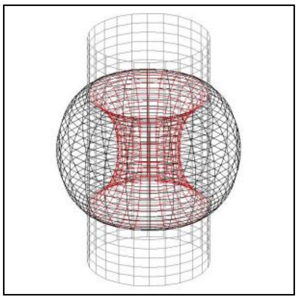

Список литературы

1. *Шуликовский В. И.* Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. М., 1963.

2. *Чешкова М. А.* О конгруэнции прямых // Изв. АГУ. 2008. С. 38—39.

E. Petrova

ABOUT ONE SPECIAL CASE OF RIBAUCOUR TRANSFORMATION

A sphere congruence is studied. A case when surface of centers is cylinder, is considered. A function of radius is constructed in such a way that a sphere congruence would be a Ribaucour congruence.

УДК 514.76

К. В. Полякова

(Российский государственный университет им. И. Канта, г. Калининград)

ОБОБЩЕНИЕ ДЕРИВАЦИОННЫХ ФОРМУЛ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Рассмотрено обобщение деривационных формул проективного пространства. Получены деривационные

формулы проективного расслоения с отождествленными базисными точками, которое названо особым проективным расслоением со связностью в присоединенном расслоении проективных реперов.

1. Структурные уравнения. Тензор кривизны-кручения. Рассмотрим n-мерное гладкое многообразие B_n со структурными уравнениями Г. Ф. Лаптева

$$D\theta^I = \theta^J \wedge \theta^I_J \quad (I, J, \ldots = 1,\ldots,n), \tag{1}$$

обеспечивающими полную интегрируемость системы уравнений $\theta^I = 0$, которая фиксирует некоторую его точку. Прикрепим гладким образом к каждой точке $x \in B_n$ проективное пространство $P_n(x)$, причем точку x не будем отождествлять ни с какой точкой соответствующего пространства $P_n(x)$. Будем обобщать деривационные формулы проективного пространства P_n

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \quad dA_I = \theta A_I + \omega_I A + \omega^J_I A_J.$$

Предположим, что обобщения структурных уравнений пространства P_n имеют вид

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega^I_J + R^I_{0JK}\theta^J \wedge \theta^K, \tag{2}$$

$$D\omega^I_J = \omega^K_J \wedge \omega^I_K + (\delta^I_J\omega_K + \delta^I_K\omega_J) \wedge \omega^K + R^I_{JKL}\theta^K \wedge \theta^L, \tag{3}$$

$$D\omega_I = \omega^J_I \wedge \omega_J + R_{IJK}\theta^J \wedge \theta^K, \tag{4}$$

где

$$R^I_{0JK} = -R^I_{0KJ}, \quad R^I_{JKL} = -R^I_{JLK}, \quad R_{IJK} = -R_{IKJ}. \tag{5}$$

Уравнения (2) — (4) являются структурными уравнениями пространства проективной связности Лаптева — Остиану [1], подробнее говоря, расслоения проективных реперов со связностью, присоединенного к проективному расслоению [2] с совпадающими размерностями базы и слоев.

Дифференцируя уравнения (2) — (4) внешним образом, получаем

$$(\Delta R^I_{0\underline{JK}} - R^I_{LJK}\omega^L)\wedge\theta^J\wedge\theta^K = 0,$$

$$(\Delta R^I_{J\underline{KL}} - (\delta^I_J R^S_{0KL} + \delta^S_J R^I_{0KL})\omega_S + $$

$$+ (\delta^I_J R_{SKL} + \delta^I_S R_{JKL})\omega^S)\wedge\theta^K\wedge\theta^L = 0, \qquad (6)$$

$$(\Delta R_{I\underline{JK}} + R^L_{IJK}\omega_L)\wedge\theta^J\wedge\theta^K = 0,$$

причем оператор действует несимметрично

$$\Delta R^I_{0\underline{JK}} = dR^I_{0JK} + R^L_{0JK}\omega^I_L - R^I_{0LK}\theta^L_J - R^I_{0JL}\theta^L_K,$$

$$\Delta R^I_{J\underline{KL}} = dR^I_{JKL} + R^S_{JKL}\omega^I_S - R^I_{SKL}\omega^S_J - R^I_{JSL}\theta^S_K - R^I_{JKS}\theta^S_L,$$

$$\Delta R_{I\underline{JK}} = dR_{IJK} - R_{LJK}\omega^L_I - R_{ILK}\theta^L_J - R_{IJL}\theta^L_K.$$

