x^2)^2 = 0, \quad x^3 = 0. \end{cases}$$

Теорема доказана.

Рассмотрим квадрику Q, ассоциированную с образующими элементами конгруэнции $(C_1C_2)_{1,2}$. Пусть точка O_2 является центром квадрики Q, и эллипсы C_1, C_2 принадлежат этой квадрике. Тогда уравнение квадрики Q в репере R имеет вид

$$(x^1)^2 - 2x^1 + a^2[(x^2)^2 + (x^3)^2 - 2x^3 + 2x^1x^3] = 0.$$

Находим

$$dQ = (\omega^1 + a\,da)Q + \omega^1 Q_1 + \omega^2 Q_2,$$

где
$$Q_1 = 2(a^2 - 1)x^1(x^1 - 1) + 2 + 2aA_1[2x^1 - (x^1)^2],$$
$$Q_2 = 2x^1 - (x^1)^2.$$

Исследуя системы

$$\begin{cases} Q_1 = 2(a^2-1)x^1(x^1-1)+2+2aA_1(2x^1-(x^1)^2)=0, \\ Q_2 = 2x^1-(x^1)^2=0; \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} Q = (x^1)^2-2x^1+a^2[(x^2)^2+(x^3)^2-2x^3+2x^1x^3]=0, \\ Q_1 = 2(a^2-1)x^1(x^1-1)+2+2aA_1(2x^1-(x^1)^2)=0, \\ Q_2 = 2x^1-(x^1)^2=0, \end{cases}$$

приходим к следующему результату: характеристическое и фокальное многообразия конгруэнции квадрик Q [4] определены лишь при $a^2=\frac{1}{2}$. Характеристическим многообразием является плоскость $x^1=2$, а фокальным – коника: $(x^2)^2+(x^3)^2+2x^3=0$, $x^1=2$ в этой плоскости.

При $a^2=\frac{1}{2}$ фокальные точки эллипса C_2 определяются из системы

$$\begin{cases} x^2[(x^2)^2-3x^1+2+(x^1)^2]=0, \\ 2(x^1)^2-4x^1+(x^2)^2=0, \end{cases}$$

и тогда точка $A_2(2,0,0)$ является строенной фокальной точкой эллипса C_2.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С. О выpожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр. / Калинингр. ун-т.Калининград,1973.Вып.3.С.41-49.

2. Ф у н т и к о в а Т.П. Об одном классе вырожденных конгруэнций,порожденных парой эллипсов // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград.1979.Вып.16.С.87-90.

3. Ш и р о к о в П.А.,Ш и р о к о в А.П. Аффинная дифференциальная геометрия.М.1959.

4. М а л а х о в с к и й В.С.,Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве // Тр.геометр.семинара / ВИНИТИ.М. 1974.Т.6. С.113-136.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.19 1988

УДК 514.75

О НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ ГЛАДКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ОБЛАСТЕЙ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

А.Б.Ф у р м а н о в
(МГПИ им.В.И.Ленина)

Рассмотрены эквиобъемные и псевдоконформные отображения областей евклидовых пространств и изучены некоторые свойства таких отображений.

1.Мы находимся в условиях,описанных В.Т.Базылевым в работе [1]. Пусть f _гладкое обратимое отображение области $\Omega\subset E_n$ в область $\overline{\Omega}\subset\overline{E}_n$, где $E_n\oplus\overline{E}_n=E_{2n}$. Если $x_1\in\Omega$, $f(x_1)=x_2$ и $\vec{Ox}=\vec{Ox}_1+\vec{Ox}_2$, то точка $x\in V_n$, где V_n -график отображения f.

Из построения графика отображения возникают два (присоединенных) отображения $g:\Omega\to V_n$ и $h:\overline{\Omega}\to V_n$, таких, что $g(x_1)=x$ и $h(x_2)=x$. Эквиобъемность отображения f означает, что

$$c\cdot\sqrt{\det G}=\sqrt{\det\overline{G}}, \quad c=\mathrm{const},$$

где $G=\|\gamma_{ij}\|$, $\overline{G}=\|\overline{\gamma}_{ij}\|$, а γ_{ij}, $\overline{\gamma}_{ij}$ -метрические тензоры областей Ω и $\overline{\Omega}$.

Так как базис $\vec{e}_i$ состоит из ортонормированных векторов, расположенных на касательных к линиям ω^i основания отображения в точке x, то имеем: $\det G=\prod\gamma_{ii}=1$, $\det\overline{G}=\prod\overline{\gamma}_{ii}$. Следовательно, условие эквиобъемности отображения f принимает вид:

$$c=\prod\sqrt{\overline{\gamma}_{ii}}. \tag{I}$$

Л е м м а. Отображение f эквиобъемно $\Leftrightarrow\sum\overline{\omega}^i_i=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть f эквиобъемно, тогда из $\overline{\gamma}_{ii}=\vec{e}_{n+i}\cdot\vec{e}_{n+i}$ имеем $d\ln\overline{\gamma}_{ii}=2\overline{\omega}^i_i$. Учитывая равенство (I), получим $\sum\overline{\omega}^i_i=0$. Пусть $\sum\overline{\omega}^i_i=0$. Находим $0=\sum 2\overline{\omega}^i_i=d\sum\ln\overline{\gamma}_{ii}=d\ln\prod\overline{\gamma}_{ii}$. Следовательно, $\ln\prod\overline{\gamma}_{ii}=c_1$. Поэтому $\prod\overline{\gamma}_{ii}=e^{c_1}=c=c\sqrt{\prod\gamma_{ii}}$ и эквиобъемность отображения f доказана.

С л е д с т в и е. Отображение $g:\Omega\to V_n$ эквиобъемно $\Leftrightarrow\sum\theta^i_i=0$.