Для подчеркнутых индексов в операторе используются формы θ, для неподчеркнутых ω. Разрешаем (6) по лемме Лаптева

$$(\Delta R^I_{0\underline{JK}} - R^I_{LJK}\omega^L)\wedge\theta^K = \theta^I_{JK}\wedge\theta^K,$$

$$(\Delta R^I_{J\underline{KL}} - (\delta^I_J R^S_{0KL} + \delta^S_J R^I_{0KL})\omega_S + $$

$$+ (\delta^I_J R_{SKL} + \delta^I_S R_{JKL})\omega^S)\wedge\theta^L = \theta^I_{JKL}\wedge\theta^L, \qquad (7)$$

$$(\Delta R_{I\underline{JK}} + R^L_{IJK}\omega_L)\wedge\theta^K = \theta_{IJK}\wedge\theta^K,$$

причем

$$\theta^I_{[JK]} \equiv 0,\ \theta^I_{J[KL]} \equiv 0,\ \theta_{I[JK]} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\,\theta^K). \qquad (8)$$

Преобразуем квадратичные уравнения (7) и разрешим их по лемме Картана

$$\Delta R^I_{0\underline{JK}} - R^I_{LJK}\omega^L - \theta^I_{JK} = R^I_{0JKL}\theta^L,$$

$$\Delta R^I_{J\underline{KL}} - (\delta^I_J R^S_{0KL} + \delta^S_J R^I_{0KL})\omega_S + $$

$$+ (\delta^I_J R_{SKL} + \delta^I_S R_{JKL})\omega^S - \theta^I_{JKL} = R^I_{JKLS}\theta^S, \qquad (9)$$

$$\Delta R_{I\underline{JK}} + R^L_{IJK}\omega_L - \theta_{IJK} = R_{IJKL}\theta^L,$$

причем

$$R^I_{0J[KL]} = 0,\ R^I_{JK[LS]} = 0,\ R_{IJ[KL]} = 0.$$

Учитывая (5), (9), можно полагать, что формы θ^I_{JK}, $\theta^I_{JKL}, \theta_{IJK}$ антисимметричны по двум последним нижним индексам. Таким образом, сравнения (8) запишем в виде

$$\theta^I_{JK} \equiv 0,\ \theta^I_{JKL} \equiv 0, \theta_{IJK} \equiv 0\ (\mathrm{mod}\,\theta^K).$$

Следовательно,

$$\theta^I_{JK} = U^I_{JKL}\theta^L,\ \theta^I_{JKL} = U^I_{JKLS}\theta^S,\ \theta_{IJK} = U_{IJKL}\theta^L. \qquad (10)$$

Замечание 1. Подстановка выражений (10) в дифференциальные уравнения (9) приводит к уравнениям вида [3]

$$\Delta R^I_{0\underline{JK}} - R^I_{LJK}\omega^L = \overline{R}^I_{0JKL}\theta^L,$$

$$\Delta R^I_{J\underline{KL}} - (\delta^I_J R^S_{0KL} + \delta^S_J R^I_{0KL})\omega_S +$$

$$+ (\delta^I_J R_{SKL} + \delta^I_S R_{JKL})\omega^S = \overline{R}^I_{JKLS}\theta^S,$$

$$\Delta R_{I\underline{JK}} + R^L_{IJK}\omega_L = \overline{R}_{IJKL}\theta^L,$$

причем формулы справедливы при выполнении условий [3]

$$\overline{R}^I_{0\{JKL\}} = 0,\ \overline{R}^I_{J\{KLS\}} = 0,\ \overline{R}_{I\{JKL\}} = 0,$$

где по индексам в фигурных скобках производится циклирование.

2. Проективное многообразие. Пусть обобщение деривационных формул имеет вид (ср. [2])

$$dA = \theta A + \omega^I A_I + \theta^I B_I, \qquad (11)$$

$$dA_I = \theta A_I + \omega_I A + \omega^J_I A_J + \theta^J B_{IJ}, \qquad (12)$$

где точки B_I, B_{IJ} вместе с точками A, A_I являются базисными точками $n(n+2)$-мерного проективного пространства — касательного пространства к проективному расслоению со связностью $GP_{n,n}$, проходящему через плоскость $P_n(x)$.

Продолжим формулы (11), (12) с помощью структурных уравнений (1) — (4)

$$dB_I = \theta B_I + \theta_I^J B_J + R_{0IK}^J \theta^K A_J + \omega^J B_{JI} + \theta^J C_{IJ},$$
$$dB_{IJ} = \theta B_{IJ} + \omega_I^K B_{KJ} + \theta_J^K B_{IK} + \qquad (13)$$
$$+ \omega_I B_J + R_{IJK}\theta^K A + R_{IJL}^K \theta^L A_K + \theta^K B_{IJK},$$

причем

$$C_{IJ} = C_{JI},\ B_{IJK} = B_{IKJ},\ D\theta = \omega^I \wedge \omega_I. \qquad (14)$$

Замечание 2. Это проективное расслоение со связностью есть частный случай (размерности слоя и базы совпадают) проективного расслоения [2].

Отождествляя базисные точки B_I и A_I в формулах (11), (12), получим другое обобщение деривационных формул проективного пространства

$$dA = \theta A + \omega^I A_I + \theta^I A_I, \qquad (15)$$
$$dA_I = \theta A_I + \omega_I A + \omega_I^J A_J + \theta^J A_{IJ}. \qquad (16)$$

Таким образом, с одной стороны, мы имеем проективное расслоение с отождествленными базисными точками, которое в нашем случае назовем особым проективным расслоением со связностью в присоединенном расслоении проективных реперов и обозначим $GP_{n,n}^0$.

Новые точки A_{IJ} вместе с точками A, A_I в общем случае являются базисными точками n(n+1)-мерного проективного пространства

$$P^1(x)=[A, A_I, A_{IJ}],$$

содержащего пространство $P_n(x)$. Пространству $P^1(x)$ принадлежит 1-я дифференциальная окрестность слоя $P_n(x)$ расслоения $GP_{n,n}^0$ над базой B_n, поэтому его можно назвать касательным пространством 1-го порядка, проходящим через слой $P_n(x)$. Если A_{IJ} симметричны, то $\dim P^1(x) = \frac{1}{2}n(n+3)$.

С другой стороны, если зафиксировать точку базисного многообразия уравнениями $\theta^I = 0$, то (15), (16) становятся деривационными формулами проективного пространства, и мы получаем проективное многообразие со связностью (ср. [4, с. 17]). Следовательно, проективное многообразие является особым случаем проективного расслоения со связностью. Далее будем говорить о проективном многообразии $GP^0_{n,n}$, сохраняя обозначение для особого проективного расслоения и подразумевая эту структуру.

В этом случае точки A_{IJ} принадлежат проективному пространству, которое можно назвать соприкасающемся пространством к проективному многообразию в точке A.

Дифференцируя (15) внешним образом, получаем

$$(D\theta - \omega^I\wedge\omega_I - \theta^I\wedge\omega_I)A + \\ + \theta^J \wedge (R^I_{0JK}\theta^K + \theta^I_J - \omega^I_J)A_I - (\omega^I+\theta^I)\wedge\theta^J A_{IJ} = 0. \tag{17}$$

В силу равенства (14), имеем

$$((R^I_{0JK}\theta^K + \theta^I_J - \omega^I_J)A_I + (\omega^I + \theta^I)A_{IJ} - \omega_J A) = 0. \tag{18}$$

Разрешая (18) по лемме Картана, получим

$$(R^I_{0JK}\theta^K + \theta^I_J - \omega^I_J)\, A_I + (\omega^I + \theta^I)A_{IJ} - \omega_J A = C_{JK}\theta^K, \tag{19}$$

$$C_{JK} = C_{KJ},\ C_{JK} \in P^1(x).$$

Замечание 3. Если в (16) точки A_{IJ} симметричны, то в (17) $\theta^I\wedge\theta^J A_{IJ} = 0$ и соотношение (19) упрощается

$$(R^I_{0JK}\theta^K + \theta^I_J - \omega^I_J)\, A_I + \omega^I A_{IJ} - \omega_J A = C_{JK}\theta^K \ (C_{JK} = C_{KJ}).$$

Продолжаем (16)

$$dA_{IJ} = \theta A_{IJ} + \omega^K_I A_{KJ} + \theta^K_J A_{IK} + \omega_I A_J + \omega_J A_I + \\ + R_{IJK}\theta^K A + R^K_{IJL}\theta^L A_K + \theta^K A_{IJK}\ (A_{IJK} = A_{IKJ}). \tag{20}$$

Аналогично рассмотренному, с одной стороны, точки A_{IJK} вместе с точками A, A_I, A_{IJ} являются базисными точками соприкасающегося пространства — касательного проективного пространства 2-го порядка $P^2(x) = [P^1(x), A_{IJK}]$ к особому проективному расслоению $GP^0_{n,n}$, содержащего касательное пространство 1-го порядка $P^1(x)$. С другой стороны, точки A_{IJK} принадлежат касательному пространству 3-го порядка к проективному многообразию $GP^0_{n,n}$.

4. Сечения. Произведем сечение особого проективного расслоения $GP^0_{n,n}$

$$\omega^I = T^I_J \theta^J. \tag{21}$$

Подставляя (21) в (2), получим

$$\Delta T^I_{\underline{J}} = \overline{T}^I_{JK}\theta^K,$$

где

$$\overline{T}^I_{JK} = T^I_{JK} - R^I_{0JK} + T^I_L R^L_{0JK}, \; T^I_{JK} = T^I_{KJ}.$$

Если $T^I_J = \delta^I_J$, то

$$\theta^I = \omega^I. \tag{22}$$

Причем в силу несимметричного действия оператора Δ делаем вывод, что $\omega^I_J = \theta^I_J$, т.е. $R^I_{0JK} = 0$. Получаем пространство проективной связности Картана над секущей поверхностью. С учетом (19, 20) деривационные уравнения (15, 16) принимают вид

$$\begin{gathered} dA = \theta A + 2\omega^I A_I, \\ dA_I = \theta A_I + \omega_I A + \omega^J_I A_J + \omega^J A_{IJ} \end{gathered} \tag{23}$$

при фиксации точки базы, т.е. при $\omega^I = 0$, уравнения (23) упрощаются

$$dA = \overline{\theta} A, \; dA_I = \overline{\theta} A_I + \overline{\omega}_I A + \overline{\omega}^J_I A_J \; (\overline{\theta} = \theta|_{\theta^I = 0}). \tag{24}$$

Равенство (24_1) фиксирует точку A в каждом слое $P_n(x) = [A, A_I]$. Формулы (24) показывают, что каждое пространство $P_n(x)$ является центропроективным. Формулы (23) отличаются от деривационных формул центропроективного многообразия [4] коэффициентом 2, причем формы ω_I^J, ω_I являются формами связности (они задают центропроективную связность Картана). Таким образом, доказана

Теорема 1. *Сечение-отождествление (22) выделяет специальное центропроективное многообразие со связностью и нулевым подтензором кручения* R^I_{0JK} *из проективного многообразия* $GP^0_{n,n}$ *со связностью.*

Замечание 4. В [4] точки A_{IJ} при базисных формах симметричны и принадлежат соприкасающемуся пространству. В формуле (23_1) точки A_{IJ}, вообще говоря, несимметричны. Поэтому специальное центропроективное многообразие (23) более общее, чем центропроективное многообразие Ю. И. Шевченко [4].

Если $T^I_J = 0$, то $\omega^I = 0$. Тогда из (2—4) следует

$$R^I_{0JK} = 0,$$

$$D\omega^I_J = \omega^K_J \wedge \omega^I_K + R^I_{JKL}\theta^K \wedge \theta^L,\ D\omega_I = \omega^J_I \wedge \omega_J + R_{IJK}\theta^J \wedge \theta^K,$$

а из деривационных формул (12, 13)

$$dA = \theta A + \theta^I A_I,\ dA_I = \theta A_I + \omega_I A + \omega^J_I A_J + \theta^J A_{IJ}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Сечение-аннулирование* $\omega^I = 0$ *выделяет пространство центропроективной связности из проективного многообразия* $GP^0_{n,n}$ *со связностью.*

Список литературы

1. *Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т. 3. С. 49—94.

2. *Шевченко Ю. И.* Касательные и соприкасающиеся пространства проективного расслоения // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2007. Вып. 38. С. 143—150.

3. *Полякова К. В.* Поверхность в пространстве проективной связности // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2006. Вып. 37. С. 127—136.

4. *Шевченко Ю. И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

K. Polyakova

GENERALIZATION FOR DERIVATION FORMULAS
OF PROJECTIVE SPACE

Generalization for derivation formulas of projective space is considered. Derivation formulas for the projective bundle with identified base points is obtained. This bundle is called special projective bundle with a connection in the attached bundle of projective frames.

УДК 514.75

Ю. И. Попов

(Российский государственный университет им. И. Канта, г. Калининград)

ВВЕДЕНИЕ ДВОЙСТВЕННЫХ НОРМАЛЬНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ РЕГУЛЯРНОЙ ПОЛОСЫ $\Pi_{r(m)}$ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Для регулярной полосы $\Pi_{r(m)}$ [1] вводятся инвариантные оснащения в смысле Нордена — Картана и в смысле Нордена — Бортолотти, а также двойственные нормальные связности в расслоении нормалей 1-го и 2-го рода базисной поверхности V_r полосы $\Pi_{r(m)}$.

Во всей работе мы придерживаемся обозначений, замечаний работы [1] и следующей схемы индексов: